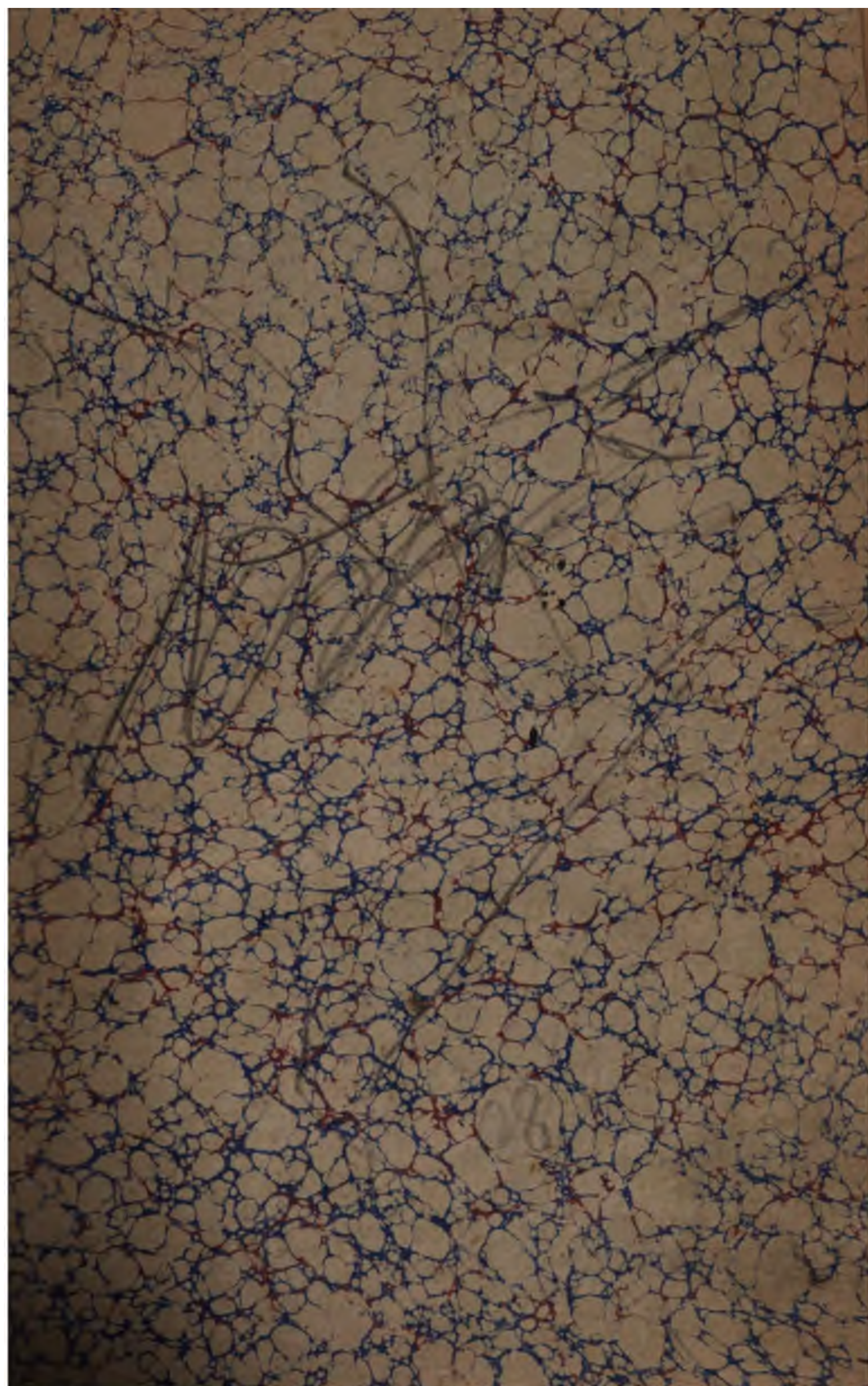




Richard P. Braden
Gennadeion
Athenai

Manyaze

no manaja

475 785 764
627 373 279
1102

475 785 164
627 373 279
1102 1158 443
254 575
1078
2859 472
39617

ΠΡΟΛΟΓΟΣ
ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἐν τῷ παρόντι βιβλίῳ τῆς στοιχειώδους ἀλγέβρας ἀναπτύσσεται καὶ θεμελιοῦται ἡ ἄλγεβρα κατὰ τρόπον ὅλως νέον συμφώνως πρὸς τὴν σημερινὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης κατάστασιν.

Ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐκθέτω τὰς γενικὰς τῶν τεσσάρων πράξεων ἰδιότητας καὶ δεικνύω, ὅτι πᾶσαι αὗται αἱ ἰδιότητες εἶνε ἀναγκαῖα ἀκολουθήματα δύο μόνον ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας διὰ τοῦτο καλῶ ἀρχικὰς ἢ πρωτευούσας ἰδιότητας. Ἐξαρτῶνται δὲ ἀπὸ τῶν δύο τούτων αἱ ἄλλαι κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε καὶ πᾶσα ἄλλη πρᾶξις, εἴτε ἀριθμητικὴ εἴτε γεωμετρική, ἐὰν ἔχῃ τὴν ἑτέραν τῶν ἰδιοτήτων τούτων, ἔχει καὶ πάσας τὰς ἐξ αὐτῆς πηγαζούσας· (τοιαῦται πράξεις εἶνε, ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἡ πρόσθεσις τῶν γραμμῶν, κτλ.).

Μετὰ δὲ ταῦτα δεικνύων τὴν ἀνάγκην τῆς προσαρτήσεως καὶ ἄλλων νέων ἀριθμῶν, θέτω ὡς ὅρον, ἢ ὡς ἀρχήν, ὅτι καὶ οὗτοι, οἱασδήποτε φύσεως καὶ ἂν εἶνε, πρέπει νὰ ἔχωσι τὰς αὐτὰς δύο ἀρχικὰς ἰδιότητας, ὅτε θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἄλλας, τὰς ἐξ αὐτῶν ἑπομένας. Ἐκ δὲ τῆς διατηρήσεως τῶν ἀρχικῶν τούτων ἰδιοτήτων εὑρίσκονται ἀμέσως ὡς ἀναγκαῖα ἀκολουθήματα οἱ ὁρισμοὶ τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὄχι μόνον βλέπει τις τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν βαθμηδὸν ἀναπτυσσόμενον, ἀλλὰ καὶ ἐννοεῖ, πῶς τὰ διάφορα τῶν ἀριθμῶν εἴδη, κοινὴν ἔχοντα τὴν γένεσιν, συνδέονται πρὸς ἄλληλα ἀναποσπάστως καὶ συναποτελοῦσιν ἓν ὅλον τέλειον καὶ ἁρμονικόν· συνάμα δὲ λαμβάνει καὶ σαφῆ ἰδέαν τοῦ σκοποῦ, δι' ὃν γίνεται.

Οἱ πάσης αἰτιολογίας καὶ βάσεως στερούμενοι, ὅλως αὐθαίρετοι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἀσύνδετοι ὁρισμοί, δι' ὧν ὡρίζοντο μέχρι τοῦδε οἱ ἀριθμοὶ καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις, δὲν εὐχαριστοῦσι τὸν μανθάνοντα, ὅστις δικαίως ἀπορεῖ, διατὶ οὕτω καὶ οὐχὶ ἄλλως ὁρίζονται ἕκαστα. Διατὶ λόγου χάριν τὸ γινόμενον δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς θετικόν; Ἐκ τοῦ ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ σημαίνουσί τι ἐναντίον τοῦ ὑπὸ τῶν θετικῶν σημαινομένου (οἷα κέρ-

δος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, καὶ τὰ ὅμοια) εἶνε ἀδύνατον νὰ ὁρισθῇ καὶ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· διότι πῶς εἶνε δυνατὸν νὰ εἴπωμεν, ὅτι 5 δραχμαὶ ζημίας ἐπὶ 8 δραχμὰς ζημίας πολλαπλασιαζόμεναι δίδουσι 40 δραχμὰς κέρδους; Ὥστε ἡ αἰτία, διὰ τὴν ὁποίαν ὁρίζομεν τὸ γινόμενον τοιουτοτρόπως, κεῖται βαθύτερον καὶ εἶνε ὅλως ἄσχετος πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν ἀριθμῶν, αἵτινες θὰ ὑπῆρχον καὶ ἂν ἄλλως ὡρίζετο ὁ πολλαπλασιασμός. Ὁμοίως ἐκ μόνης τῆς σημασίας, ἣν ἔχουσι τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$ εἶνε ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν· εἶνε ἀνάγκη νὰ δώσωμεν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ νὰ εὐρύνωμεν τὸν ἀρχικὸν αὐτοῦ ὁρισμόν. Ἀλλ' ὁ ἀρχικός, ὁ φυσικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε ἡ ἐπανάληψις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλάκις (τῆς δὲ διαιρέσεως ὁ μερισμὸς εἰς ἴσα μέρη). Καὶ ὅμως δίδομεν ἐν τοῖς κλάσμασι τοιοῦτον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὥστε συγχέονται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις· διότι, ἵνα ἐπὶ παραδείγματος τοῦτο δείξωμεν, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{1}{4}$ οὐδὲν ἄλλο εἶνε ἢ αὐτόχρημα διαίρεσις τοῦ 12 διὰ 4. Τίς ἀνάγκη λοιπὸν ἀναγκάζει ἡμᾶς νὰ δίδωμεν τοὺς ὁρισμοὺς τούτους; (1)

Ἀλλὰ καὶ ἂν παραδεχθῶμεν τοὺς ὁρισμοὺς τούτους, πάλιν μένει ἡ ἀπορία, πῶς, ἀφοῦ οὐδὲν συνδέει τὰ διάφορα εἴδη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' ἕκαστον συγκροτεῖται χωριστὰ καὶ αὐθαιρέτως, πῶς καὶ ὑπὸ τίνος δυνάμεως πάντα ταῦτα συναρμόζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ὅλον, οὗτινος εἶνε φανερὰ ἡ ἁρμονία καὶ ἡ ἁπλότης;

Ταῦτα πάντα ἐξηγο[illegible] ἡ ἄλγεβρα θεμελιοῦται ἐπὶ ἀσφαλῶν καὶ ἁπλουστάτων βάσεων, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν ἑπομένην

---

(1) Ὁ συνήθης ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων: ὅτι τὸ γινόμενον γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος: ἔχει πλὴν τοῦ αὐθαιρέτου καὶ τοῦτο τὸ ἐλάττωμα· ὅτι δὲν ἐξηγεῖ πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος. Ἡ ἀρχικὴ καὶ φυσικὴ γένεσις τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς μονάδος εἶνε ἡ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως (ἀριθμὸς εἶνε πλῆθος μονάδων)· ἀλλ' ἐν τῷ ὁρισμῷ τὸ γίνεσθαι ἔχει βεβαίως ἄλλην σημασίαν· διότι τὰ κλάσματα δὲν γίνονται ἐκ τῆς μονάδος 1 μόνον διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ἀλλ' ἀπαιτοῦσι καὶ τὴν διαίρεσιν αὐτῆς· ἀλλ' ἂν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς γινομένους ἐκ τῆς μονάδος διὰ διαιρέσεως καὶ ἐπαναλήψεως, ὑπάρχουσιν ἄπειροι τρόποι γενέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐκ τῆς μονάδος, εὑρίσκονται δὲ καὶ πολλοί, καθ' οὓς ὁ ὁρισμὸς ἐφαρμοζόμενος ἄγει εἰς ἄτοπα ἐξαγόμενα. Ὅτι δὲ οἱ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐκτείνοντες καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς μεγαλήτερα περιπίπτουσιν ἄτοπα, ἐννοεῖται οἴκοθεν.

Ex lib.
Richard Breadon
1-24-1934

ἀρχήν. Ὅτι ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους βαθμηδὸν ἐπινοοῦμεν καὶ προσαρτῶμεν εἰς τὸ σύστημα, πρέπει νὰ διατηρῶνται αἱ δύο ἀρχικαὶ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας οἱ ἀκέραιοι ἔχουσι, καὶ ἀφ᾽ ὧν αἱ λοιπαὶ ἀπορρέουσι. Τὸ ὀρθὸν καὶ σκόπιμον καὶ χρήσιμον τῆς ἀρχῆς ταύτης ἐννοεῖ πᾶς τις εὐκόλως. Καθώς, ὅταν οἰκοδόμημά τι πρόκειται νὰ ἐπεκταθῇ, πρέπει νὰ διατηρήσῃ τὰς κυριωτάτας αὐτοῦ γραμμὰς καὶ τὸν ῥυθμόν, ἵνα μὴ ἀποβῇ ἄτακτόν τι καὶ δύσμορφον, οὕτω καὶ τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν πρέπει εὐρυνόμενον νὰ διατηρῇ τὰς κυριωτάτας τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ. Ἡ ἀρχὴ αὕτη τῆς διατηρήσεως τῶν πρωτευουσῶν ἰδιοτήτων παντὸς ὅ,τι γενικεύεται ἢ ἐπεκτείνεται, ἐφαρμόζεται οὐ μόνον εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα τῆς μαθηματικῆς μέρη. Δι᾽ αὐτῆς εὗρον καὶ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν κλασματικῶν δυνάμεων, δι᾽ αὐτῆς προσέτι ὥρισα καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν. Αὕτη δὲ εἶνε καὶ ἡ πρώτη αἰτία τῆς ἁρμονίας τῶν μαθηματικῶν θεωριῶν πρὸς ἀλλήλας καὶ τῆς ἁπλότητος καὶ τῆς γενικότητος αὐτῶν.

Ὅτι ὁ τρόπος οὗτος τῆς θεμελιώσεως τῆς ἀλγέβρας εἶνε ὁ μόνος ὀρθός, μαρτυροῦσι δύο τινά· πρῶτον μέν, ὅτι αἱ δύο ἀρχικαὶ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας λαμβάνω, ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν καὶ οὐδεμίαν ἐπιτρέπουσιν αὔξησιν αὐτοῦ πέραν τῶν μιγάδων ἀριθμῶν· δεύτερον δὲ ὅτι, ἂν μεταβληθῶσι κατά τι αἱ ἰδιότητες αὗται, δύναται καὶ ἄλλο σύστημα ἀριθμῶν, διάφορον τοῦ κοινοῦ, νὰ διαπλασθῇ· καὶ ἐν γένει ἀναλόγως τῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ διατηρήσωμεν ἐφ᾽ ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν, μορφοῦται καὶ τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα (ἰδὲ Εἰσαγ. ἀνωτέρας ἀλγέβρας)

Ἀφοῦ ἐν τῇ εἰσαγωγῇ ἀνεπτύχθη τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν συμμέτρων ἀριθμῶν καὶ προητοιμάσθη, οὕτως εἰπεῖν, τὸ ἀναγκαιοῦν ὑλικὸν πρὸς διάπλασιν τῆς ἀλγέβρας, ἐκτίθενται ἔπειτα εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς καὶ ἡ θεωρία τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, διότι ταῦτα καὶ μετὰ τὴν προσάρτησιν ἄλλων ἀριθμῶν οὐδαμῶς μεταβάλλονται. Τοῦτο καὶ εὐκολύνει τὴν σπουδὴν τῆς ἀλγέβρας καὶ ὀρθὸν μοὶ φαίνεται· διότι ταῦτα διδάσκονται ὑπὸ πολλῶν εἰς τὴν β´ γυμνασιακὴν τάξιν, ὅτε ὁ μαθητὴς οὐδεμίαν ἔχει εἰσέτι γνῶσιν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἡ διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν συμπλήρωσις τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος γίνεται εἰς τὸ Γ´ βιβλίον. Ἐν αὐτῷ δεικνύεται ἡ ἀνάγκη τῆς προσαρτήσεως καὶ ἄλλων ἀριθμῶν, ὁρίζονται οἱ

ἀσύμμετροι καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις καὶ ἔπειτα διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις τῶν ῥιζῶν, τίθεται δὲ καὶ ἡ βάσις τῶν ἐφαρμογῶν τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν, δεικνυομένου, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ. Μετὰ δὲ ταῦτα εὑρίσκονται οἱ ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων, ὧν οἱ ἐκθέται εἶνε οἱοιδήποτε σύμμετροι ἀριθμοί, καὶ οἱ νόμοι οἱ ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων ἰσχύοντες.

Τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ὥρισα ὡς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος μονάδων (δεκαδικῶν ἢ μὴ) καὶ τοιούτων, ὥστε ὁσαιδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν προστεθῶσι νὰ μὴ ὑπερβαίνωσιν ἀκέραιόν τινα. Τινὲς ὁρίζουσιν αὐτοὺς ὡς ὅρια τῶν συμμέτρων, ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶνε ὀρθόν· διότι, ἵνα παραδεχθῶμεν, ὅτι μετάβλητός τις ἀριθμὸς ἔχει ὅριον, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἤδη τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶνε ὅριον καὶ πρὸς ὃν προσεγγίζει ὁ μεταβλητός· ἀλλὰ καὶ ἡ γεωμετρία, ἣν ὡς ἐπίκουρον προσλαμβάνουσιν, οὐδὲν ὠφελεῖ· διότι ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς αὐτῶν ἀποδείξεσι προϋποτίθεται, ὅτι πᾶσα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ, ὅπερ εἶνε ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθῇ, ἂν μὴ πρότερον ὑποτεθῶσι γνωστοὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Τοὺς ὅρους τῶν προβλημάτων διέκρινα εἰς δύο διάφορα εἴδη, ἅτινα ἐκάλεσα ἐπιτάγματα καὶ περιορισμούς. Εἰς δὲ τὴν ἀλγεβρικὴν τῶν προβλημάτων ἔκφρασιν μετὰ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις ἐκφράζει τὰ ἐπιτάγματα, προσλαμβάνω καὶ τοὺς περιορισμούς· διότι δι' ἀμφοτέρων τούτων καὶ πιστῶς ἐκφράζεται καὶ ὀρθῶς λύεται τὸ πρόβλημα.

Τὰ λεγόμενα σύμβολα τοῦ ἀπροσδιορίστου $\left(\frac{0}{0}\right)$ καὶ τοῦ ἀπείρου $\left(\frac{1}{0}\right)$ παρέλειψα ὅλως. Διότι, ἀποδειχθέντος, ὅτι ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶνε ἀδύνατος καὶ ἄγει εἰς ἄτοπα ἐξαγόμενα, οὐδεὶς λόγος δύναται νὰ γίνῃ περὶ τοιαύτης διαιρέσεως. Οὐδὲ ἐπιτρέπεται νὰ ὑποτεθῇ ὁ παρονομαστὴς κλασματικοῦ τύπου ἴσος τῷ 0· διότι ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀπεκλείσθη ἤδη κατὰ τὴν διαίρεσιν, ἐξ ἧς προέκυψεν ὁ τύπος. Διὰ τοῦτο αἱ μηδενίζουσαι τὸν παρονομαστὴν ὑποθέσεις πρέπει νὰ γίνωνται πρὸ τῆς διαιρέσεως. Ὅταν δὲ ἐν προβλήματι ὁ κλασματικὸς τύπος, ὁ τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου παρέχων, ἔχῃ κοινόν τινα παράγοντα ἔν τε τῷ ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρονομαστῇ, ὁ παράγων οὗτος πρὸ τῆς διαιρέσεως, ἐξ ἧς ὁ κλασματικὸς τύπος προέκυψεν, ἦτο κοινὸς εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, καὶ πᾶσα ἐπὶ τῶν δεδομένων ὑπο-

θεσις μηδενίζουσα αὐτόν, ἂν μὴ ἀπεκλείσθη ἤδη ἐν τῇ εὑρέσει τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως, καταστρέφει τὴν ἐξίσωσιν καὶ ἐπομένως καθιστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ἀόριστον. Ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ἡ μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος εὑρισκομένη, (ἣν πολλοὶ νομίζουσιν ὡς τὴν μόνην λύσιν), ἔχει τοῦτο τὸ προτέρημα, ὅτι πρὸς αὐτὴν πλησιάζουσιν αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος, ὅταν τὰ δεδομένα αὐτοῦ πλησιάζωσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην ἥτις μηδενίζει τὸν κοινὸν παράγοντα.

Τὴν θεωρίαν τῶν λογαρίθμων ἐξέθηκα κατ' ἴδιον ὅλως τρόπον. Αἱ πρὸς αὐτοὺς ἄγουσαι ὁδοὶ μέχρι τοῦδε ἦσαν δύο. Καὶ ἡ μὲν πρώτη, ἡ διὰ τῶν προόδων (δι' ἧς καὶ εὑρέθησαν τὸ πρῶτον οἱ λογάριθμοι) ἔχει τὸ ἐλάττωμα, ὅτι δι' αὐτῆς δὲν ὁρίζονται ἀκριβῶς πάντων τῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι, ἀλλὰ μόνον τῶν ὀλίγων ἐκείνων, οἵτινες εἶνε ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου· ὅσον δ' ὀλίγον καὶ ἂν διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων δύο ἐφεξῆς ὅροι αὐτῆς, ὑπάρχουσι πάντοτε μεταξὺ αὐτῶν ἄπειροι ἀριθμοί. Ἡ δὲ δευτέρα, ἡ διὰ τῶν ἐκθετῶν, εἶνε δύσβατος καὶ μακρά· διότι εἶνε ἀνάγκη πρῶτον νὰ ὁρισθῶσιν αἱ δυνάμεις, αἱ ἀσύμμετρον ἔχουσαι ἐκθέτην, ὅπερ ἀπαιτεῖ τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν θεωρήματα· ἔπειτα πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων τούτων μένουσιν ἀληθεῖς αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων· μετὰ δὲ ταῦτα πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^x = \beta$, ἐξ ἧς ὁρίζονται οἱ λογάριθμοι, ἔχει λύσιν καὶ νὰ δειχθῇ πῶς εὑρίσκεται ἢ πῶς εἶνε δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἡ λύσις αὕτη, ὅπερ ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν. Ὅταν δὲ τὴν μακρὰν ταύτην ὁδὸν διανύσῃ ὁ μαθητής, τότε μόνον φθάνει εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου καὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον προσεγγίσεως ἔχει φύσει ἀσαφές τι καὶ σκοτεινόν, δύσκολον εἶνε κατὰ τὴν μακρὰν ταύτην ὁδὸν νὰ διατηρηθῇ, ἐν νεαρᾷ μάλιστα διανοίᾳ, ἡ διαύγεια τῶν ἐννοιῶν, ἥτις εἶνε ἡ πρώτη τῆς μαθηματικῆς ἀρετή· εὐκολώτατα δὲ ἀποκτῶσι πάντα ταῦτα χροιάν τινα ἀβεβαιότητος καὶ ἀσαφείας, ἥτις ἀντίκειται εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀκρίβειαν.

Ἀλλ' ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρους ἐκθέτας ἐχουσῶν δυνάμεων ὡς καὶ ἡ τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ δύσκολος εἶνε καὶ περιττὴ ὅλως διὰ τὴν στοιχειώδη μαθηματικήν· συμπεριελαμβάνοντο δὲ μέχρι τοῦδε ἐν τοῖς στοιχείοις χάριν τῶν λογαρίθμων.

Ταῦτα ἀναλογιζόμενος ἐζήτησα καὶ εὗρον ἄλλον ὁρισμὸν τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων, ὅστις οὐδεμίαν τῶν θεωριῶν τούτων

προϋποθέτει, ἀλλ' ἁπλῶς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὁ λογάριθμος ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐκφράζει (πλὴν ἑνὸς) τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων αὐτοῦ καὶ τῶν δεκαδικῶν δυνάμεων αὐτοῦ. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν λογαρίθμων εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἁπλούστατα καὶ στηρίζεται ἐπὶ τῆς στοιχειώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ' ἣν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ παράγοντες ἢ ἓν ὀλιγώτερον. Ἡ δὲ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων γίνεται κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν μόνον διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Τοιουτοτρόπως ἀποβαίνει ἡ θεωρία τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων καὶ συντομωτέρα καὶ ἁπλουστέρα.

Τοὺς ἄλλους ὁρισμοὺς τῶν λογαρίθμων καὶ τὰ διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα ἐξέθηκα διὰ βραχέων ἐν παραρτήματι· τοῦτο δὲ χάριν τῶν θελόντων νὰ σπουδάσωσι τὴν ἀνωτέραν μαθηματικήν· διότι διὰ τοὺς ἄλλους φαίνονταί μοι ταῦτα ὅλως περιττά.

Ἀντὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων παρέλαβον τοὺς συνδυασμοὺς καὶ τὰ περὶ αὐτούς· διότι καὶ χρησιμώτερα εἶνε ταῦτα καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως φαίνονταί μοι μᾶλλον συντελοῦντα.

Τὰ διὰ μικρῶν στοιχείων τυπωθέντα, ὡς καὶ ἐκεῖνα, ὧν προετάχθη ἀστερίσκος, δύνανται νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος δὲν συγχωρῇ τὴν διδασκαλίαν αὐτῶν.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 1 Ἰουνίου 1882

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Ἐὰν συγκρίνωμεν πλῆθος ἐξ ὁμοίων πραγμάτων συγκείμενον (ἢ τῶν ὁποίων παραβλέπομεν τὰς διαφορὰς) πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων τούτων, σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ἀριθμοῦ*.

Ἀριθμὸς ἄρα εἶνε ἔννοια, δι' ἧς ἐκφράζομεν τὴν σχέσιν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων πρὸς ἓν τούτων, ὅταν θεωρῶμεν αὐτὰ μόνον ὡς πρὸς τὸ πλῆθος.

2. Τὸ ἓν τῶν πραγμάτων, πρὸς ὃ συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται *μονάς*.

3. Οἱ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι σειρὰν ἄπειρον ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ ἑνός, ἐν ᾗ ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ μιᾶς μονάδος. Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *ἄθροισμα πολλῶν μονάδων*, ἤτοι ὡς ἀποτελούμενος ὑπὸ τῆς μονάδος πολλάκις ἐπαναλαμβανομένης.

4. *Ἴσοι* λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἔχῃ ἀντίστοιχον μίαν τοῦ ἄλλου, καὶ τἀνάπαλιν.

Ἄνισοι δέ, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· τότε ὁ πρῶτος λέγεται *μείζων* τοῦ δευτέρου, ἢ ὅτι ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἢ ὁ δεύτερος

5. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν γίνεται φανερόν, ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ἑπομένας ἰδιότητας.

α'.) *Οἱ τῷ αὐτῷ ἴσοι ἀριθμοὶ εἶνε καὶ ἀλλήλοις ἴσοι.*

β'.) Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἴσων ἀριθμῶν προστεθῇ μία μονάς, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι· καὶ γενικῶς, *ἐὰν εἰς ἴσους προστεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοί, οἱ προκύπτοντες εἶνε ἴσοι*

Τὰς ἰδιότητας ταύτας ὀνομάζομεν *ἀρχικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.*

6. Τὸ σημεῖον, δι' οὗ παριστῶμεν τὴν ἰσότητα, εἶνε τόδε =· γράφεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν.

7. Οἱ δύο ἀριθμοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων γράφεται τὸ σημεῖον =, λέγεται, ὅτι *ἀποτελοῦσιν ἰσότητα*· ἑκάτερος δὲ αὐτῶν λέγεται *μέλος* τῆς ἰσότητος.

8. Τὸ σημεῖον, δι' οὗ παριστῶμεν τὴν ἀνισότητα, εἶνε $<$· γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας·

ὡς $8 < 9$, $12 > 7$.

9. Πάντα τὰ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ζητήματα ἀνάγονται εἰς τὰ τέσσαρα στοιχειώδη· *πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν.*

10. Ὅταν σκεπτώμεθα ἐπί τινων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους δὲν θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν, ἢ οἱ ὁποῖοι εἶνε ἄγνωστοι, παριστῶμεν αὐτοὺς διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Οὕτω τὰ γράμματα.

α, β, γ, δ, κτλ.

παριστῶσι τυχόντας ἀριθμούς.

Πρόσθεσις.

11. Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκεται ἄλλος, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, ἃς ἔχουσιν οἱ δοθέντες.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται *ἄθροισμα* τῶν δοθέντων. Εὑρίσκεται δέ, ἂν εἰς τὸν πρῶτον προστεθῇ ὁ δεύτερος, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα ὁ τρίτος, εἰς τὸ εὑρεθὲν νέον ἄθροισμα ὁ τέταρτος, καὶ οὕτω καθεξῆς.

12. Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι εἶνε δεδομέναι αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτὸ μονάδες. Ἐκ τούτου συνάγεται ἡ ἑπομένη θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως.

13. *Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις πολλῶν ἀριθμῶν, πάντοτε εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.*

Διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ὡς τῶν α καὶ β, παρίσταται

διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, ἢ διὰ τοῦ $\beta+\alpha$ (διὰ μὲν τοῦ $\alpha+\beta$ δηλοῦμεν, ὅτι εἰς τὸν α πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ β, διὰ δὲ τοῦ $\beta+\alpha$ δηλοῦμεν τοὐναντίον, ὅτι εἰς τὸν β πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ α)· καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ παρίσταται ἀδιαφόρως διὰ τῶν

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta, \quad \text{ἢ} \quad \alpha+\gamma+\delta+\beta, \quad \text{ἢ} \quad \delta+\beta+\alpha+\gamma, \text{ κτλ.}$$

ἔνθα ἡ τάξις τῶν ἀριθμῶν δηλοῖ καὶ τὴν σειρὰν τῶν πράξεων.

Τὸ ἄθροισμα ἐγκλείεται συνήθως εἰς παρένθεσιν, ὅταν ἐπ' αὐτοῦ πρόκειται νὰ γίνῃ καὶ ἄλλη πρᾶξις· ὡς

$$(\alpha+\beta)+\gamma, \quad (\alpha+\beta+\gamma)+\delta, \text{ κτλ.}$$

14. Ἐκ τῆς εἰρημένης θεμελιώδους ἰδιότητος τῆς προσθέσεως πηγάζουσιν ἀμέσως αἱ ἑπόμεναι.

15. *Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι δύο ἢ περισσότεροι προσθετέοι ὑπὸ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon.$$

Λέγω, ὅτι οἱ προσθετέοι β καὶ δ δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $(\beta+\delta)$.

Διότι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς

$$\beta+\delta+\alpha+\gamma+\varepsilon\cdot$$

ἐὰν δέ, ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, περιορισθῶμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δύο πρώτων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν

$$(\beta+\delta)+\alpha+\gamma+\varepsilon.$$

Ἡ αὐτὴ πρότασις δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ.

16. *Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύναται οἱοσδήποτε τῶν προσθετέων νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.*

Ἤτοι ὁ προσθετέος $(\beta+\delta)$ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ἐν τῷ ἀθροίσματι $(\beta+\delta)+\alpha+\gamma+\varepsilon$ ὑπὸ τῶν β καὶ δ.

17. *Εἴτε εἰς ἄθροισμα προστεθῇ ἀριθμός, εἴτε εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν ἄθροισμα.*

Διότι προσθέτοντες τὸν ε εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$$

ἤτοι τὸ $\alpha+\varepsilon+\beta+\gamma+\delta$, ἢ $(\alpha+\varepsilon)+\beta+\gamma+\delta$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ αὐτὸ προκύπτει ἄθροισμα καὶ ἂν προσθέσωμεν τὸν ε εἰς ἕνα τῶν προσθετέων, οἷον εἰς τὸν α.

18. *Ἄθροισμα προστίθεται εἰς ἄθροισμα καὶ ἂν προστεθῶσι τὰ μέρη ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.*

Διότι ἔστωσαν τὰ δύο ἀθροίσματα.

$$(α+β+γ) \quad \text{καὶ} \quad (δ+ε+ζ+η)·$$

λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε τὸ

$$α+β+γ+δ+ε+ζ+η·$$

καὶ ὄντως, ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῷ τοὺς προσθετέους α, β, γ, ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $(α+β+γ)$, εὑρίσκομεν

$$(α+β+γ)+δ+ε+ζ+η$$

ποιοῦντες δὲ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τοὺς ἄλλους προσθετέους, εὑρίσκομεν

$$(α+β+γ)+(δ+ε+ζ+η).$$

τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δοθέντων ἀθροισμάτων.

19. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων τούτων (15, 16, 17 καὶ 18) καὶ ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως καὶ ὁ τρόπος, καθ ὃν ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις, εἶνε ἀδιάφορα· ἀρκεῖ μόνον τὸ ὅτι ὑπάρχει πλήρης ἀδιαφορία πρὸς τὴν τάξιν, καθ' ἣν λαμβάνονται ἀλλεπαλλήλως οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ πράξει· ὥστε καὶ πᾶσα ἄλλη πρᾶξις, τὴν αὐτὴν ἀδιαφορίαν ἔχουσα πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν ἐφ' ὧν ἐκτελεῖται, ἔχει ἀναγκαίως καὶ τὰς ὑπὸ τῶν προτάσεων τούτων ἐκφραζομένας ἰδιότητας.

Ἀφαίρεσις.

20. Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἡ ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως πρᾶξις· ἐν αὐτῇ δίδονται δύο ἀριθμοί, α καὶ β, καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β, νὰ δίδῃ ἄθροισμα τὸν α, ἤτοι νὰ εἶνε $α=β+γ$·

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *διαφορὰ* τῶν δεδομένων· τούτων δὲ ὁ μὲν α λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ β *ἀφαιρετέος*.

21. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν παρίσταται διὰ τοῦ σημείου — γραφομένου μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ πρὸ τοῦ ἀφαιρετέου, οὕτως $α-β$· ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $γ=α-β$.

22. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου καὶ διαφορᾶς σχέσις εἶνε σχέσις προσθέσεως· διότι $α=β+γ$, ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ ἐκ τῶν τῆς ἰσότητος.

Τούτων αἱ πρωτεύουσαι εἶνε αἱ ἑπόμεναι·

1) *Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ μένει ἀμετάβλητος.*

2) *Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.*

3) *Εἴτε τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν διὰ μιᾶς ἀπὸ ἄλλου, εἴτε αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, ἡ αὐτὴ προκύπτει διαφορά·* ἤτοι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$.

Τὰς ἀποδείξεις τούτων, ἁπλουστάτας οὔσας, παραλείπομεν.

Πολλαπλασιασμός.

23. *Πολλαπλασιασμὸς* ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἕτερον β εἶνε ἡ πρόσθεσις τόσων ἀριθμῶν ἴσων τῷ α, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ β· ὁ ἐκ τῆς προσθέσεως ταύτης προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον*· οἱ δὲ δοθέντες, *παράγοντες*· καὶ ὁ μὲν α λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ β *πολλαπλασιαστής*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 6 ἐπὶ τὸν 4 σημαίνει τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $6+6+6+6$ ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον σύγκειται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος.

24. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν β παρίσταται ὡς ἑξῆς

$$\alpha\times\beta,\ \text{ἢ}\ \alpha.\beta,\ \text{ἢ καὶ ἁπλῶς}\ \alpha\beta\cdot$$

τὴν τελευταίαν ὅμως παράστασιν δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν, ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶνε ἀριθμοί· οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὸν 5 ἀνάγκη νὰ σημειῶται 7×5, ἢ 7.5, καὶ ὄχι διὰ τοῦ 75· διότι τότε συγχέεται τὸ γινόμενον μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ 75.

25. Δεδομένων πολλῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους, ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ ἀριθμοί.

26. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ἡ τάξις, καθ' ἣν λαμβάνονται οἱ πολλαπλασιαστέοι ἀριθμοί, εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον· ἤτοι, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, πάντοτε εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὡς τῶν α καὶ β, παρίσταται διὰ τοῦ $\alpha.\beta$, ἢ διὰ τοῦ $\beta.\alpha$· (διὰ τοῦ $\alpha.\beta$, ὅταν ὁ α πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν β· διὰ δὲ τοῦ $\beta.\alpha$, ὅταν ὁ β πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν α).

Καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ὡς τῶν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, παρίσταται ἀδιαφόρως ὡς ἑξῆς· $\alpha.\beta.\gamma.\delta$, ἢ $\beta.\alpha.\gamma.\delta$, ἢ $\delta.\beta.\gamma.\alpha$, κτλ. ἐγκλείεται δὲ καὶ τὸ γινόμενον εἰς παρένθεσιν, ἐὰν πρόκειται νὰ γίνῃ ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἄλλη πρᾶξις· ὡς $(\alpha.\beta)+(\gamma.\delta)$, $(3.5)+7$.

27. Ἐκ τῆς εἰρημένης θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πηγάζουσιν ἀναγκαίως αἱ ἑπόμεναι, αἵτινες εἶνε ὅλως ὅμοιαι πρὸς τὰς ἐν τῇ προσθέσει εὑρεθείσας.

28. *Ἐν παντὶ γινομένῳ δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι δύο ἢ περισσότεροι παράγοντες ὑπὸ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν·* (ἐδ. 15).

Ἡ αὐτὴ δὲ πρότασις ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐν παντὶ γινομένῳ δύναται ὁ τυχὼν παράγων ν' ἀντικατασταθῇ ὑπ' ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον (παράβλ. ἐδ. 16).

29. *Εἴτε γινόμενον πολλαπλασιάσῃ ἀριθμὸς εἴτε ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου, τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν γινόμενον* (παράβλ. ἐδ. 17).

30. *Γινόμενον ἐπὶ γινόμενον πολλαπλασιάζεται καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσι πάντες οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν γινομένων* (παράβλ. ἐδ. 18). ἤτοι $(\alpha.\beta.\gamma).(\delta.\varepsilon)=\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.$

31. Αἱ προτάσεις αὗται ἀποδεικνύονται ὡς ἀπεδείχθησαν καὶ αἱ ὅμοιαι αὐτῶν ἐν τῇ προσθέσει ἐκ τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, ἀρκεῖ ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἐκείναις νὰ τραπῶσι τὰ ὀνόματα *πρόσθεσις, ἄθροισμα* κτλ. εἰς τὰ, *πολλαπλασιασμός, γινόμενον* κτλ. Διὰ τοῦτο καὶ παρελείψαμεν τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

32. Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς συνδέονται διὰ τῆς ἑπομένης γενικῆς ἰδιότητος.

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἂν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.

Τοῦτο ἐκφράζει ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta+\gamma).\delta=(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta).$

Λέγεται δὲ ἡ ἰδιότης αὕτη *ἐπιμεριστική*.

Ἕνεκα τῆς πρώτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης νὰ ἐκφρασθῇ καί ὡς ἕπεται·

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἄλλων, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.

ἤτοι $\delta.(\alpha+\beta+\gamma)=(\delta.\alpha)+(\delta.\beta)+(\delta.\gamma).$

33. Ἐκ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα καὶ ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἔστω τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)$.

Θεωροῦντες τὸ ἄθροισμα (δ+ε) ὡς εὑρεθὲν καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=\alpha.(\delta+\varepsilon)+\beta.(\delta+\varepsilon)+\gamma.(\delta+\varepsilon)$$

καὶ ἐὰν εἰς ἑκάστην παρένθεσιν ἐφαρμόσωμεν καὶ πάλιν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)+(\alpha.\varepsilon)+(\beta.\varepsilon)+(\gamma.\varepsilon).$$

34. *Τὰ διπλάσια τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶνε ἴσα, καὶ τὰ τριπλάσια ὡσαύτως· καὶ γενικῶς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶνε ἴσα.*

Ἔστω $\alpha=\beta$. Ἐὰν προστεθῶσιν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους ἴσοι ἀριθμοί, οἱ α καὶ β, ἕπεται (ἐδ. 5, β') $\alpha+\alpha=\beta+\beta$, ἤτοι $2\alpha=2\beta$.

Ἐὰν δὲ τοῦτο γίνῃ πολλάκις, προκύπτει ἡ πρότασις.

Φανερὸν δέ, ὅτι τῶν ἀνίσων τὰ διπλάσια εἶνε ἄνισα, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ὡσαύτως.

Διαίρεσις.

35. Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. ἐν αὐτῇ δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν β νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν α, ἤτοι νὰ εἶνε $\alpha=\beta.\gamma$.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ ἀπαγγέλλεται α διὰ β)· ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\gamma=\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὁ α λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ β *διαιρέτης*.

36. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου καὶ πηλίκου σχέσις εἶνε σχέσις πολλαπλασιασμοῦ, διότι $\alpha=\beta.\gamma$, ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἐκ τῶν τῆς ἰσότητος· τῶν ἰδιοτήτων τούτων πρωτεύουσαι εἶνε αἱ ἑξῆς·

37. *Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται,* (ὅταν ὑπάρχῃ), *ἐὰν ἀμφότεροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν* (παράβλ. 22,1.)

Διότι ἐὰν εἶνε $\alpha=\beta.\gamma$. θὰ εἶνε (34) καὶ $\alpha.\eta=(\beta.\gamma)\eta=\beta.\gamma.\eta$,

ἢ (28) $\alpha.\eta=(\beta.\eta).\gamma$

Ὥστε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α.η διὰ τοῦ β.η εἶνε πάλιν ὁ γ.

38. *Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ* (ἐὰν διαιρῆται) *διὰ τοῦ ἀριθμοῦ* (παράβλ. ἐδ. 22, 2).

Ἔστω τὸ γινόμενον α.β.γ.δ.ε, καὶ ἂς διαιρῆται ὁ παράγων β διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ρ, ἂς δίδῃ δὲ πηλίκον π· τότε θὰ εἶνε $\beta=\rho.\pi$·

λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon$ διὰ τοῦ ρ εἶνε $\alpha.\pi.\gamma.\delta.\varepsilon$·
διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ρ δίδει

$(\alpha.\pi.\gamma.\delta.\varepsilon).\rho$, ἢ $\alpha.(\pi.\rho).\gamma.\delta.\varepsilon$, ἢ $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon$, τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἀμέσως, ὅτι *γινόμενον διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἐὰν ἐξαλειφθῇ ὁ παράγων οὗτος.*

39. *Εἴτε διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, εἴτε ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν τούτων* (τοῦτ' ἔστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου, εἶτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ καθεξῆς) *ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον εὑρίσκομεν.* (προβλ. ἐδ. 22, 3)

Ἂς διαιρῆται ἀριθμός τις α διὰ τοῦ γινομένου $(\beta.\gamma.\delta)$ καὶ ἂς δίδῃ πηλίκον π τότε εἶνε $\alpha=(\beta.\gamma.\delta).\pi$ ἢ καὶ $\alpha=\beta.(\gamma.\delta.\pi)$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ α διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος β διαιρεθεὶς δίδει πηλίκον τὸ $(\gamma.\delta.\pi)$· ἀλλὰ καὶ τοῦτο, διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος γ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ $(\delta.\pi)$· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο διαιρεθῇ διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος δ, εὑρίσκεται πηλίκον τὸ π.

40. *Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ* (ἐὰν διαιρῶνται) *καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ πηλίκα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, διαιρουμένων διὰ δ, εἶνε τὰ π, ρ, σ, ἤτοι ἔστω $\alpha=\delta.\pi$, $\beta=\delta.\rho$, $\gamma=\delta.\sigma$·
λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma$ διαιρεθέντος διὰ τοῦ δ θὰ εἶνε $\pi+\rho+\sigma$·
διότι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δ δίδει $(\pi+\rho+\sigma).\delta$, ἤτοι (ἐδ. 32) $\pi.\delta+\rho.\delta+\sigma.\delta$, τουτέστι τὸν διαιρετέον $\alpha+\beta+\gamma$.

Συμπέρασμα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων πηγάζουσιν ἅπασαι ἐκ δύο ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· τοῦτ' ἔστιν πρῶτον ἐκ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἰδιότητος, καθ' ἣν τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἄγουσιν, ἐπὶ ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἐφαρμοζόμεναι, μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λαμβάνωνται ἀλλεπαλλήλως οἱ ἀριθμοί· καὶ δεύτερον ἐκ τῆς συνδεούσης τὰς πράξεις ταύτας ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος.

Διὰ τοῦτο αἱ ἰδιότητες αὗται λέγονται *θεμελιώδεις* ἢ *ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

41. Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες γίνονται ἐκ τῆς μονάδος 1 διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς, δὲν ἐξαρκοῦσιν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων· διότι ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις δύο τοιούτων ἀριθμῶν δὲν εἶνε πάντοτε δυναταί· καὶ διὰ τοῦτο πλεῖστα προβλήματα, καίπερ ὄντα ἁπλούστατα, δὲν δύνανται νὰ λυθῶσι διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἐὰν π. χ. προταθῇ νὰ μοιρασθῶσι 3 πήχεις ὑφάσματος εἰς 8 ἀνθρώπους, ἂν καὶ γίνεται τοῦτο ἐν τοῖς πράγμασιν εὐκολώτατα, εἶνε ὅμως ἀδύνατον νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ τὸ μερίδιον ἑκάστου. Διὰ τοῦτο ἦτο ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῶσι καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ καὶ νὰ προσαρτηθῶσιν εἰς τοὺς ἐξ ἀρχῆς σχηματισθέντας, ὥστε ν' ἀποτελεσθῇ γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ αἱ δύο εἰρημέναι πράξεις νὰ εἶνε πάντοτε δυναταί. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν εἶνε δυνατὸν διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4... νὰ γίνῃ σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ νὰ εἶνε δυνατὴ πᾶσα διαίρεσις.

42. Ἐπειδὴ εἰς τὸ νέον σύστημα θὰ δύναται πᾶς ἀριθμὸς νὰ διαιρῆται εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, ἕπεται, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμὸς (ἕνα δὲ καὶ μόνον παραδεχόμεθα), ὅστις δὶς λαμβανόμενος νὰ δίδῃ τὴν μονάδα 1· ὁμοίως θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμός, ὅστις τρὶς λαμβανόμενος νὰ δίδῃ τὴν μονάδα 1· καὶ καθεξῆς· καὶ γενικῶς, θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμὸς (καὶ εἷς μόνος) ὅστις μ φορὰς λαμβανόμενος ($\mu = 2, 3, 4 \ldots\ldots$) νὰ δίδῃ τὴν μονάδα 1.

Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους παριστῶμεν διὰ τῶν σημείων

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{\mu}, \ldots\ldots$$

καὶ θεωροῦμεν ὡς *νέας μονάδας*· ὀνομάζομεν δ' αὐτὰς *κλασματικάς*· τὴν δ' ἐξ ἀρχῆς ὑπάρχουσαν, *ἀκεραίαν*· ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι ἔχομεν τὰς μονάδας

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{\mu}, \ldots\ldots$$

Αἱ κλασματικαὶ μονάδες διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γίνονται ἀκέραιαι· καὶ ὄντως κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῶν εἶνε·

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1, \text{ κτλ.}$$

Ὁρισμοί.

43. *Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.*

Οὕτως $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+1+1$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, εἶνε ἀριθμοί.

Τὸ νέον σύστημα τῶν ἀριθμῶν λέγεται *κλασματικὸν* καὶ οἱ νέοι ἀριθμοὶ αὐτοῦ *κλασματικοί*, οἱ δὲ προϋπάρχοντες 1, 2, 3, 4... λέγονται *ἀκέραιοι*.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τῶν μονάδων· τοῦτ᾽ ἔστι πολλάκις λαμβανόμενοι γίνονται ἀκέραιοι.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ γίνεται ἀκέραιος, ἐὰν ληφθῇ 2. 3, ἤτοι ἑξάκις· διότι πᾶσαι αἱ μονάδες, ἐξ ὧν σύγκειται, γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί.

44. *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενοι γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι· ἄνισοι δέ, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μεγαλήτερος λέγεται ὁ τὸν μεγαλήτερον ἀκέραιον δίδων, μικρότερος δὲ ὁ τὸν μικρότερον.*

Παραδείγματος χάριν οἱ δύο ἀριθμοὶ

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12} \text{ καὶ } \frac{1}{4} \text{ εἶνε ἴσοι,}$$

διότι τετράκις ληφθέντες γίνονται ἀμφότεροι 1.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{7}{10}$ εἶνε ἴσοι· διότι δεκάκις ληφθέντες γίνονται ἀμφότεροι 7.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἀνάγεται ἡ ἰσότης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἰς ἰσότητα ἀκεραίων (ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἀνισότης), ὥστε αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῆς ἰσότητος (5) διατηροῦνται.

45. Διὰ νὰ διατηρηθῶσι δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς.

46. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων· ὡσαύτως καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ἀκέραιος, ἤτοι α.3 σημαίνει α+α+α· οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶνε ὁ α.

47. Διὰ νὰ εὕρωμεν, πῶς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα, ἵνα διατηρήσωμεν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂς παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ α ἐπὶ μίαν κλασματικὴν μονάδα, ἔστω ἐπὶ $\frac{1}{5}$, ὡς συνήθως διὰ τοῦ $α.\frac{1}{5}$.

Εὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 5 καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν πρώτην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εὑρίσκομεν

$$\left(\alpha . \frac{1}{5}\right) \cdot 5 \text{ ἢ } \alpha . \left(\frac{1}{5} \cdot 5,\right) \text{ ἤτοι } \alpha .\ 1, \text{ ἤτοι } \alpha .$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ $\alpha . \frac{1}{5}$ εἶνε τὸ πέμπτον μέρος τοῦ α· διότι πεντάκις ληφθὲν ἔδωκε τὸν α.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἐν γένει, ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha . \frac{1}{\mu}$ εἶνε τὸ μ^ὀν^ μέρος τοῦ α.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὰς ἀρχικὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰδιότητας καὶ εἰς τὸ νέον σύστημα, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\mu}$ *ὡς μερισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς μ ἴσα μέρη.*

48. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς ἐν γένει πρέπει νὰ ὁρισθῇ *ὡς πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β, εὑρίσκεται τρίτος συγκείμενος ἐκ τοῦ α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ β ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.*

Διότι, ἂν ὁ β σύγκειται ἐκ τῶν μονάδων

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5},$$

τὸ γινόμενον θὰ εἶνε $\alpha . \left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$,

ἤτοι κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα

$$\alpha \cdot 1+\alpha . 1+\alpha \cdot \frac{1}{2}+\alpha \cdot \frac{1}{5}+\alpha \cdot \frac{1}{5},$$

Τοῦτ' ἔστι (47) $\quad \alpha+\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{5}+\frac{\alpha}{5}.$

49. Ἡ διαίρεσις ὁρίζεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (35)· ὥστε ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς μένει ὁ αὐτός.

50. Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς εἰξεύρομεν, πῶς ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις συνεχωνεύθησαν εἰς μίαν πρᾶξιν καὶ ἀπέβαλον τὴν πρώτην αὐτῶν σημασίαν, καθ' ἣν ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἦτο *ἐπανάληψις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλάκις*, ἡ δὲ διαίρεσις, *μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς πολλὰ μέρη ἴσα.*

Τῷ ὄντι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$ σημαίνει διαίρεσιν αὐτοῦ διὰ τοῦ 3, καὶ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ τοῦ $\frac{1}{5}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ 5· καὶ γενικῶς ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἕτερον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τῆς εἰσαγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σκοπὸς εἶνε, ὡς εἴπομεν, νὰ καταστήσῃ τὴν λύσιν παντὸς προβλήματος εἰς τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν ἀναγομένου, δυνατήν, τοὐλάχιστον ἀριθμητικῶς· διότι ὑπάρχουσι καὶ προβλήματα, καὶ ἁπλούστατα μάλιστα, ἅτινα λύονται μὲν ἀριθμητικῶς, ὧν ὅμως ἡ διὰ τῶν κλασμάτων λύσις *ἕνεκα τῆς ἰδιαιτέρας φύσεως τοῦ ἀγνώστου ποσοῦ* εἶνε ἀπαράδεκτος· τοιοῦτον εἶνε τὸ ἑπόμενον.

Ἐὰν δι' ὀκτὼ πλοίων πρόκειται νὰ μεταφερθῶσι 1500 ἄνθρωποι καὶ νὰ διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου εἰς αὐτά, πόσους πρέπει νὰ ἔχῃ ἕκαστον τῶν πλοίων;

Ἡ ἀριθμητικὴ λύσις εἶνε $\frac{1500}{8}$ ἢ $187\frac{1}{2}$, διότι οὗτος ὁ ἀριθμός, καὶ *οὗτος μόνος*, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 8 δίδει τὸν 1500, πρόδηλον ὅμως, ὅτι τοῦτο εἶνε φύσει ἀδύνατον νὰ πραγματωθῇ, καὶ ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος εἶνε *ἀδύνατος ἐν τοῖς πράγμασιν*. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀριθμητική, χάριν τῆς γενικότητος, ἐργάζεται ἐπὶ ἀφῃρημένων ἀριθμῶν, ἄπειρα δ' ἄλλα προβλήματα, εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀναγόμενα, ἐπιδέχονται πράγματι τὴν κλασματικὴν λύσιν $187\frac{1}{2}$, διὰ τοῦτο εἶνε ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ ἀριθμητικὴ γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ νὰ δύνανται νὰ λυθῶσι δι' ἀριθμῶν πάντα τὰ ζητήματα. Ἂν δὲ ἡ εὑρισκομένη λύσις, *ἥτις εἶνε ἡ μόνη δυνατή*, εἶνε τῷ ὄντι ἐφαρμόσιμος εἰς τὰ πράγματα ἢ μή, τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἰδιαιτέρας φύσεως τῶν ποσῶν, ἅτινα εἰσέρχονται εἰς τὸ πρόβλημα· συνήθως ὅμως ἀμέσως ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος ἐννοοῦμεν, ἂν ἡ τοιαύτη ἢ τοιαύτη λύσις τοῦ προβλήματος εἶνε παραδεκτὴ ἢ μή. Ἂν παραδείγματος χάριν ἐζητεῖτο νὰ μοιρασθῶσι 1500 δραχμαὶ εἰς 8 ἀνθρώπους, ἡ λύσις $187\frac{1}{2}$ προφανῶς εἶνε παραδεκτή. Διὰ ταῦτα ἡ ἀριθμητική, παραβλέπουσα τὰς ἀνωμαλίας ταύτας τῶν καθ' ἕκαστα προβλημάτων, πλάσσει γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ πᾶν ζήτημα εἶνε δυνατὸν νὰ λυθῇ, τοὐλάχιστον δι' ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τοῦ 0 ὡς ἀριθμοῦ.

51. Ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἴσων ἀριθμῶν προκύπτει, ὡς γνωστόν, νέος τις ἀριθμός, ὁ ἀριθμὸς 0.

52. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος προστιθέμενος εἰς ἀριθμόν, ἢ ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἀριθμοῦ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν, πολλαπλασιάζων ὅμως πάντα ἀριθμὸν ποιεῖ αὐτὸν 0, τουτ' ἔστιν εἶνε

$$\alpha+0=\alpha,\ \alpha-0=\alpha,\ \text{καὶ}\ \alpha.0=0.\alpha=0.$$

Καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 0 διαιρεθέντος δι' οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ εἶνε 0, ἤτοι $\frac{0}{\alpha}=0$.

Εἰς τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα φθάνομεν ἐφαρμόζοντες καὶ ἐπὶ τοῦ 0 τοὺς γνωστοὺς ὁρισμοὺς τῶν πράξεων καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν.

53. Διὰ τοῦ 0 οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ, τουτ' ἔστιν ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶνε ἀδύνατος· καὶ ὄντως οὐδεὶς ἀριθμὸς τοῦ κλασματικοῦ συστήματος δύναται νὰ εἶνε πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως· διότι πάντες, ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενοι, δίδουσι γινόμενον 0.

54. Οὐδὲ εἶνε δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ τὸ πηλίκον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως ὡς ἀριθμὸς καὶ νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ ἤδη ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν· διότι εἰσαγόμενον καταστρέφει τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων.

Ἔστω τῷ ὄντι λ νέος τις ἀριθμός, ὅστις ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενος νὰ μὴ μηδενίζηται, ἀλλὰ νὰ δίδῃ γινόμενον 1 (τότε ὁ λ εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{1}{0}$)· παραδεχόμενοι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον θὰ εἴχομεν παραδείγματος χάριν $0.3.\lambda=0.\lambda=1$,

ἀλλὰ πάλιν $0.3.\lambda=0.\lambda.3=1.3=3$.

Ὁμοίως $0.0.5.\lambda=0.5.\lambda=0.\lambda=1$,

ἀλλὰ καὶ $0.0.5.\lambda=0.0.\lambda.5=0.\lambda.5=1.5=5$,

ἢ καὶ $0.0.5.\lambda=0.\lambda.5.0=1.5.0=5.0.=0$.

Ὁμοίως εἶνε $\lambda(\alpha+0)=\lambda.\alpha$, ἀλλὰ καὶ $\lambda(\alpha+0)=\lambda.\alpha+\lambda.0=\lambda.\alpha+1$.

Ὥστε ἡ παραδοχὴ τοῦ $\frac{1}{0}$ ὡς ἀριθμοῦ (ἤτοι ἡ παραδοχὴ ἀριθμοῦ μὴ μηδενιζομένου, ὅταν ἐπὶ 0 πολλαπλασιασθῇ) ἀντιβαίνει πρὸς τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος· τουτ' ἔστιν ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶνε ἀδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

55. Διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν κατέστη ἡ διαίρεσις πρᾶξις πάντοτε δυνατὴ καὶ ἐταυτίσθησαν ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ζητήσωμεν, ἂν εἶνε δυνατὸν διὰ τῆς παραδοχῆς νέων τινῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς προσαρτήσεως αὐτῶν εἰς τοὺς ἤδη εὑρεθέντας ν' ἀποτελεσθῇ σύστημά τι ἀριθμῶν γενικώτερον, ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ ἐκτελῆται πάντοτε, *νὰ μὴ ἀλλοιωθῶσι δὲ τὸ παράπαν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος.*

56. Ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι τῶν ἀριθμῶν (ἐὰν ὑποτεθῇ ὑπάρχον) πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ 0—α, τοῦ α ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ τοῦ κλασματικοῦ συστήματος· τοῦτ' ἔστι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τις ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν α ν' ἀποτελῇ μετ' αὐτοῦ 0. (20).

57. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι πρέπει δι' ἕκαστον ἀριθμὸν νὰ παραδεχθῶμεν ἕνα ἀντίθετον· ἤτοι τοιοῦτον, ὥστε οἱ δύο ὁμοῦ ν' ἀποτελῶσι 0. Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ ἐξουδετεροῦσιν ἢ καταστρέφουσιν ἀλλήλους, ὥστε προστιθέμενοι ἀμφότεροι εἰς ἀριθμὸν οὐδόλως ἀλλοιοῦσιν αὐτόν.

58. Ἡ παραδοχὴ τοιούτων ἀριθμῶν δικαιολογεῖται καὶ ἐκ τῶν πραγμάτων· διότι ὑπάρχουσι πολλὰ ποσὰ ἀντίθεσιν ἐπιδεχόμενα, οἷον κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, καὶ τὰ τοιαῦτα, (περὶ τῶν ὁποίων παρακατιόντες θὰ διαλάβωμεν,) εὔλογον δ' εἶνε νὰ παριστῶνται τ' ἀντίθετα ποσὰ δι' ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. χ. ἔμπορός τις κερδήσῃ 1 δραχμὴν καὶ ἔπειτα χάσῃ 1 δραχμήν, φανερὸν εἶνε, ὅτι ἡ χρηματική του κατάστασις δὲν ἠλλοιώθη ποσῶς· ἤτοι μία δραχμὴ κέρδους καὶ μία δραχμὴ ζημίας ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας καὶ διὰ τοῦτο δύνανται νὰ παριστῶνται δι' ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

59. Διὰ τοῦτο παραδεχόμεθα ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος ἕνα ἀντίθετον, ὅντινα παριστῶμεν, πρὸς τὸ παρόν, διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου φέροντος τόνον. Οὕτω τῶν 8, 3, $\frac{1}{2}$, οἱ ἀντίθετοι εἶνε 8', 3', $\frac{1'}{2}$. Καλοῦμεν δὲ τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς *ἀρνητικούς*, τοὺς δὲ προϋπάρχοντας *θετικούς*.

60. Ὅπως οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν μονάδων 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., οὕτω καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν ἀντιθέτων μονάδων 1', $\frac{1'}{2}$, $\frac{1'}{3}$, ..., αἵτινες καλοῦνται *ἀρνητικαὶ μονάδες*.

Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

Πρόσθεσις.

51. Ἐὰν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ εἶνε ὁμοειδεῖς, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν δὲν διαφέρει τῆς προσθέσεως ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι.

Οὕτως εἶνε $5+6=11$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$, $\frac{3}{8}+\frac{4}{5}=\frac{47}{40}$.

Ὁμοίως εἶνε $5'+6'=11'$, $\frac{1'}{3}+\frac{1'}{7}=\frac{10'}{21}$, $\frac{3'}{8}+\frac{4'}{5}=\frac{47'}{40}$.

Ἐὰν δὲ εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι· δύο δὲ ἀντίθετοι μονάδες συναποτελοῦσιν (ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν ἕπεται) τὸ 0.

Διότι εἶνε $3+5'=3+3'+2'=2'$.

$$\frac{3}{7}+\frac{4'}{5}=\frac{15}{35}+\frac{28'}{35}=\frac{15}{35}+\frac{15'}{35}+\frac{13'}{35}=\frac{13'}{35}.$$

Ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων διατηρεῖται καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ. Διότι ἔστωσαν τυχόντες προσθετέοι οἱ $\frac{1}{2}$, $\frac{1'}{3}$, $\frac{5'}{8}$, $\frac{3}{4}$· ἐὰν ἀντ' αὐτῶν λάβωμεν τοὺς ἴσους αὐτῶν (κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῶν κλασμάτων) $\frac{12}{24}$, $\frac{8'}{24}$, $\frac{15'}{24}$, $\frac{18}{24}$, τὸ ἄθροισμα θὰ ἀποτελῆται, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως (11), ἐκ 30 θετικῶν μονάδων (εἰκοστῶν τετάρτων) καὶ ἐξ 23 ἀντιθέτων αὐταῖς. Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γίνῃ ἡ πρόσθεσις, αἱ 23 ἀρνητικαὶ μονάδες θὰ ἐξουδετερώσωσιν 23 θετικὰς καὶ θὰ μείνωσιν ὡς ἄθροισμα 7 θετικαί· τὸ ἄθροισμα δηλαδὴ θὰ εἶνε $\frac{7}{24}$.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν δύναταί τις νὰ προσθέσῃ χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικούς, μετὰ δὲ ταῦτα ν' ἀποτελέσῃ ἐκ τῶν δύο ἀθροισμάτων ἕνα μόνον ἀριθμόν, ἢ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ 0.

Παραδείγματα.

$$5+8'+2+9'=7+17'=10'.$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2'}{5}+1+\frac{1'}{8}=\frac{3}{2}+\frac{21'}{40}=\frac{39}{40}.$$

$$1+\frac{1}{2}+2'+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2+2'=0.$$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων, εἴτε τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἴτε καὶ μή, πάντοτε ἀνάγεται εἰς πλῆθός τι μονάδων τοῦ ἑνὸς εἴδους, ἢ εἰς τὸ 0, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν γενικώτερον ὡς *ἄθροισμα μονάδων*, ἀδιαφοροῦντες, ἂν αἱ μονάδες εἶνε τοῦ αὐτοῦ εἴδους ἢ οὔ.

Ἀφαίρεσις.

62. Ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται νῦν εἰς τὴν πρόσθεσιν· διότι ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ α, καὶ ἀντίθετος αὐτοῦ ὁ α'· τότε ἡ διαφορὰ β—α ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα β+α'· διότι, ἂν εἰς τοῦτο προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος α, προκύπτει β+α'+α, ἤτοι ὁ μειωτέος β.

Ἡ ἀφαίρεσις ἄρα ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου σημαίνει πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ.

Παραδείγματα.

$$8-3'=8+3=11.$$
$$7'-13=7'+13'=20'$$
$$12-28=12+28'=16'$$
$$15'-7'=15'+7=8'$$
$$2'-15'=2'+15=13.$$

Πολλαπλασιασμός.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς ὁρίζεται καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ, ὡς καὶ ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι· ἤτοι α. 3 σημαίνει α+α+α, α. $\frac{1}{5}$ σημαίνει τὸ πέμπτον μέρος τοῦ α, ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{5}$, α.$\frac{2}{3}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}$, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶνε ὁ α.

63. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ οἱουδήποτε ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα 1' πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς *τροπὴ τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἀντίθετον* (ἵνα διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Ἔστω α τυχὼν ἀριθμὸς καὶ α' ὁ ἀντίθετος αὐτοῦ· ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα 1+1' ἰσοῦται τῷ 0, καὶ τὸ γινόμενον α. (1+1') ἰσοῦται τῷ 0· ἀλλὰ τὸ αὐτὸ γινόμενον, κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι (α. 1)+(α. 1')· ἐπομένως οἱ δύο ἀριθμοὶ α. 1 καὶ α. 1' εἶνε ἀντίθετοι· ἀλλ' ὁ πρῶτος εἶνε (46) ἴσος τῷ α, ἀντίθετον δ' αὐτοῦ παρεδέχθημεν ἕνα μόνον· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶνε α. 1'=α'.

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς.

1ον) *Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος 1' ἐφ' ἑαυτὴν ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι 1, ἤτοι 1'. 1'=1.*

2ον) *Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος 1 ἐπὶ τὸν ἀντίθετον θετικὸν ἀριθμόν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ $\frac{3'}{8}$ ἰσοῦται τῷ $\frac{3}{8}$. 1'.

64. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐκτελεῖται, ὡς ἂν ἦσαν ἀμφότεροι θετικοὶ* (ἤτοι ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου συστήματος), *καὶ τὸ γινόμενον εἶνε θετικὸν μέν, ἂν οἱ παράγοντες εἶνε ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἑτεροειδεῖς.*

Καὶ ὄντως, ἐπειδὴ εἶνε $5' = 5.1'$ καὶ $8' = 8.1'$, ἕπεται (κατὰ τὴν πρώτην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ)

$$5'.8 = 5.8.1' = 40.1' = 40'$$

$$\text{καὶ } 5'.8' = 5.8.1'.1' = 40.1 = 40\cdot$$

ὥστε, πλὴν τοῦ εἴδους τοῦ γινομένου, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐν τῷ συστήματι τούτῳ κατ' οὐδὲν ἄλλο διαφέρει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐν τῷ προηγουμένῳ συστήματι.

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων εἶνε θετικὸν μέν, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιος (διότι ἀνὰ δύο πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι θετικὸν γινόμενον), ἀρνητικὸν δέ, ἂν περιττός.

65. Τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ γινόμενα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶνε ἴσα· διότι θετικῶς λαμβανόμενα εἶνε ἴσα· εἶνε δὲ καὶ ὁμοειδῆ· ὥστε κατ' οὐδὲν διαφέρουσι.

* ΣΗΜ. Ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν τοῦ συστήματος τούτου ἐλήφθησαν μὲν ὑπ' ὄψιν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλ' εἶνε νῦν ἀνάγκη ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ὡς ὡρίσθη ὁ πολλαπλασιασμός, πᾶσαι αἱ ῥηθεῖσαι ἰδιότητες διατηροῦνται ἀληθεῖς ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος. Καὶ ἡ μὲν ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων εἶνε προφανής· διότι (κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 64) πλὴν τοῦ εἴδους τοῦ γινομένου, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος, ἡ δὲ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

1) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ ἐπὶ ἀκέραιον καὶ θετικὴν ἀριθμόν, οἷον τὸν 3, εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$(\alpha+\beta).3 = (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = (\alpha+\alpha+\alpha)+(\beta+\beta+\beta) = \alpha.3+\beta.3.$$

2) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ ἐπὶ θετικὴν κλασματικὴν μονάδα, οἷον $\frac{1}{5}$, εἶνε (ἐδ. 48) τὸ πέμπτον μέρος τοῦ $\alpha+\beta$· ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ $\alpha+\beta$ εἶνε $\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{5}$· διότι τοῦτο πεντάκις ληφθέν, ἤτοι ἐπὶ 5 πολλαπλασιασθέν, γίνεται $\alpha+\beta$· ἄρα

$$(\alpha+\beta).\frac{1}{5} = \frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{5}\cdot \text{ ἤτοι } = \alpha.\frac{1}{5}+\beta.\frac{1}{5}.$$

3) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ ἐπὶ κλασματικὸν καὶ θετικὸν ἀριθμόν, ὡς τὸν $\frac{2}{3}$, εἶνε (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδ. 48)

$$(\alpha+\beta).\frac{2}{3} = \frac{\alpha+\beta)}{3}+\frac{(\alpha+\beta)}{3} = \left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}\right)+\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}\right) = \alpha.\frac{2}{3}+\beta.\frac{2}{3}.$$

ὥστε διὰ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν γ θὰ εἶνε $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha.\gamma+\beta.\gamma.$

Καὶ διὰ πάντα ἀρνητικὸν ἀριθμὸν γ' θὰ εἶνε $(\alpha+\beta)\gamma' = \alpha.\gamma'+\beta.\gamma'$, διότι οἱ ἀντίθετοι αὐτῶν ἀριθμοὶ $(\alpha+\beta)\gamma$ καὶ $\alpha\gamma+\beta\gamma$ εἶνε ἴσοι.

Διαίρεσις

66. Ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν γίνεται, ὡς ἂν ἦσαν ἀμφότεροι θετικοί, καὶ τὸ πηλίκον εἶνε θετικὸν μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἑτεροειδεῖς.

π. χ. 8′ διὰ 4 δίδει 2′, 8 διὰ 4′ δίδει 2′, καὶ 8′ διὰ 4′ δίδει 2, διότι ἕκαστον τούτων πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Συμπέρασμα.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων γίνεται φανερόν, ὅτι ἐν τῷ συστήματι τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶνε πάντοτε δυναταὶ καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις (πλὴν μιᾶς ἐξαιρέσεως), ἀνάγεται δὲ ἡ μὲν ἀφαίρεσις εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐν τούτῳ τῷ συστήματι διατηροῦνται, ὡς ἀπεδείξαμεν, ἀληθεῖς αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων, συνάγεται, ὅτι διατηροῦνται καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῶν πηγάζουσαι γενικαὶ ἰδιότητες τῶν αὐτῶν πράξεων.

Γραφὴ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

67. Τοὺς θετικοὺς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς διακρίνομεν συνήθως προτάσσοντες αὐτῶν τὰ σημεῖα + (διὰ τοὺς θετικοὺς) καὶ — (διὰ τοὺς ἀρνητικούς), ὡς +5, —7, —8, —10, κτλ. καὶ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν παριστῶμεν *κατὰ συνθήκην* γράφοντες αὐτοὺς τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ·

οὕτω τὸ ἄθροισμα	5+7′+9′+8	γράφεται	+5—7—9+8,
τὸ	5′+7′	»	—5—7,
τὸ	3′+9	»	—3+9,
τὸ	7+1	»	+7+1·

γίνεται δὲ τοῦτο, διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν σεσημειωμέναι αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος ἀπαιτούμεναι πράξεις.

68. Κατὰ ταῦτα, τὰ σημεῖα + καὶ — ἔχουσι διπλῆν χρῆσιν· δηλοῦσι δηλαδὴ καὶ τὰς πράξεις (τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως) καὶ τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ τοῦτο οὐδεμίαν σύγχυσιν δύναται νὰ προξενήσῃ· διότι ἐπὶ μεμονωμένων μὲν ἀριθμῶν, ὡς +5, —7, —9, προφανῶς δηλοῦσι τὰ σημεῖα τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν· ἐὰν δὲ ἀριθμοί τινες συνδέωνται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν σημείων τούτων, ὡς 5+7—9—10+4, εἴτε ταῦτα ἐκληφθῶσιν ὡς σημεῖα τῶν πράξεων, εἴτε ὡς δηλωτικὰ τοῦ εἴδους τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ· διότι ἐν τῷ ληφθέντι παραδείγματι, ἡ ἀφαίρεσις τῶν 9 καὶ 10 δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς προσθέσεως τῶν 9′ καὶ 10′, ἤτοι τῶν —9 καὶ —10.

Παράστασις τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

69. Ἀφοῦ ἀπεδείξαμεν, ὅτι ἐκ τῆς παραδοχῆς δύο εἰδῶν ἀριθμῶν ἀντιθέτων πρὸς ἀλλήλους οὐδαμῶς βλάπτονται αἱ γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων, ἀλλὰ μάλιστα ἀποτελεῖται γενικώτερόν τι καὶ τελειότερον σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις ἐκτελοῦνται, μένει νῦν νὰ ἴδωμεν, πρὸς τί ἄλλο δύνανται οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι νὰ χρησιμεύσωσι. Φανερὸν εἶνε, ὅτι, ἂν παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ποσά τινα, τὰ ποσὰ ταῦτα θὰ ἐπιδέχωνται τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἐνυπάρχουσαν ἀντίθεσιν, ἤτοι θὰ ἔχωσι δύο ἀντιθέτους φοράς· τοιαῦτα δὲ ποσὰ προδήλως εἶνε, τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία, ἡ περιουσία καὶ τὸ χρέος ἀνθρώπου τινός, οἱ ἐπί τινος γραμμῆς δρόμοι πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ χρόνος ὁ παρελθὼν καὶ ὁ μέλλων, καὶ τὰ ὅμοια. Ἐν πᾶσι τούτοις καὶ τοῖς ὁμοίοις ποσοῖς δύνανται *κατὰ συνθήκην* νὰ παριστῶνται αἱ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν ἔχουσαι καταστάσεις τοῦ ποσοῦ διὰ τῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς εἴδους, αἱ δὲ τὴν ἐναντίαν ἔχουσαι, διὰ τῶν ἀντιθέτων. Ἐὰν λ. χ. παραστήσωμεν διὰ τοῦ $+1$ μίαν δραχμὴν κέρδους, ἡ ζημία μιᾶς δραχμῆς δύναται καὶ πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ -1· διότι μία δραχμὴ κέρδους καὶ μία δραχμὴ ζημίας συναποτελοῦσι μηδέν, ἤτοι οὐδόλως ἀλλοιοῦσι τὴν χρηματικὴν κατάστασιν τοῦ ταῦτα παθόντος, ὅπως καὶ οἱ ἀριθμοὶ $+1$ καὶ -1 συναποτελοῦσι 0, καὶ οὐδόλως ἀλλοιοῦσι ἄλλον ἀριθμόν, ἐὰν ἀμφότεροι προστεθῶσιν εἰς αὐτόν. Ὁμοίως, ἐάν τις ἀπό τινος σημείου Ο τῆς γραμμῆς ΑΒ διατρέξῃ δρόμον ἑνὸς πήχεως πρὸς τὰ δεξιά, ἔπειτα δρόμον ἑνὸς πήχεως πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ πρῶτος δρόμος θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ $+1$, ὁ δὲ δεύτερος, ὁ κατ' ἀντίθετον φορὰν διανυσθείς, διὰ τοῦ -1· διότι ὁ ἀμφοτέρους διανύσας εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ μὴ ἐκινήθη διόλου ἐκ τῆς θέσεώς του. Καὶ ἂν πολλὰ κέρδη καὶ ζημίαι παριστῶνται δι' ἀριθμῶν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν θὰ παριστᾷ τὸ τελικὸν κέρδος ἢ τὴν τελικὴν ζημίαν, καθ' ὅσον εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ἐὰν π. χ. πρῶτον μὲν ἐκέρδησέ τις 5 δραχμάς, εἶτα δὲ ἐζημιώθη 3, τὸ ὁλικὸν κέρδος αὐτοῦ εἶνε ἴσον τῷ ἀθροίσματι $5+3'$, ἤτοι 2· ἐὰν δὲ πρῶτον μὲν ἐκέρδησεν 8 δραχμάς, εἶτα δὲ ἐζημιώθη 10, ἡ ὁλικὴ ζημία αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $8+10'$ ἤτοι $2'$· καὶ ἄν τις ἐκέρδησε 10 δραχμάς, εἶτα ἐζημιώθη 8 (ὅτε ἔχει κέρδος $10+8'$), εἶτα πάλιν ἐκέρδησε 4, τὸ ὁλικὸν κέρδος αὐτοῦ εἶνε $(10+8')+4$, ἤτοι $10+8'+4$· ὁμοίως καὶ ἐπὶ περισσοτέρων.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι, ἄν τις βαδίζῃ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ ὁτὲ μὲν πρὸς τὰ δεξιὰ ὁτὲ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερά, καὶ ἕκαστον διάστημα πρὸς τὰ δεξιὰ δια-

νυσθὲν παρίσταται διὰ θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἕκαστον δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διανυσθὲν δι' ἀρνητικοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων θὰ παραστήσῃ τὴν τελικὴν ἀπόστασιν τοῦ κινουμένου ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, ἐξ οὗ ὡρμήθη, καὶ τὸ εἶδος τοῦ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτοντος ἀριθμοῦ θὰ δεικνύῃ, ἂν ἡ τελικὴ θέσις τοῦ κινηθέντος εἶνε πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο.

Ἐκτὸς τούτου δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τοὺς θετικοὺς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς πρὸς ὁρισμὸν τῆς θέσεως πράγματός τινος ἐν σειρᾷ πολλῶν ἢ καὶ ἀπείρων πραγμάτων· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παραστήσωμεν τὸ τυχὸν τῆς σειρᾶς μέλος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 0 καὶ τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν +1, +2, +3, κτλ. καὶ τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ αὐτοῦ μέλους εὑρισκόμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν —1, —2, —3, —4, —5, κτλ.

Εἶνε ἀληθές, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ ποσὰ μὴ ἐπιδεχόμενα τοιαύτην ἀντίθεσιν καταστάσεων (π. χ. ἡ ἡλικία ἀνθρώπου τινός, αἱ ὧραι, καθ' ἃς θὰ ἐκτελεσθῇ ἔργον τι, κτλ.), ἀλλὰ τοῦτο δεν ἐμποδίζει τὴν παραδοχὴν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὡς δὲν ἠμπόδισε τὴν παραδοχὴν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ ὕπαρξις ποσῶν μὴ ἐπιδεχομένων τὴν διαίρεσιν· διότι, (ὡς παρετηρήσαμεν καὶ ἐν ἄλλῳ τόπῳ), εἶνε ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ ἀριθμητικὴ γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, δυνάμενον νὰ παραστήσῃ πάντα τὰ ποσὰ καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ πᾶν ἀριθμητικὸν ζήτημα νὰ λύηται τοὐλάχιστον δι' ἀριθμῶν.

Ἀνακεφαλαίωσις.

Ἀνακεφαλαιοῦντες πάντα τὰ προηγούμενα συνάγομεν, ὅτι

1) Ἐὰν θέλωμεν νὰ καταστήσωμεν δυνατὰς καὶ τὰς τέσσαρας πράξεις, ἀνάγκη νὰ παραδεχθῶμεν δύο ἀρχικὰς μονάδας ἀντιθέτους πρὸς ἀλλήλας (1 καὶ 1'), ἔτι δὲ καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος δευτερευούσας μονάδας, αἵτινες εἶνε μέρη τέλεια τῶν δύο πρώτων. Ἐκ τούτων δὲ τῶν μονάδων ἀποτελεῖται πᾶς ἀριθμός.

2) Πᾶσαι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων (τουτέστιν αἱ ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀληθεύουσαι) πηγάζουσιν ἐκ δύο ἀρχικῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν ἔν τε τῇ προσθέσει καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος. Ἐπὶ τῶν δύο τούτων ἰδιοτήτων στηρίζεται, πᾶσα ἀριθμητικὴ πρᾶξις· τὰς ἰδιότητας ταύτας εὑρίσκομεν μὲν ὑπαρχούσας ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀριθμοῖς, τοὺς ὁποίους πρώτους πάντων γνωρίζομεν, διατηροῦμεν δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ἔπειτα σχηματίζομεν, ἀποκαθιστῶντες αὐτὰς γενικὰς ἀρχὰς ἢ νόμους τῶν πράξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

70. Γινόμενον, οὗτινος πάντες οἱ παράγοντες εἶνε ἴσοι, λέγεται *δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· καὶ ἂν μὲν εἶνε δύο οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον*, ἂν δὲ τρεῖς, *τρίτη δύναμις*, ἢ *κύβος*· καὶ καθεξῆς.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον $3\times3\times3\times3$ λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ 3, τὸ δὲ γινόμενον 15×15 λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ 15.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως γράφοντες μόνον ἕνα παράγοντα, δεξιᾷ δὲ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα τὸν ἀκέραιον, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων· οἷον

12^4 σημαίνει $12\times12\times12\times12$,

5^3 » $5\times5\times5$.

Ἐν τῇ τοιαύτῃ γραφῇ τῶν δυνάμεων ὁ μὲν παράγων λέγεται *βάσις* τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων ἐκφράζων ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς λέγεται *ἐκθέτης* τῆς δυνάμεως.

71. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶνε γινόμενα, ἕπεται, ὅτι αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶνε δὲ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων αἱ ἑξῆς.

1) *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθέτην δὲ ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.*

Κατὰ ταῦτα εἶνε $\alpha^5.\alpha^8=\alpha^{13}$.

καὶ γενικῶς $\alpha^\mu.\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$.

τοῦτο εἶνε ἄμεσον ἀκολούθημα τῆς προτάσεως (30), καθ' ἣν πολλαπλασιάζεται γινόμενον ἐπὶ ἄλλο γινόμενον.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἀκολουθεῖ, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐκθέτην ἔχουσα τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐκθετῶν· ἤτοι

$$\alpha^\mu.\alpha^\nu\ldots.\alpha^\rho=\alpha^{\mu+\nu+\ldots+\rho}$$

παραδείγματος χάριν εἶνε $2^3.2^5=2^8$

$$10^2.10^6.10^8=10^{16}.\quad \text{κτλ.}$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ, ὅτι αἱ πολλαπλασιαζόμεναι δυνάμεις εἶνε ἴσαι, τουτέστιν, ὅτι εἶνε $\mu=\nu=..=\rho$, καὶ παρασταθῇ τὸ πλῆθος αὐτῶν, διὰ τοῦ π, ἕπεται ἐκ τῆς αὐτῆς προτάσεως

$$\alpha^\mu.\alpha^\mu.\alpha^\mu..\alpha^\mu=\alpha^{\mu+\mu+\mu\cdots+\mu}=\alpha^{\mu.\pi}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\alpha^{\mu}.\alpha^{\mu}.\alpha^{\mu}\ldots\alpha^{\mu}=(\alpha^{\mu})^{\pi}$, συνάγεται
ἡ ἰδιότης $(\alpha^{\mu})^{\pi}=\alpha^{\mu.\pi}$
παραδείγματος χάριν $(3^{2})^{3}=3^{6}$.
ἤτοι, ἵνα ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.

2) *Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν*
ἤτοι $(\alpha.\beta)^{\mu}=\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}$
π. χ. $2^{4}.5^{4}=10^{4}=10000$.

3) *Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν*
ἤτοι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$, οἷον $\frac{32^{5}}{16^{5}}=2^{5}$.

Ἡ εὕρεσις τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε εὐκολωτάτη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν αἱ μὲν περιττὸν ἐκθέτην ἔχουσαι δυνάμεις εἶνε ἀρνητικαί, αἱ δὲ ἄρτιον θετικαί.
Π. χ. εἶνε $(-5)^{2}=(-5).(-5)=+25$
ἀλλὰ $(-5)^{3}=(-5).(-5).(-5)=+25(-5)=-125$.

Ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων α^{1} καὶ α^{0}.

72. Κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν ὁ ἐκθέτης πάσης δυνάμεως εἶνε ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ οὐχὶ μικρότερος τοῦ 2. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ ἐπὶ ἄλλων ἐκθετῶν, δέον νὰ διατηρήσωμεν ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων τὰς αὐτὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας (ὡς διετηρήσαμεν καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων)· διότι τοῦτο καὶ ἁπλουστέραν καθιστᾷ καὶ γενικωτέραν τὴν ἀριθμητικήν· ἀλλὰ καὶ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν πάσης δυνάμεως δίδει, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ δειχθῇ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν, πῶς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὰς δυνάμεις α^{1} καὶ α^{0}, ὥστε νὰ διατηρηθῇ καὶ δι᾽ αὐτὰς ἡ πρώτη ἰδιότης τῶν δυνάμεων, ἥτις ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$,
παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὑποθέσωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἀληθῆ καὶ διὰ $\mu=1$, εὑρίσκομεν $\alpha^{1}\alpha^{\nu}=\alpha^{\nu+1}$,
ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι α^{1} εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha^{\nu+1}$. ἤτοι τοῦ $\alpha^{\nu}.\alpha$, διὰ α^{ν}, καὶ ἑπομένως (ἐὰν α διαφέρῃ τοῦ 0) ἰσοῦται τῷ α· ὥστε,

ἂν θέλωμεν νὰ διατηρηθῇ ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν δυνάμεων, δέον νὰ ὁρίσωμεν ὡς πρώτην δύναμιν παντὸς ἀριθμοῦ (πλὴν τοῦ 0) *αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν,* ἤτοι $\alpha^1=\alpha$.

Ἐὰν ἐν τῇ αὐτῇ ἰσότητι τεθῇ $\mu=0$, προκύπτει $\alpha^0.\alpha^\nu=\alpha^\nu$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι α^0 εἶνε πηλίκον τοῦ α^ν διαιρεθέντος διὰ α^ν, ἤτοι εἶνε ἴσον τῇ μονάδι 1 (ἐὰν μὴ εἶνε $\alpha=0$), ὥστε *α^0 οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α* (πλὴν τοῦ 0) *δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἴσον τῇ μονάδι 1.*

Διαιρέσεις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

73. Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐκθετῶν· τῆς διαφορᾶς δὲ ταύτης μειωτέος μὲν εἶνε ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου, ἀφαιρετέος δὲ ὁ τοῦ διαιρέτου.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ α^μ διὰ α^ν, εἶνε δὲ $\mu>\nu$· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε

$$\alpha^{\mu-\nu}$$

Διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τῶν δυνάμεων δίδει $\alpha^{\mu-\nu}.\alpha^\nu$, ἢ α^μ, ἤτοι τὸν διαιρετέον· ὥστε εἶνε

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}.$$

Ὑπετέθη $\mu>\nu$· ἀληθεύει δὲ ἡ ἰσότης αὕτη, καὶ ὅταν εἶνε $\mu=\nu$· διότι τότε γίνεται

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu}=\alpha^0=1.$$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.

Ἄλγεβρα εἶνε *γενικὴ ἀριθμητική*· ἀσχολεῖται δὲ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἐπ' αὐτῶν ζητήματα.

...ἐν ἀριθμητικῇ, ἀσχολουμένη περὶ τοὺς ἀριθμούς, ἀποβλέπει κυρίως εὕρεσιν τῶν τρόπων, καθ' οὓς ἐκτελοῦνται αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις· ...γεβρα ἐρευνᾷ τὰς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ὑπαρχούσας γενικὰς σχέσεις· ...ι τὰς σχέσεις, αἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων ἀρι... ...οιοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι· ὅτι δὲ τοιαῦται σχέσεις ...σιν, ἐμάθομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις.

...τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητήματα λύει ἡ ἄλγεβρα κατὰ γενικήν τινα ..., ἥτις στηρίζεται ἐπὶ τῶν εἰρημένων γενικῶν σχέσεων τῶν ἀριθμῶν· αὐτὰ καὶ γενικώτερον· διότι ἐπὶ ἑκάστου ζητήματος εὑρίσκει τὰς ... αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ...τε καὶ ἂν εἶνε οὗτοι, ἵνα ἐξ αὐτῶν εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.

...τῇ ἀλγέβρᾳ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν σχέ...ς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος σημειοῦνται διὰ τῶν αὐτῶν συμβόλων, ...αὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ.

... οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφα... Ἕκαστον δὲ γράμμα παριστᾷ ἐν ἑκάστῳ ζητήματι ἕνα καὶ τὸν αὐ...θμόν.

...μοὺς διαφέροντας ἀπ' ἀλλήλων παριστῶμεν διὰ διαφόρων γραμμά... διὰ τοῦ αὐτοῦ μὲν γράμματος (ἐὰν ἔχωσί τι κοινόν), φέροντος ὅμως πρὸς διάκρισιν τῶν ἀριθμῶν ἀπ' ἀλλήλων, ὡς α', α'', α''', κτλ.

ΣΗΜ. Ὅτι διὰ τῶν συμβόλων τούτων αἱ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν γενικαὶ σχέσεις γράφονται συντομώτερον ἢ διὰ τῆς κοινῆς γραφῆς εἶνε φανερόν· ἡ συντομία δ' αὕτη, ὅταν πολλαχῶς αἱ πράξεις συνδυάζωνται, εἶνε ὠφελιμωτάτη· διότι δι' αὐτῆς λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τοῦ συνδυασμοῦ τῶν πράξεων καὶ εὐκολώτερον μεταβαίνομεν ἀπὸ μιᾶς σχέσεως εἰς ἄλλην, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἴδωμεν.

Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις καὶ διάφορα εἴδη αὐτῶν.

Ὁρισμοί.

74. *Ἀλγεβρικὴ παράστασις* ἢ *ἀλγεβρικὸς τύπος* λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων σημείωσις πράξεων ἐπὶ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν ἢ καὶ μόνον ἐπὶ γραμμάτων· οἷον $3\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2$ εἶνε ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ τύπος.

Ἐπειδὴ μέχρι τοῦδε μόνον τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις πράξεις ἐγνωρίσαμεν, διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν πρὸς τὸ παρὸν ταύτας μόνον τὰς πράξεις σεσημειωμένας ἐν ταῖς ἀλγεβρικαῖς παραστάσεσιν.

75. Ὅταν παράστασις, ὡς εἷς ἀριθμὸς θεωρουμένη, συνδυάζηται δι' οἱασδήποτε πράξεως πρὸς ἄλλην παράστασιν ἢ πρὸς ἁπλοῦν γράμμα ἢ καὶ πρὸς ἀριθμόν, ἐγκλείεται εἰς παρένθεσιν. Οὕτως ἡ διαφορὰ τῆς παραστάσεως $\alpha - \beta$ ἀπὸ τοῦ γ παρίσταται διὰ τοῦ $\gamma - (\alpha - \beta)$· τὸ δὲ γινόμενον τῆς παραστάσεως $\alpha - \beta$ ἐπὶ γ παρίσταται διὰ τοῦ $(\alpha - \beta)\gamma$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἡ σημασία τῶν ἑπομένων παραστάσεων

$$(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta), \qquad 3.(\alpha\beta-\gamma\delta)\alpha \qquad 5(\alpha+\beta)$$
$$[\alpha-(\beta-\gamma)]\,\delta \qquad [\alpha-(\beta-\gamma)]\,(\delta+\zeta).$$

76. Παράστασις, ἐν ᾗ μήτε πρόσθεσις μήτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σεσημειωμένη, λέγεται *μονώνυμον*· οἷον αἱ παραστάσεις

$$\frac{3\alpha}{\beta}, \qquad 5\alpha\beta^2, \qquad 8'\alpha\beta, \qquad \frac{1'}{2}\alpha \qquad \text{εἶνε μονώνυμα.}$$

Τὸ μονώνυμον εἶνε *ἀκέραιον*, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων περιέχῃ· ἐὰν δὲ καὶ διαίρεσιν περιέχῃ, λέγεται *κλασματικόν*.

Ἐὰν ἐν τῷ μονωνύμῳ ὑπάρχῃ τις ἀριθμητικὸς παράγων, γράφεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται *συντελεστὴς* τοῦ μονωνύμου· οὕτω τῶν μονωνύμων

$$5\alpha \qquad 8\frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{3}{7}\alpha^2 \qquad 4'\beta^2 \qquad \text{συντελεσταὶ εἶνε}$$

οἱ ἀριθμοὶ $5, \quad 8, \quad \frac{3}{7}, \quad 4'.$

Ὅταν τὸ μονώνυμον δὲν ἔχῃ συντελεστήν, ἐννοοῦμεν συντελεστὴν αὐτοῦ τὴν θετικὴν μονάδα 1· οἷον τοῦ αβ συντελεστὴς εἶνε ἡ μονάς· διότι δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς 1.αβ. Ὡσαύτως ἀντὶ α δυνάμεθα νὰ γράψωμε, 1.α· ὥστε καὶ τὰ ἁπλᾶ γράμματα ὑπάγονται εἰς τὰς παραστάσεις.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶνε ἢ θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἕπεται, ὅτι, ὅταν τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν (68) σημαίνηται διὰ τῶν σημείων + καὶ —, τὰ μὲν θετικὸν συντελεστὴν ἔχοντα μονώνυμα θὰ ἔχωσι πρὸ αὐτῶν τὸ +, τὰ δὲ ἀρνητικόν, τὸ —. Οὕτω

$$+\alpha \qquad +3\alpha\beta, \qquad -5\gamma^2 \qquad -8\alpha^2\beta \qquad -\alpha$$

εἶνε $(+1)\alpha, \quad (+3).\alpha\beta, \quad (-5).\gamma^2, \quad (-8).\alpha^2\beta, \quad (-1)\alpha,$

ὥστε τὸ πρὸ τοῦ μονωνύμου γραφόμενον σημεῖον + ἢ — εἶνε τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ καὶ δεικνύει τὸ εἶδος τοῦ συντελεστοῦ.

Οἱ θετικοὶ συντελεσταὶ γράφονται συνήθως ἄνευ σημείου.

77. *Πολυώνυμον* λέγεται τὸ ἄθροισμα μονωνύμων· γράφεται δὲ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονωνύμων, ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν· ἤτοι γράφονται τὰ μονώνυμα ἓν μετ' ἄλλο καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του· οἷον αἱ παραστάσεις

$$3\alpha^2-\beta^2+\alpha\gamma, \qquad 8\alpha^2-2\alpha\beta+4\gamma^2-6\delta\gamma$$

εἶνε πολυώνυμα· καὶ τὸ μὲν πρῶτον εἶνε ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $+3\alpha^2, -\beta^2, +\alpha\gamma$, τὸ δὲ δεύτερον εἶνε ἄθροισμα τῶν ἑξῆς

$$+8\alpha^2, -2\alpha\beta, +4\gamma^2, -6\delta\gamma.$$

Ὅροι τοῦ πολυωνύμου λέγονται τὰ μονώνυμα, τῶν ὁποίων εἶνε ἄθροισμα τὸ πολυώνυμον. Ἐὰν οἱ ὅροι εἶνε δύο, τὸ πολυώνυμον λέγεται *διώνυμον*, ἐὰν δὲ τρεῖς, *τριώνυμον*.

Οἱ τὸ + ἔχοντες ὅροι λέγονται θετικοί, οἱ δὲ τὸ — ἀρνητικοί.

Τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου, ἐὰν εἶνε τὸ +, παραλείπεται συνήθως.

Τὸ πολυώνυμον εἶνε *ἀκέραιον*, ἐὰν πάντα τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, εἶνε ἀκέραια.

Ὅτι τὰ σημεῖα + καὶ —, ἅτινα ἔχουσι πρὸ αὐτῶν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου, δύνανται νὰ ἐκληφθῶσι καὶ ὡς σημεῖα τῶν πράξεων (προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως), χωρὶς ἐκ τούτου νὰ προκύψῃ σύγχυσις, ἀποδεικνύεται ὡς καὶ ἐν τῷ ἐδ. 68· διότι π. χ. εἰς τὸ πολυώνυμον $2\alpha^2-\beta^2+\alpha\gamma$ δυνάμεθα, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β^2, νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ ἀριθμόν, ἤτοι τὸ $-\beta^2$.

Βαθμὸς τῶν ἀκεραίων παραστάσεων.

78. *Βαθμὸς* ἀκεραίου μονωνύμου πρός τι γράμμα λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου ἐν τῷ μονωνύμῳ· οἷον τὸ μονώνυμον $8\alpha^2\beta^3\gamma\delta^4$ εἶνε πρὸς τὸ α δευτέρου βαθμοῦ, πρὸς τὸ β τρίτου καὶ πρὸς τὸ δ τετάρτου.

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχει τὴν μονάδα 1 (72)· ὥστε τὸ αὐτὸ μονώνυμον εἶνε πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γ.

Πᾶν μονώνυμον εἶνε βαθμοῦ 0 πρὸς πᾶν γράμμα μὴ ἐν αὐτῷ περιεχόμενον· διότι δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἐν τῷ μονωνύμῳ ὡς παράγων ἡ 0 δύναμις τοῦ γράμματος, ἥτις ἰσοῦται τῇ μονάδι 1 (72).

Πρὸς πολλὰ δὲ γράμματα βαθμὸς μονωνύμου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐν τῷ μονωνύμῳ·

οἷον τὸ μονώνυμον $5\alpha^2\beta\gamma^2\delta^3$

εἶνε πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β τοῦ τρίτου βαθμοῦ· πρὸς δὲ τὰ α, β, γ, τοῦ πέμπτου· πρὸς δὲ τὰ α, β, γ, δ τοῦ ὀγδόου, κτλ.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρός τι γράμμα λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα· οἷον τὸ πολυώνυμον

$$\chi^5+4\alpha\chi^4-3\alpha^2\chi^2+5\alpha^4$$

εἶνε πρὸς τὸ χ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ α τοῦ τετάρτου.

Ὁμογενὲς λέγεται τὸ πολυώνυμον πρός τινα γράμματα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶνε τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα· π. χ. τὸ πολυώνυμον $3\alpha^2+2\beta^2-7\alpha\beta$ εἶνε ὁμογενὲς πρὸς τὰ α καὶ β· ὁμοίως καὶ τὸ πολυώνυμον $\alpha^2+\nu\beta^2$ εἶνε ὁμογενὲς πρὸς α καὶ β.

Μερικαὶ τιμαὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

79 Ἐὰν ἐν παραστάσει ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι πράξεις, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *τιμὴ* τῆς παραστάσεως· καὶ ὁ ἀριθμός, ὃ γράμμα τι ἀντικαθιστῶν, λέγεται *τιμὴ* τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων, ἅτινα περιέχει· καὶ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων, δοθῶσιν· οἷον ἡ παράστασις $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$

ἂν μὲν ὑποτεθῇ $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=1$,

δίδει $3^2+2^2-1^2$ ἢ $9+4-1$ ἤτοι 12·

ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=3$,

γίνεται $5^2+3^2-3^2$ ἢ $25+9-9$, ἢ 25·

ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=4$ καὶ $\beta=\gamma$,

ἡ παράστασις γίνεται $4^2+\beta^2-\beta^2$ ἤτοι 16.
Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, ἡ παράστασις γίνεται 0.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως $2\chi^2-5\chi+2$ τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ χ· $\chi=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

2) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως $3\alpha^2+2\alpha\chi-\chi^2$ τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς ἑπομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \chi=0\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha=1\\ \chi=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha=\frac{1}{2}\\ \chi=1\end{matrix}\right\}$ $\left.\chi=3\alpha\right\}$ $\left.\chi=-\alpha\right\}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

80. *Ἀλγεβρικαὶ πράξεις* λέγονται αἱ μεταβολαί, αἵτινες δυνάμει τῶν γενικῶν νόμων τῶν πράξεων γίνονται ἐπὶ τῶν παραστάσεων, ἐν ὅσῳ οἱ ὑπὸ τῶν γραμμάτων παριστώμενοι ἀριθμοὶ μένουσιν ἐντελῶς ἀόριστοι. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, τὴν παράστασιν $(\alpha+\beta+\gamma).\delta$ δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν εἰς τὴν ἑπομένην $(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)$, οἱουςδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἂν παριστῶσι τὰ γράμματα, δυνάμει τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου· τοῦτο δὲ ποιοῦντες ἐκτελοῦμεν ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται *Ἀλγεβρικὸς λογισμός*.

81. Δύο παραστάσεις ἐξ ἀλλήλων προκύπτουσαι, δυνάμει τῶν εἰρημένων νόμων λέγονται *ἴσαι*· διότι προδήλως δίδουσιν ἀμφότεραι ἴσους ἀριθμούς, ὅταν ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τυχόντος ἀριθμοῦ· τοιαῦται εἶνε λ. χ. αἱ παραστάσεις

$$(\alpha+\beta+\gamma).\delta \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha.\delta+\beta.\delta+\gamma.\delta.$$

82. Αἱ ἐπὶ τῶν παραστάσεων σημειούμεναι πράξεις ἔχουσι τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ὁμωνύμων ἀριθμητικῶν πράξεων· διότι καὶ αἱ παραστάσεις ἀριθμούς τινας παριστῶσι πάντοτε. Οὕτω π. χ. εἶνε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}$$

καὶ ὅταν ἀντὶ α, β, γ, τεθῶσιν οἱαιδήποτε παραστάσεις· διότι ἡ ἰσότης αὕτη ἐδείχθη ἀληθὴς (40) ἐπὶ τριῶν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Πρόσθεσις.

83. Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι, *ἵνα προσθέσωμεν πολυώνυμον εἰς ἄλλο πολυώνυμον ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων ἀμφοτέρων τῶν πολυ-*

ωνύμων (18), *διατηροῦντες τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου*. Φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ περὶ ὁσωνδήποτε πολυωνύμων ἢ καὶ μονωνύμων·

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα $(3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta)+(8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)$
τῶν δύο πολυωνύμων $3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta$ καὶ $8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2$
ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta+8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2$.

Καὶ τὸ ἄθροισμα $(\alpha-\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon-\zeta)+(\eta-\theta)$
τῶν τριῶν πολυωνύμων $\alpha-\beta+\gamma,\ \delta+\varepsilon-\zeta,\ \eta-\theta$
ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $\alpha-\beta+\gamma+\delta+\varepsilon-\zeta+\eta-\theta$.

Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μονωνύμων $+8\alpha\beta$ καὶ $-3\gamma\delta$
ἤτοι τὸ $(8\alpha\beta)+(-3\gamma\delta)$
ἰσοῦται (77) τῷ διωνύμῳ $8\alpha\beta-3\gamma\delta$.
τῶν δὲ μονωνύμων $-9\gamma\delta$ καὶ $-3\varepsilon^2$ τὸ ἄθροισμα εἶνε $-9\gamma\delta-3\varepsilon^2$.

Περὶ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ τῆς προσθέσεως αὐτῶν.

84. *Ὅμοιοι* ὅροι λέγονται οἱ κατὰ τὸν συντελεστὴν μόνον διαφέροντες (ἂν διαφέρωσιν). Οὕτως ἐν τῷ πολυωνύμῳ

$$2\alpha\beta+5\beta\gamma-4\alpha\beta+8\alpha\beta$$

οἱ ὅροι $2\alpha\beta,\ -4\alpha\beta,\ 8\alpha\beta$ εἶνε ὅμοιοι.

Πάντες οἱ ὅμοιοι ὅροι τοῦ πολυωνύμου δύνανται νὰ προστεθῶσι καὶ συγχωνευθῶσιν εἰς ἕνα· ἡ δὲ πρᾶξις αὕτη λέγεται πρόσθεσις ἢ *ἀναγωγὴ* τῶν ὁμοίων ὅρων.

Ἔστω τυχὸν πολυώνυμον, ἔχον ὁμοίους ὅρους, τὸ

$$8\alpha\beta\gamma^2+15\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2-7\alpha\beta^2\gamma+12\alpha^2\beta\gamma-13\alpha\beta\gamma^2\cdot$$

δῆλον, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων ὅρων

$$8\alpha\beta\gamma^2+15\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2-13\alpha\beta\gamma^2$$

ἰσοῦται (32) τῷ γινομένῳ

$$\alpha\beta\gamma^2(+8+15-2-13)$$

ἤτοι τῷ $\alpha\beta\gamma^2(+8)$ ἢ $8\alpha\beta\gamma^2$,
ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι

Πάντες οἱ ὅμοιοι ὅροι πολυωνύμου ἀποτελοῦσιν ἕνα ὅρον ὅμοιον αὐτοῖς καὶ ἔχοντα συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν αὐτῶν ὅρων.

Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$
ἰσοῦται τῷ $2\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta\cdot$
καὶ τὸ πολυώνυμον $3\alpha\beta-4\alpha^2+5\alpha\beta-8\beta^2-8\alpha\beta+3\beta^2$
ἰσοῦται τῷ $-4\alpha^2-5\beta^2$.

Ἀφαιρέσεις.

85. Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται ἀπὸ παραστάσεως οἱαςδήποτε M νὰ ἀφαιρεθῇ πολυώνυμον, ἔστω τὸ $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta$· ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ M τὸν ὑπὸ τοῦ πολυωνύμου παριστώμενον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ· οὗτος δὲ προδήλως εὑρίσκεται, ἐὰν ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου· ἑπομένως ἡ διαφορὰ $M-(\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta)$ ἰσοῦται τῇ παραστάσει $M-\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon+\zeta$· *ἤτοι, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ παραστάσεως οἱαςδήποτε δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς πάντας τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα αὐτῶν, ἤτοι τρέποντες τὰ + εἰς —, καὶ ἀντιστρόφως.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ὅτι ἡ παράστασις $M-\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon+\zeta$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ἑπομένων

$$M, \quad \text{καὶ} \quad \alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta,$$

γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τοῦ ἀφαιρετέου ἰσοῦται τῷ μειωτέῳ M· διότι τὸ εἰρημένον ἄθροισμα γράφεται (77) καὶ ὡς ἑξῆς $M+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\delta-\delta+\varepsilon-\varepsilon+\zeta-\zeta$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἀπ. $2\alpha^2+2\beta^2$.

2) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν πολυωνύμων

Ἀπ. $4\alpha\beta$.

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων πολυωνύμων

$$\alpha+\beta-\gamma$$
$$\alpha-\beta+\gamma$$
$$-\alpha+\beta+\gamma.$$

Ἀπ. $\alpha+\beta+\gamma$.

4) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$\alpha^3-3\alpha^2 6+3\alpha\beta^2-\beta^3.$$

Ἀπ. $2\alpha^3+6\alpha\beta^2$.

Πολλαπλασιασμός.

α'.) *Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.*

86. *Πολλαπλασιασμὸς δύο μονωνύμων εἶνε ἡ εὕρεσις* ***μονωνύμου*** *ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Ἐπειδὴ πᾶν ἀκέραιον μονώνυμον (76) εἶνε γινόμενον πολλῶν **παραγόντων**, ἕπεται ἀμέσως ἡ πρότασις.

Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶνε μονώνυμον ἔχον **παράγοντας** πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν μονωνύμων.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ μονώνυμα

$$+3\alpha\beta^2\gamma \quad \text{καὶ} \quad -5\alpha^2\beta\gamma^3\delta.$$

ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον εἶνε γινόμενον τῶν παραγόντων $+3, \alpha, \beta^2, \gamma,$
τὸ δὲ δεύτερον τῶν $-5, \alpha^2, \beta, \gamma^3, \delta,$
ἕπεται (30), ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε $+3.\alpha.\beta^2.\gamma.(-5).\alpha^2.\beta.\gamma^3.\delta.$

Ἐπειδὴ δε οἱ παράγοντες δύνανται νὰ γραφῶσι καθ' οἱανδήποτε θέλωμεν τάξιν, τὸ αὐτὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ

$$(+3)\ (-5).\alpha.\alpha^2.\beta^2.\beta.\gamma.\gamma^3.\delta$$

ἤτοι (28) τῷ $-15\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων

$$-12\alpha^5\beta\gamma\delta \quad \text{καὶ} \quad -\alpha\gamma^2\delta$$

εἶνε $(-12)\ (-1).\alpha^5.\alpha.\beta.\gamma.\gamma^2.\delta.\delta.$ ἤτοι $+12\alpha^6\beta\gamma^3\delta^2.$

Καὶ τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $6\alpha\beta\gamma^2$ ἐπὶ $12\alpha^3\beta^4$ εὑρίσκεται ὁμοίως ἴσον τῷ μονωνύμῳ $72\alpha^4\beta^5\gamma^2.$

Εκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀκέραια μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν πάντα τὰ ἐν τοῖς μονωνύμοις ὑπάρχοντα γράμματα καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, οὓς ἔχει ἐν τοῖς μονωνύμοις.

Ἐὰν ἓν τῶν μονωνύμων δὲν ἔχῃ γράμμα τι, ὑποτίθεται ἔχον **αὐτὸ** εἰς τὴν δύναμιν 0 (72).

Ὁ αὐτὸς δὲ κανὼν δίδει προδήλως καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μονωνύμων· διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο πρῶτα, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς.

87. Τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα εὑρισκόμενον γινόμενον δύο μο-

νωνύμων ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$, ἐὰν οἱ παράγοντες εἶνε ὁμοιόσημοι, τὸ δὲ $-$, ἐὰν ἑτερόσημοι· τουτέστιν

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μονωνύμων τὰ ὅμοια σημεῖα δίδουσι $+$, τὰ δὲ ἀνόμοια $-$.

Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζει τὸν λεγόμενον *κανόνα τῶν σημείων.*

β'.) Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

88. *Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον (ἢ ἐπὶ μονώνυμον) εἶνε ἡ εὕρεσις πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἕπεται, ὅτι

Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονώνυμον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.

Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ πολυώνυμον, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.

Ὥστε ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονωνύμων.

Παραδείγματα.

1) Τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta)$ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $\alpha.\alpha+\alpha.\beta+\beta.\alpha+\beta.\beta$

ἤτοι $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$ εἶνε ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta)$ καὶ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(\alpha+\beta)^2$, συνάγομεν τὴν ἰσότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$,

ἥτις ἐκφράζει τὴν ἑπομένην πρότασιν

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

2) Τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$\alpha.\alpha+\alpha.(-\beta)+(-\beta).\alpha+(-\beta)\,(-\beta)$$

ἤτοι $\alpha.\alpha-\alpha.\beta-\beta.\alpha+\beta.\beta$

ἢ $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)$ εἶνε ἡ δευτέρα δύναμις τῆς διαφορᾶς $(\alpha-\beta)$ καὶ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(\alpha-\beta)^2$, συνάγομεν τὴν ἰσό-

τητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$,

ἥτις ἐκφράζει τὴν ἑπομένην πρότασιν

Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

3) Τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$\alpha.\alpha+\alpha.\beta-\beta.\alpha-\beta.\beta$ ἤτοι τῷ $\alpha^2-\beta^2$,

ὅθεν ἔχομεν τὴν ἰσότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$,

τουτέστι *τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν δίδει τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.*

Τὰ τρία ταῦτα γινόμενα ἀπαντῶσι συχνότατα ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ.

Ἐπὶ πολυπλοκωτέρων παραδειγμάτων διατίθεται ἡ πρᾶξις ὡς ἕπεται.

4) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$\chi^3-3\chi^2-5\chi+6$ καὶ $\chi^2+8\chi-5$

$$\begin{array}{r} \chi^3-3\chi^2-5\chi+6 \\ \chi^2+8\chi-5 \\ \hline \chi^5-3\chi^4-5\chi^3+6\chi^2 \qquad\qquad\qquad \\ +8\chi^4-24\chi^3-40\chi^2+48\chi \qquad \\ -5\chi^3+15\chi^2+25\chi-30 \\ \hline \chi^5+5\chi^4-34\chi^3-19\chi^2+73\chi-30. \end{array}$$

Οἱ ὅροι ἑκατέρου τῶν δοθέντων πολυωνύμων εἶνε γεγραμμένοι κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος χ ἐλαττοῦνται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον (ὅταν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ εἰς πολυώνυμον, λέγεται, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε *διατεταγμένον* κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος). Ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἣν σύρομεν ὑποκάτω τῶν δύο πολυωνύμων, γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (χ^2) ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου· ἔπειτα εἰς δευτέραν σειρὰν τὰ γινόμενα τοῦ δευτέρου ὅρου $(+8\chi)$, καὶ εἰς τρίτην τὰ τοῦ τρίτου (-5)· γράφονται δὲ τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα οὕτως, ὥστε οἱ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος χ ἔχοντες ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· τέλος ὑπὸ τὴν δευτέραν ὁριζοντίαν γραμμὴν γράφεται τὸ ἐκ πάντων τῶν μερικῶν γινομένων μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων ἀποτελούμενον πολυώνυμον, ὅπερ εἶνε τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων.

5) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$3-2\alpha+4\alpha^2 \qquad \text{καὶ} \qquad 8+5\alpha-\alpha^2$$

$$\begin{array}{r} 3-2\alpha+4\alpha^2 \\ 8+5\alpha-\alpha^2 \\ \hline 24-16\alpha+32\alpha^2 \\ 15\alpha-10\alpha^2+20\alpha^3 \\ -3\alpha^2+2\alpha^3-4\alpha^4 \\ \hline 24-\alpha+19\alpha^2+22\alpha^3-4\alpha^4. \end{array}$$

Ἐνταῦθα οἱ ὅροι τῶν δύο πολυωνύμων ἐγράφησαν κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε νὰ αὐξάνωσιν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος α ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον· ἤτοι τὰ πολυώνυμα διετάχθησαν ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α· κατὰ τὰ ἄλλα ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι.

6) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$\alpha^2\chi^2+\alpha\chi^3+\alpha^3\chi+\alpha^4+\chi^4 \qquad \chi-\alpha$$

$$\begin{array}{r} \chi^4+\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi+\alpha^4 \\ \chi-\alpha \\ \hline \chi^5+\alpha\chi^4+\alpha^2\chi^3+\alpha^3\chi^2+\alpha^4\chi \\ -\alpha\chi^4-\alpha^2\chi^3-\alpha^3\chi^2-\alpha^4\chi-\alpha^5 \\ \hline \chi^5-\alpha^5. \end{array}$$

7) Εὑρεῖν τὸν κύβον τοῦ $(\alpha+\beta)$, ἤτοι τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).$$

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων ἰσοῦται τῷ

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\cdot$$

ὥστε πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)$

$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ +\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array}$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων γίνεται καταφανές, ὅτι διὰ τῆς διατάξεως τῶν πολυωνύμων κατὰ τὰς κατιούσας ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος ἡ εὕρεσις τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ γινομένου καὶ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν γίνεται εὐκολώτερον.

89. Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πο-

λυωνύμων, βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον πρὸ τῆς ἀναγωγῆς ἔχει τόσους ὅρους, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν μετρεῖται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων· ἀλλὰ διὰ τῆς ἀναγωγῆς δύναται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ γινομένου νὰ καταστῇ μικρότερον.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε ἐν τῷ γινομένῳ δύο ὅροι πρὸς οὐδένα ἄλλον ὅμοιοι καὶ ἑπομένως ἀμετάβλητοι διαμένοντες ἐν αὐτῷ. Εἶνε δὲ οὗτοι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων καὶ τὸ γινόμενον τῶν τελευταίων, ὑποτιθεμένων τῶν πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Ἐὰν τῳόντι τὰ πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, οἱ πρῶτοι ὅροι ἔχουσι τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ γράμματος καὶ διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ ἔχῃ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος μεγαλητέραν ἢ πάντα τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα· ὁμοίως οἱ τελευταῖοι ὅροι ἔχουσι τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει διὰ τοῦτο μικροτέραν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως ἢ πάντα τὰ ἄλλα γινόμενα· ἑπομένως οἱ δύο οὗτοι ὅροι τοῦ γινομένου οὐδένα ἔχουσιν ὅμοιον αὐτοῖς. Τοῦτο δύναταί τις νὰ ἴδῃ εἰς πάντα τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἔχει τοὐλάχιστον δύο ὅρους. Ὅτι δὲ δύναται καὶ δύο μόνον νὰ ἔχῃ, ἐξαφανιζομένων πάντων τῶν λοιπῶν ἐν τῇ ἀναγωγῇ, δεικνύει τὸ $6^{ον}$ παράδειγμα.

Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου πρὸς γράμμα τι (78) ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Διαίρεσις.

α'.) *Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων*

90. Μονώνυμον ἀκέραιον λέγεται *διαιρετὸν* δι' ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον ἴσον τῷ πηλίκον αὐτῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου πηλίκου λέγεται *διαίρεσις* τῶν μονωνύμων.

91. *Ἵνα μονώνυμον εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ πάντα τὰ γράμματα τὰ ἐν τῷ διαιρέτῃ ὑπάρχοντα καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος.*

Διότι ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ ἀκέραιον καὶ μονώνυμον πηλίκον πολλαπλα-

σιασθεὶς πρέπει νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον· περιέχονται ἄρα πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος.

92. Ἐκ τοῦ κανόνος, καθ' ὃν πολλαπλασιάζονται δύο μονώνυμα, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν ἑπόμενον κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν μονωνύμων (ὑποθέτοντες τὸ ἓν διαιρετὸν διὰ τοῦ ἄλλου).

Ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον δι' ἄλλου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου ἑκάστου γράμματος αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ὑποτίθεται ὑπάρχον μὲ ἐκθέτην 0 (72).

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ μονώνυμα

$$40\alpha^5\beta^2\gamma\delta^3 \qquad 5\alpha\beta^2\delta$$

Τὸ πηλίκον αὐτῶν, ὅπερ παρίσταται διὰ τοῦ

$$\frac{40\alpha^5\beta^2\gamma\delta^3}{5\alpha\beta^2\delta}, \text{ ἰσοῦται τῷ μονωνύμῳ } \quad 8\alpha^4\gamma\delta^2.$$

διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα ἔπρεπε νὰ γράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον καὶ τὸν παράγοντα β^0· παρελείψαμεν ὅμως αὐτὸν ὡς ἴσον τῇ μονάδι.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

Τὸ μονώνυμον $-15\alpha^3\beta\gamma\delta^5$ διὰ τοῦ $7\alpha\beta\delta^3$ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ μονώνυμον $-\frac{15}{7}\alpha^2\gamma\delta^2$.

Καὶ τὸ μονώνυμον $-20\alpha\beta\gamma^3$ διὰ τοῦ $-5\alpha\beta\gamma$ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ $4\gamma^2$.

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι καὶ ἐν τῇ διαιρέσει τῶν μονωνύμων ὁ αὐτὸς κανὼν τῶν σημείων διατηρεῖται· ἤτοι *ἐξ ὁμοίων σημείων προκύπτει* +, *ἐξ ἀνομοίων δὲ* —.

β'.) Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου, ἀμφοτέρων ὄντων ἀκεραίων.

93. Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται *διαιρετὸν* διὰ μονωνύμου ἀκεραίου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν· καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου τούτου καὶ ἀκεραίου πηλίκου λέγεται *διαίρεσις* τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.

94. *Πολυώνυμον ἀκέραιον εἶνε διαιρετὸν διὰ μονωνύμου, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου* (τὸ πολυώνυμον ὑποτίθεται ἄνευ ὁμοίων ὅρων) *καὶ τότε μόνον.*

Διότι οἱ ὅροι οὗτοι εἶνε γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου πηλίκου.

Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ μονωνύμου, διαιροῦμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου, καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Διότι τὸ πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ· ἄθροισμα δὲ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ χωριστὰ καὶ προστεθῶσι τὰ πηλίκα.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πολυώνυμον

$4\alpha^2\beta^3 - 8\alpha^3\beta^2 + 12\alpha\beta^4$ διὰ τοῦ $2\alpha\beta^2$ διαιρεθὲν

δίδει πηλίκον τὸ $2\alpha\beta - 4\alpha^2 + 6\beta^2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ὅταν πάντες οἱ ὅροι πολυωνύμου εἶνε διαιρετοὶ διὰ μονωνύμου τινός, τὸ πολυώνυμον παρίσταται ὡς γινόμενον τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου.

Τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^2\beta^4 - 6\alpha^3\beta^3 + 4\alpha^4\beta^2$ πάντες οἱ ὅροι εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ $2\alpha^2\beta^2$, ἑπομένως καὶ αὐτὸ τὸ πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $2\alpha^2\beta^2$· ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον εἶνε $6\beta^2 - 3\alpha\beta + 2\alpha^2$, συνάγομεν, ὅτι τὸ αὐτὸ πολυώνυμον γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(6\beta^2 - 3\alpha\beta + 2\alpha^2)2\alpha^2\beta^2.$$

Ὅταν εἰς πολυώνυμον γίνηται τοῦτο, λέγομεν, ὅτι *ἐξάγονται οἱ κοινοὶ τῶν ὅρων παράγοντες ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως.*

γ'.) *Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου, ἀμφοτέρων ὄντων ἀκεραίων.*

95. Πολυώνυμον λέγεται *διαιρετὸν* δι' ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ πολυώνυμον (ἢ μονώνυμον) ἀκέραιον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου τούτου λέγεται *διαίρεσις* τῶν δύο πολυωνύμων· στηρίζεται δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη ἐπὶ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων.

1) *Ἐὰν δύο πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῶν* (ἐὰν ὑποτεθῇ ὑπάρχον καὶ ὁμοίως διατεταγμένον) *εὑρίσκεται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων.*

Ἔστω διαιρετέος μὲν τὸ πολυώνυμον

$$\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots$$

διαιρέτης δὲ τὸ $\delta+\delta'+\delta''+\ldots$

πηλίκον δὲ τὸ $\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots$

τότε θὰ εἶνε $\Delta+\Delta'+\ldots=(\delta+\delta'+\delta''\ldots).\ (\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots)$

Τοὺς ὅρους τῶν τριῶν τούτων πολυωνύμων ὑποθέτω διατεταγμένους κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος α (ἢ ὅλων κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ ὅλων κατὰ τὰς κατιούσας)· παριστῶ δὲ ἕκαστον ὅρον δι' ἑνὸς μόνου γράμματος χάριν συντομίας.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο πολυωνύμων $(\delta+\delta'+\delta''+\ldots)\ (\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots)$, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶνε ὁμοίως διατεταγμένα, οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν θὰ δώσωσι γινόμενον τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ γινομένου (ἐδ. 89) ἄρα εἶνε $\Delta=\delta.\Pi$· ἑπομένως καὶ $\Pi=\frac{\Delta}{\delta}$· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2) *Ἐὰν ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκεται ὑπόλοιπον, ὅπερ διαιρούμενον διὰ τοῦ διαιρέτου θὰ δώσῃ πάντας τοὺς ἄλλους ὅρους τοῦ πηλίκου.*

Διότι ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἤτοι ἀποτελεῖται ἐκ τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἂν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου ἀποτελούμενον πολυώνυμον· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἐπὶ τῶν δύο τούτων θεωρημάτων στηριζόμενοι εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο πολυωνύμων (ὅταν ὑπάρχῃ) διότι διὰ μὲν τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διὰ δὲ τοῦ δευτέρου ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τῶν λοιπῶν εἰς νέαν τινὰ διαίρεσιν. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν ἐφαρμόσωμεν τὸ πρῶτον θεώρημα, εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου αὐτῆς (τουτέστι τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου), ἡ δὲ εὕρεσις τῶν λοιπῶν ἀνάγεται καὶ πάλιν (δυνάμει τοῦ δευτέρου θεωρήματος) εἰς τρίτην τινὰ διαίρεσιν· καὶ οὕτω καθεξῆς. Φανερὸν δὲ ὅτι, ὅταν ὑπάρχῃ πολυώνυμον πηλίκον, μία τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων, εἰς ἃς

ἀνάγεται ἡ ἐξ ἀρχῆς δοθεῖσα, θὰ δώσῃ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 0.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἡ διαίρεσις τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται οὕτως εἰς τὴν διαίρεσιν μονωνύμων· διότι εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι διαιροῦνται.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

1) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $8\chi^3-22\chi^2+17\chi-3$ διὰ τοῦ $4\chi-1$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 8\chi^3-22\chi^2+17\chi-3 & 4\chi-1 \\
 & -8\chi^3+2\chi^2 & 2\chi^2-5\chi+3 \\
\hline
 & -20\chi^2+17\chi-3 & \\
 & +20\chi^2-5\chi & \\
\hline
 & +12\chi-3 & \\
 & -12\chi+3 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Τὰ πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ· μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου ($2\chi^2$) πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ οἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτοντες ὅροι, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, γράφονται ὑπ' αὐτὸν μετ' ἐναντίων σημείων καὶ προστίθενται εἰς αὐτόν. Τὸ δὲ ἐκ τῆς προσθέσεως μετὰ τὴν ἀναγωγὴν προκύπτον πολυώνυμον $-20\chi^2+17\chi-3$ θεωρεῖται νῦν ὡς νέος διαιρετέος, ἐφ' οὗ ποιοῦμεν πάλιν τὰ αὐτὰ καὶ εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου (-5χ) καὶ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον $12\chi-3$· θεωροῦντες καὶ τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον καὶ ποιοῦντες καὶ ἐπ' αὐτοῦ τὰ αὐτά, εὑρίσκομεν τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου ($+3$) καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε

$$2\chi^2-5\chi+3.$$

2) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον

$$3\chi^5+5\alpha\chi^4-9\alpha^2\chi^3-12\alpha^3\chi^2+8\alpha^4\chi+5\alpha^5$$

διὰ τοῦ $\chi^3+\alpha\chi^2-2\alpha^2\chi-\alpha^3$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 3\chi^5+5\alpha\chi^4-9\alpha^2\chi^3-12\alpha^3\chi^2+8\alpha^4\chi+5\alpha^5 & \chi^3+\alpha\chi^2-2\alpha^2\chi-\alpha^3 \\
 & -3\chi^5-3\alpha\chi^4+6\alpha^2\chi^3+3\alpha^3\chi^2 & 3\chi^2+2\alpha\chi-5\alpha^2 \\
\hline
 & 2\alpha\chi^4-3\alpha^2\chi^3-9\alpha^3\chi^2-8\alpha^4\chi+5\alpha^5 & \\
 & -2\alpha\chi^4-2\alpha^2\chi^3+4\alpha^3\chi^2+2\alpha^4\chi & \\
\hline
 & -5\alpha^2\chi^3-5\alpha^3\chi^2+10\alpha^4\chi+5\alpha^5 & \\
 & +5\alpha^2\chi^3+5\alpha^3\chi^2-10\alpha^4\chi-5\alpha^5 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

[6]. Ἐκ [τῶν] προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανὼν τῆς διαιρέ[σεως] τῶν ἀκεραί[ων] πολυωνύμων.

[Ἵ]να διαιρέσωμεν [πολυ]ώνυμον δι' ἑτέρου πολυωνύμου, διατάσσομεν [ἀμφό]τερα κατὰ τὰς ἀνιο[ύσ]ας [ἢ] ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις [ἑνὸς] γράμματος, καὶ διαιρο[ῦ]μεν [τοὺ]ς πρώτους ὅρους αὐτῶν, ἐξ ὧν εὑ[ρίσκο]μεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλ[ίκου]· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ [διαι]ρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέ[τ]ου [ἐπὶ] τὸν ὅρον τοῦτον καὶ εὑρί[σκομ]εν ὑπόλοιπόν τι· μετὰ δὲ ταῦτα θεωροῦ[με]ν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο [ὡς ν]έον διαιρετέον καὶ ποιοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ ὅσα καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου [διαι]ρετέου, ὅτε εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ [π]ηλίκου καὶ ὑπό[λοιπ]όν τι. Θεωροῦμεν πάλιν καὶ τοῦτο ὡς νέον διαιρετέ[ον], καὶ ἐξακο[λουθ]οῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπ[ον] 0· ὅπερ [συ]μβῇ μετά τινας πράξεις, ἐὰν τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶνε [δι]αιρετὸν [διὰ] τοῦ ἑτέρου.

[5]7. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου εὑρίσκονται ἐκ τοῦ διαιρετέου καὶ [τ]ῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων, διαιρουμένων τῶν πρώτων ὅρων αὐτῶν [διὰ τ]οῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἔπεται, ὅτι ἡ διαίρεσις δύο πολυω[νύμω]ν δὲν δύναται νὰ περατωθῇ, ἤτοι τὸ πολυώνυμον τὸ ἀποτελοῦν τὸν [διαιρ]ετέον δὲν εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, 1) ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος [τοῦ] διαιρέτου δὲν διαιρῇ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου, ἢ τὸν πρῶ[τον ὅ]ρον τινὸς ἐκ τῶν ὑπολοίπων· καὶ 2) ἐὰν διαιρῇ μὲν πάντας τού[τους], ἀλλ' οὐδέποτε εὑρίσκηται ὑπόλοιπον 0· ὡς συμβαίνει ἐν τῇ ἑπο[μένῃ] διαιρέσει

$$
\begin{array}{r|l}
\chi+\chi^2 & \chi-\chi^2 \\ \cline{2-2}
-\chi+\chi^2 & 1+2\chi+\dots \\ \cline{1-1}
2\chi^2 & \\
-2\chi^2+2\chi^3 & \\ \cline{1-1}
+2\chi^3 & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot &
\end{array}
$$

[Ἐ]πειδὴ πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε μονώνυμα, τὰ δὲ γινόμενα τοῦ διαι[ρέτου] ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶνε διώνυμα, φανερὸν εἶνε, [ὅτι ο]ὐδέποτε θὰ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0.

[Π]αρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἡ εἰς ἄπειρον ἐξακολούθησις τῆς διαιρέσεως [εἶνε] ἀδύνατος, ὅταν τὰ πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιού[σας] δυνάμεις ἑνὸς γράμματος· διότι τότε ὁ βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων πρὸς

τὸ γράμμα τῆς διατάξεως προβαίνει ἐλαττούμενος (διότι ἐ... ...τῇ διαιρέσει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ ὑ... ...πω), καὶ ἑπομένως μετά τινας πράξεις, ἐὰν δὲν φθάσωμεν εἰς ὑπό... ...τὸν 0, θὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ...διαιρέτ..., ὅτε ἡ διαίρεσις διακόπτεται· διὰ τοῦτο προτιμότερον εἰ... ἐν τῇ ...διαιρέσει νὰ διατάσσωμεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσ... δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

ΣΗΜ. Α΄. Ἐὰν τὸ πηλίκο... ...διαιρέσεώς τινος ἔχῃ δύο μόνον ὅρους, οἱ ὅροι οὗτοι εὑρίσκονται ...έσως, ὁ μὲν πρῶτος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων, ὁ δὲ ...τερος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν τελευταίων.

Οὕτω π. χ. ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^3-\chi^2-11\chi+3 \quad | \quad \chi^2-4\chi+1$$

τὸ πηλίκον ...ύο μόνον ὅρους δύναται νὰ ἔχῃ· διότι ὁ μὲν πρῶτος ὅρος αὐτοῦ εἶ... χ, ὁ δὲ τελευταῖος $+3$· μεταξὺ δὲ αὐτῶν οὐδεμία ἄλλη δύναμις τοῦ χ ὑπάρχει· ὥστε τὸ πηλίκον, ἂν ὑπάρχῃ, θὰ εἶνε τὸ $\chi+3$. Τοῦτο δὲ ἀληθῶς εἶνε τὸ πηλίκον· διότι πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Ὁμοίως ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^4+2\chi^3-5\chi^2+3\chi+1 \quad | \quad \chi^3-8\chi^2+8\chi-1$$

τὸ πηλίκον μόνον τοὺς δύο ὅρους $\chi-1$ δύναται νὰ ἔχῃ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ $\chi-1$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δὲν δίδει τὸν διαιρετέον, συνάγομεν, ὅτι ἡ προκειμένη διαίρεσις δὲν γίνεται.

ΣΗΜ. Β΄. Ἐὰν ἐν πολυωνύμῳ αἱ δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως εὑρίσκωνται πολλαπλασιασμέναι οὐχὶ ἐπὶ ἀριθμοὺς ἢ ἐπὶ μονώνυμα, ὡς ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασι συνέβαινεν, ἀλλ' ἐπὶ πολυώνυμα, ἡ διαίρεσις ἀποβαίνει ἐπιπονωτέρα, ἀλλ' ἡ θεωρία αὐτῆς κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται· μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι, ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁποίων εὑρίσκονται οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου, εἶνε καὶ αὐτοὶ πολυώνυμα.

ΣΗΜ. Γ΄. Διατάσσοντες τὰ πολυώνυμα πρὸς διάφορα γράμματα (ἂν ἔχωσιν), εὑρίσκομεν διὰ μιᾶς πολλοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου.

Οἷον ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^4-4\alpha\chi^3+(3\beta^2-5\alpha^2)\chi^2-3\alpha\beta^2\chi+2\beta^4 \quad | \quad \chi^2+\alpha\chi+\beta^2$$

ἂν μὲν πρὸς τὸ χ διατάξωμεν, εὑρίσκομεν δύο ὅρους τοῦ πηλίκου, τοὺς χ^2 καὶ $2\beta^2$, ἂν δὲ πρὸς τὸ α, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $-5\alpha\chi$· ὥστε τὸ πηλίκον ἔχει τοὺς ὅρους $\chi^2-5\alpha\chi+2\beta^2$ ἐπειδὴ δὲ πολλαπλασιάζοντες τούτους ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἐπερατώθη ἡ διαίρεσις.

* Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ χ—α.

98. Ἡ διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου, διατεταγμένου κατὰ τὰς καπιούσας δυνάμεις τοῦ χ, διὰ τοῦ διωνύμου χ—α, δύναται νὰ παραταθῇ, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον βαθμοῦ πρὸς τὸ χ μικροτέρου ἢ ὁ διαιρέτης, ἤτοι μὴ περιέχον τὸ χ.

Εἰς τοῦτο στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο χωρὶς νὰ διαιρέσωμεν καὶ νὰ συμπεράνωμεν, πότε τὸ πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ χ—α.

Διότι παριστῶντες διὰ τοῦ Φ τὸ διαιρετέον πολυώνυμον, διὰ τοῦ Π τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ Υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν

$$\Phi=(\chi-\alpha).\Pi+\Upsilon.$$

Διότι ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς διαιρέσεως ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἤτοι ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον $(\chi-\alpha).\Pi$ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ ἔμεινε τὸ ὑπόλοιπον Υ· ὥστε σύγκειται ὁ διαιρετέος ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐκ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha).\Pi$· ἀληθεύει δὲ τοῦτο προδήλως, οἰασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσι τὰ γράμματα χ καὶ α. Ἀλλ' ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi=\alpha$ ἐν τῇ ἰσότητι, τὸ μὲν γινόμενον $(\chi-\alpha).\Pi$ μηδενίζεται, ὡς μηδενιζομένου ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, τὸ δὲ Υ μένει ἀμετάβλητον· διότι δὲν περιέχει τὸ χ· τὸ δὲ πολυώνυμον Φ τρέπεται εἰς παράστασίν τινα μὴ ἔχουσαν τὸ χ, ἣν σημειοῦμεν διὰ τοῦ Φ_α· εἶνε ἄρα $\Phi_\alpha=\Upsilon$·

τουτέστι τὸ *ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ χ—α εὑρίσκεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ τὸ α.*

Ἐὰν ἄρα, ἀντικαθιστωμένου τοῦ χ ὑπὸ τοῦ α, προκύπτῃ ἐκ τοῦ πολυωνύμου ἐξαγόμενον 0, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ χ—α.

Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον $\chi^3-5\chi^2+2\chi-1$ διὰ τοῦ χ—α διαιρούμενον δίδει ὑπόλοιπον, τὸ $\alpha^3-5\alpha^2+2\alpha-1$.

Καὶ τὸ πολυώνυμον $\chi^4-5\chi^3+2\chi-10$ διαιρεῖται διὰ τοῦ χ—5· διότι μηδενίζεται, ὅταν ἐν αὐτῷ τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ ὁ 5.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ διώνυμον $\chi^\mu-\alpha^\mu$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ χ—α· τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρισκόμενον εἶνε

$$\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+..+\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}$$

τὸ γράμμα τῆς διατάξεως προβαίνει ἐλαττούμενος (διότι ἐ[illegible]ω), καὶ ἐπο[illegible]τῇ διαιρέσει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ ὑ[illegible]ῳ, καὶ ἑπομένως μετά τινας πράξεις, ἐὰν δὲν φθάσωμεν ε[illegible] ὑπό[illegible]ον 0, θὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ [illegible]αιρέ[illegible] ὅτε ἡ διαίρεσις διακόπτεται· διὰ τοῦτο προτιμότερον εἰ[illegible] ἐν τῇ [illegible]αιρέσει νὰ διατάσσωμεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσ[illegible] δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

ΣΗΜ. Α΄. Ἐὰν τὸ πηλίκο[illegible]αιρέσεώς τινος ἔχῃ δύο μόνον ὅρους, οἱ ὅροι οὗτοι εὑρίσκονται [illegible]έσως, ὁ μὲν πρῶτος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων, ὁ δὲ [illegible]τερος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν τελευταίων.

Οὕτω π. χ. ἐν [illegible]ῇ διαιρέσει

$$\chi^3-\chi^2-11\chi+3 \quad | \quad \chi^2-4\chi+1$$

τὸ πηλίκον [illegible]ύο μόνον ὅρους δύναται νὰ ἔχῃ· διότι ὁ μὲν πρῶτος ὅρος αὐτοῦ εἰ[illegible] χ, ὁ δὲ τελευταῖος $+3$· μεταξὺ δὲ αὐτῶν οὐδεμία ἄλλη δύναμις τ[illegible]ῦ χ ὑπάρχει· ὥστε τὸ πηλίκον, ἂν ὑπάρχῃ, θὰ εἶνε τὸ $\chi+3$. Τοῦτο δὲ ἀληθῶς εἶνε τὸ πηλίκον· διότι πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Ὁμοίως ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^4+2\chi^3-5\chi^2+3\chi+1 \quad | \quad \chi^3-8\chi^2+8\chi-1$$

τὸ πηλίκον μόνον τοὺς δύο ὅρους $\chi-1$ δύναται νὰ ἔχῃ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ $\chi-1$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δὲν δίδει τὸν διαιρετέον, συνάγομεν, ὅτι ἡ προκειμένη διαίρεσις δὲν γίνεται.

ΣΗΜ. Β΄. Ἐὰν ἐν πολυωνύμῳ αἱ δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως εὑρίσκωνται πολλαπλασιασμέναι οὐχὶ ἐπὶ ἀριθμοὺς ἢ ἐπὶ μονώνυμα, ὡς ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασι συνέβαινεν, ἀλλ' ἐπὶ πολυώνυμα, ἡ διαίρεσις ἀποβαίνει ἐπιπονωτέρα, ἀλλ' ἡ θεωρία αὐτῆς κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται· μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι, ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁποίων εὑρίσκονται οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου, εἶνε καὶ αὐτοὶ πολυώνυμα.

ΣΗΜ. Γ΄. Διατάσσοντες τὰ πολυώνυμα πρὸς διάφορα γράμματα (ἂν ἔχωσιν), εὑρίσκομεν διὰ μιᾶς πολλοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου.

Οἷον ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^4-4\alpha\chi^3+(3\beta^2-5\alpha^2)\chi^2-3\alpha\beta^2\chi+2\beta^4 \quad | \quad \chi^2+\alpha\chi+\beta^2$$

ἂν μὲν πρὸς τὸ χ διατάξωμεν, εὑρίσκομεν δύο ὅρους τοῦ πηλίκου, τοὺς χ^2 καὶ $2\beta^2$, ἂν δὲ πρὸς τὸ α, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $-5\alpha\chi$· ὥστε τὸ πηλίκον ἔχει τοὺς ὅρους $\chi^2-5\alpha\chi+2\beta^2$ ἐπειδὴ δὲ πολλαπλασιάζοντες τούτους ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἐπερατώθη ἡ διαίρεσις.

* Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ $\chi - \alpha$.

98. Ἡ διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου, διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, διὰ τοῦ διωνύμου $\chi - \alpha$, δύναται νὰ παραταθῇ, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον βαθμοῦ πρὸς τὸ χ μικροτέρου ἢ ὁ διαιρέτης, ἤτοι μὴ περιέχον τὸ χ.

Εἰς τοῦτο στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο χωρὶς νὰ διαιρέσωμεν καὶ νὰ συμπεράνωμεν, πότε τὸ πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi - \alpha$.

Διότι παριστῶντες διὰ τοῦ Φ τὸ διαιρετέον πολυώνυμον, διὰ τοῦ Π τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ Υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν

$$\Phi = (\chi - \alpha).\Pi + \Upsilon.$$

Διότι ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς διαιρέσεως ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἤτοι ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον $(\chi - \alpha).\Pi$ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ ἔμεινε τὸ ὑπόλοιπον Υ· ὥστε σύγκειται ὁ διαιρετέος ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐκ τοῦ γινομένου $(\chi - \alpha).\Pi$· ἀληθεύει δὲ τοῦτο προδήλως, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσι τὰ γράμματα χ καὶ α. Ἀλλ' ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = \alpha$ ἐν τῇ ἰσότητι, τὸ μὲν γινόμενον $(\chi - \alpha).\Pi$ μηδενίζεται, ὡς μηδενιζομένου ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, τὸ δὲ Υ μένει ἀμετάβλητον· διότι δὲν περιέχει τὸ χ· τὸ δὲ πολυώνυμον τρέπεται εἰς παράστασίν τινα μὴ ἔχουσαν τὸ χ, ἣν σημειοῦμεν διὰ τοῦ Φ_α· εἶνε ἄρα $\Phi_\alpha = \Upsilon$·

τουτέστι *τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ $\chi - \alpha$ εὑρίσκεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ τὸ α.*

Ἐὰν ἄρα, ἀντικαθιστωμένου τοῦ χ ὑπὸ τοῦ α, προκύπτῃ ἐκ τοῦ πολυωνύμου ἐξαγόμενον 0, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi - \alpha$.

Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον $\chi^3 - 5\chi^2 + 2\chi - 1$ διὰ τοῦ $\chi - \alpha$ διαιρούμενον δίδει ὑπόλοιπον, τὸ $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha - 1$.

Καὶ τὸ πολυώνυμον $\chi^4 - 5\chi^3 + 2\chi - 10$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\chi - 5$· διότι μηδενίζεται, ὅταν ἐν αὐτῷ τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ ὁ 5.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ διώνυμον $\chi^\mu - \alpha^\mu$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi - \alpha$· τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρισκόμενον εἶνε

$$\chi^{\mu-1} + \alpha\chi^{\mu-2} + \alpha^2\chi^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-2}\chi + \alpha^{\mu-1}$$

πάντες οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου τούτου ἔχουσι συντελεστὴν τὸ $+1$, καὶ αἱ μὲν δυνάμεις τοῦ χ προβαίνουσιν ἐλαττούμεναι, τοῦ δὲ α τοὐναντίον αὐξανόμεναι κατὰ μονάδα· ὥστε ὁ βαθμὸς ὅλων τῶν ὅρων πρὸς τὰ γράμματα χ καὶ α εἶνε ὁ αὐτός, $\mu-1$.

Ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε αἱ ἑξῆς

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta, \qquad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha.\beta+\beta^2.$$

Κλασματικαὶ παραστάσεις ἢ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

99. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν παραστάσεων παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Φανερὸν δέ, ὅτι αἱ οὕτω προκύπτουσαι κλασματικαὶ παραστάσεις, αἵτινες καὶ *ἀλγεβρικὰ κλάσματα* λέγονται, ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων· διότι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν, οἱαιδήποτε παραστάσεις καὶ ἂν εἶνε, παριστῶσιν ἀριθμούς τινας· ἐπὶ πάντων δὲ τῶν ἀριθμῶν ἀπεδείχθησαν ἰσχύουσαι αἱ ἰδιότητες ἐκεῖναι ὡς ἀκολουθήματα ἀναγκαῖα τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων· ἑπομένως πᾶσαι αἱ ἁπλουστεύσεις καὶ αἱ πράξεις, αἱ ἐπὶ τῶν συνήθων κλασμάτων γινόμεναι, γίνονται καὶ ἐπὶ τούτων καὶ δι' αὐτῶν αἱ παραστάσεις τρέπονται ἢ μετασχηματίζονται εἰς ἄλλας ἴσας.

Ἕπονται παραδείγματά τινα μετασχηματισμῶν.

1) Τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta\gamma$ διὰ τοῦ $8\alpha\beta\gamma^2\delta$ εἶνε

$$\frac{3\alpha^2\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma^2\delta} \quad \text{ἢ ἁπλούστερον} \quad \frac{\gamma^2}{8\gamma\delta}.$$

2) Τὸ πηλίκον τῶν παραστάσεων

$$\frac{\gamma}{\chi-\alpha}-\frac{\gamma}{\chi+\alpha} \quad \text{διὰ} \quad 1+\frac{\gamma^2}{\chi^2-\alpha^2}$$

εἶνε

$$\frac{\dfrac{\gamma}{\chi-\alpha}-\dfrac{\gamma}{\chi+\alpha}}{1+\dfrac{\gamma^2}{\chi^2-\alpha^2}}.$$

ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi^2-\alpha^2$, ἤτοι

$(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)$, ὁ μὲν ἀριθμητὴς γίνεται

$$\frac{\gamma}{\chi-\alpha}(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)-\frac{\gamma}{\chi+\alpha}(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)$$

τουτέστι $\gamma(\chi+\alpha)-\gamma(\chi-\alpha)$, ἤτοι $2\alpha\gamma$·
ὁ δὲ παρονομαστὴς γίνεται $\chi^2-\alpha^2+\gamma^2$· ὥστε τὸ πηλίκον τῶν δοθεισῶν παραστάσεων εἶνε $\frac{2\alpha\gamma}{\chi^2-\alpha^2+\gamma^2}$.

3) Τὸ πηλίκον τοῦ πολυωνύμου $\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-8\chi^2+2\chi-1$ διαιρουμένου διὰ τοῦ χ^2-4, εἶνε

$$\frac{\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-8\chi^2+2\chi-1}{\chi^2-4}.$$

ἀλλ' ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, εὑρίσκεται πηλίκον τὸ $\chi^3-2\chi^2+8\chi-16$ καὶ ὑπόλοιπον $34\chi-65$· ἑπομένως εἶνε

$$\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-8\chi^2+2\chi-1=(\chi^2-4)(\chi^3-2\chi^2+8\chi-16)+$$
$$+(34\chi-65)\cdot$$

ὅθεν ἕπεται, ὅτι τὸ προκείμενον πηλίκον τῶν πολυωνύμων ἰσοῦται τῇ παραστάσει $\chi^3-2\chi^2+8\chi-16+\frac{34\chi-65}{\chi^2-4}$.

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος τοῦ πηλίκου δύο πολυωνύμων δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ, ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ διαιρετέου δὲν εἶνε μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου.

4) Ἡ διαφορὰ $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}$

μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}$

ἤτοι $\frac{\alpha(\alpha+\beta)-\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}$ ἢ $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

5) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$.

Παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶνε $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶνε $(\alpha-\beta)^2$, γράφομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)}.$$

ἢ ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος $(\alpha-\beta)$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

6) Τοῦ κλάσματος $\dfrac{8\alpha^4-16\alpha^3\beta+8\alpha^2\beta^2}{3\alpha^2-3\beta^2}$

ὁ μὲν ἀριθμητὴς γράφεται $8\alpha^2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$, ἤτοι $8\alpha^2(\alpha-\beta)^2$, ὁ δὲ παρονομαστὴς $3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$· ὅθεν τὸ κλάσμα ἁπλούστερον γίνεται

$$\frac{8\alpha^2(\alpha-\beta)}{3(\alpha+\beta)}.$$

7) Τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

εὑρίσκεται, ἂν τραπῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· γίνεται δὲ κοινὸς παρονομαστὴς αὐτῶν ὁ $\alpha^2-\beta^2$· διότι ἡ παράστασις αὕτη διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{2\alpha(\alpha-\beta)+2\beta(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

ἢ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων $3.\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων εἶνε ἀκέραια πολυώνυμα, ὁ κοινὸς παρονομαστής, εἰς ὃν ἀνάγονται πάντα, εἶνε παράστασις διαιρετὴ διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· τοιαύτη παράστασις εἶνε πάντοτε τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, ἀλλ' ἐνίοτε ὑπάρχει καὶ ἄλλη ἁπλουστέρα τούτου.

8) Τὸ γινόμεννν τῶν δύο κλασμάτων

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\beta^2} \qquad \frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$$

εἶνε $\dfrac{(\alpha-\beta).\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}$ ἢ $\dfrac{(\alpha-\beta).\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$

καὶ ἁπλούστερον $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^3-\beta^3}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$

Κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων θὰ γίνῃ ὁ $\alpha^3-\beta^3$.

2) Καταστῆσαι τὴν παράστασιν

$\dfrac{6\alpha\beta}{3\gamma-\delta}\left(\dfrac{\gamma+\delta}{4}-\dfrac{\delta}{3}\right)$ ἁπλουστέραν $\left(\text{Ἀπ. } \dfrac{\alpha\beta}{2}\right)$.

3) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν $\frac{3\alpha}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}-\frac{3}{\alpha+\beta}$.

4) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(1+\alpha\gamma)(1+\beta\delta)-(1+\alpha\delta)(1+\beta\gamma).$$

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2.$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=$$
$$=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)^2.$$

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2.$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\beta)^2+(2\alpha\gamma)^2.$$

5) Διαιρέσαι $\chi^{3\omega}-\psi^{3\omega}$ διὰ τοῦ $\chi^{\omega}-\psi^{\omega}$.

Ἐὰν θέσωμεν $\chi^{\omega}=\alpha$ καὶ $\psi^{\omega}=\beta$, καταντῶμεν εἰς τὴν διαίρεσιν

$\alpha^3-\beta^3$ διὰ τοῦ $\alpha-\beta$.

6) Πότε ἡ διαφορὰ $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\chi^{\nu}-\alpha^{\nu}$;

7) Νὰ διαιρεθῇ τὸ διώνυμον $\chi^5\psi^3-\chi^3\psi^5$ διὰ τοῦ $\chi-\psi$

(Ἀπ. πηλίκον $\chi^3\psi^3(\chi+\psi)$.)

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ λᾶθος εἰς τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν πράξεων, αἵτινες ἄγουσιν εἰς ἄτοπον ἐξαγόμενον.

Ἔστω $\alpha=\beta$, τότε θὰ εἶνε καὶ $\alpha\beta=\beta^2$·
προσέτι $\alpha\beta-\alpha^2=\beta^2-\alpha^2$ ἤτοι $\alpha(\beta-\alpha)=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$
ὅθεν ἕπεται (ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ $\beta-\alpha$) $\alpha=\beta+\alpha$
καὶ ἐπειδὴ $\alpha=\beta$, συνάγεται $\alpha=2\alpha$ ἢ καὶ $1=2$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΣΑΙ

Ὁρισμοί.

100. Τὰς ἰσότητας, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα, διακρίνομεν εἰς *ταὐτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις*.

Καὶ ταὐτότητα μὲν καλοῦμεν τὴν ἰσότητα, ἐὰν ἀληθεύῃ διὰ πάσας τὰς τιμὰς ἑκάστου τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχει· οἷαι εἶνε αἱ ἰσότητες

$$\alpha.\beta=\beta.\alpha, \qquad (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

καὶ πᾶσαι αἱ ἐν τοῖς προηγουμένοις εὑρεθεῖσαι.

Ἐξίσωσιν δὲ τὴν ἰσότητα, ἥτις ἀληθεύει μόνον ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα λάβωσιν ἁρμοδίας τιμάς· τοιαύτη εἶνε ἡ ἰσότης

$$2\chi=4,$$

ἥτις ἀληθεύει, μόνον ὅταν τὸ γράμμα χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως, ἅτινα πρέπει νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ ὡρισμένων ἀριθμῶν, ἵνα ἀληθεύσῃ ἡ ἰσότης, λέγονται *ἄγνωστοι* τῆς ἐξισώσεως. Οἱ δὲ ὡρισμένοι ἀριθμοί, οἵτινες ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται *τιμαὶ* τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχωσιν, ἡ ἐξίσωσις λέγεται *ἀδύνατος*.

Οἱ ἄγνωστοι παρίστανται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου $\varphi, \chi, \psi, \omega$.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων λέγεται *λύσις* τῆς ἐξισώσεως· εἶνε δὲ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς ἀλγέβρας· διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν προβλημάτων.

Ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἐξισώσεις, ὅταν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύωσιν ἀμφοτέρας.

Ἐν τῇ λύσει ἐξισώσεως οἱασδήποτε ἐπιτρέπεται πᾶσα μεταβολὴ αὐτῆς, *ἐὰν ἄγῃ εἰς ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον*.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

101. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. *Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $5\chi=15$·
ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς μ, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $5\chi+\mu=15+\mu$·
λέγω δέ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶνε ἰσοδύναμοι.

Διότι, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ πρώτη (λαμβάνοντος τοῦ ἀγνώστου ἁρμοδίαν τιμήν), ἤτοι ἂν τὰ δύο μέλη αὐτῆς γίνωσι δύο ἴσοι ἀριθμοί, θὰ μείνωσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ μ· ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ δευτέρα· καὶ τἀνάπαλιν, ἂν ἡ δευτέρα ἀληθεύσῃ, τὰ μέλη αὐτῆς θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ μ· ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ, καὶ ἡ πρώτη· ὥστε αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶνε ἰσοδύναμοι.

Ἐπειδὴ πᾶσα ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν (62), ἕπεται, ὅτι *καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.*

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\chi+7=\frac{\chi}{2}+\chi^2+12$

εἶνε ἰσοδύναμος τῇ $\chi+7=\frac{\chi}{2}+12$,

ἣν εὑρίσκομεν παραλείποντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὸν ἀριθμὸν χ^2.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς μ εἶνε ἀντίθετος ὅρῳ τινὶ τῆς ἐξισώσεως, ὁ ὅρος οὗτος ἀφανίζεται ἐκ τοῦ μέλους, ἐν ᾧ εὑρίσκετο, καὶ μεταβαίνει εἰς τὸ ἕτερον ἔχων ἐναντίον σημεῖον· ὅθεν

Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους ἐξισώσεως ὅρον τινὰ εἰς τὸ ἕτερον, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $3\chi-7=\frac{\chi}{2}+5+2\chi$·

προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν 7, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $3\chi=\frac{\chi}{2}+5+2\chi+7$,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ ὅρος 7, ὅστις εὑρίσκετο εἰς τὸ πρῶτον μέλος ἔχων τὸ σημεῖον —, εὑρίσκεται νῦν εἰς τὸ δεύτερον ἔχων τὸ +.

Ὁμοίως προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν ἀριθμὸν -2χ (ἢ ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τὸν 2χ), λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$3\chi-2\chi=\frac{\chi}{2}+12.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ ὅρος 2χ, ὅστις εὑρίσκετο εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἔχων τὸ σημεῖον $+$, μετέβη εἰς τὸ πρῶτον καὶ ἔχει νῦν τὸ $-$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $$8\chi-3=5\chi-\frac{\chi}{2}+12\cdot$$
μεταφέροντες τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους εἰς τὸ πρῶτον καὶ τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν
$$-5\chi+\frac{\chi}{2}-12=-8\chi+3$$
γράφοντες δὲ τὸ δεύτερον μέλος ὡς πρῶτον καὶ τὸ πρῶτον ὡς δεύτερον, εὑρίσκομεν $$-8\chi+3=-5\chi+\frac{\chi}{2}-12.$$

102. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν* (πλὴν τοῦ 0), *προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $$12\chi+8=5\chi+10+\frac{\chi}{3}.$$
ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἀμφότερα ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν μ, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν
$$\left(12\chi+8\right)\mu=\left(5\chi+10+\frac{\chi}{3}\right)\mu$$
ἢ $$12\mu\chi+8\mu=5\mu\chi+10\mu+\frac{\mu\chi}{3}.$$
λέγω δέ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶνε ἰσοδύναμοι.

Καὶ ὄντως, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ πρώτη, ἤτοι ἂν τὰ μέλη αὐτῆς γίνωσιν ἴσοι ἀριθμοί, θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ἐπὶ τὸν μ· ἐπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ δευτέρα· ἂν δὲ πάλιν ἀληθεύσῃ ἡ δευτέρα, τὰ μέλη αὐτῆς θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν αὐτῶν διὰ τοῦ μ (διότι ὁ μ διαφέρει τοῦ 0)· ἐπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ πρώτη· ὥστε εἶνε ἰσοδύναμοι.

Ἐπειδὴ πᾶσα διαίρεσις (πλὴν τῆς διὰ τοῦ 0) ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν (50), ἕπεται ὅτι, *καὶ ἂν διαιρεθῶσι τὰ μέλη ἐξισώσεως ἀμφότερα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.*

ΣΗΜ. Α'. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη οἱασδήποτε ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ 0, εὑρίσκομεν πάντοτε $0=0$· ἤτοι ἰσότητα, ἐξ ἧς οὐδεὶς ἄγνωστος δύναται νὰ ὁρισθῇ.

ΣΗΜ. Β'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης μ εἶνε παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων, αἱ ἐξισώσεις εἶνε ἰσοδύναμοι μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἵτινες δὲν μηδενίζουσι τὴν παράστασιν μ·

Οὕτω λ. χ. ἡ ἐξίσωσις $\quad (\alpha+\beta)\chi=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2,$
ἐν ᾗ ὁ χ θεωρεῖται ἄγνωστος, εἶνε ἰσοδύναμος τῇ

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\chi=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)$$

ἤτοι
$$(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha^3-\beta^3,$$

ἐν ὅσῳ ὑποτίθεται α διάφορον τοῦ β, οὐχὶ δὲ καὶ ὅταν εἶνε $\alpha=\beta$.

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $(\alpha-\beta)\chi=\alpha^2-\beta^2$ εἶνε ἰσοδύναμος τῇ

$$\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},$$

ἣν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς πρώτης διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, μόνον ἐν ὅσῳ τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ β.

ΣΗΜ Γ'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης μ εἶνε παράστασις περιέχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶνε ἐν γένει ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $\quad 5\chi-3=4\chi-1,$
ἐξ ἧς, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi-1$, εὑρίσκομεν $\quad (\chi-1)(5\chi-3)=(\chi-1)(4\chi-1)$·
ἀληθεύει δὲ αὕτη, ὅταν τεθῇ $\chi=1$, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ πρώτη.

103. Πόρισμα. *Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν πάντας τοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων ἐξισώσεως.* Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\quad \frac{\chi}{3}+\frac{5}{2}=\frac{11\chi}{5}-3\chi$

πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 2. 3. 5, λαμβάνομεν

$$2.3.5.\frac{\chi}{3}+2.3.5.\frac{5}{2}=2.3.5.\frac{11\chi}{5}-2.3.5.3\chi,$$

ἢ
$$2.5.\chi+3.5.5=2.3.11\chi-2.3.5.3\chi,$$

ἤτοι
$$10\chi+75=66\chi-90\chi.$$

...σης ἐξισώ... ...τα προ-

Ὅταν οἱ παρονομασταὶ εἶνε ὡρισμένοι ἀριθ... πλασιαστής, δι' οὗ ἐξαλείφονται οἱ παρονομα... τῶν ἐξισώσ... νὸν πολλαπλάσιον αὐτ... ...μόνης τ... $\chi=3^{\omega}, 44'$,

Ἔστ... ...πὸ ... ...ήματος.

$\frac{\chi}{7}$, καὶ εἰς 4 ὥρας ῥέουσι λίτραι $\frac{4\chi}{7}$· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἐκ τῶν ἄλλων δύο κρηνῶν ῥέουσιν εἰς 4 ὥρας λίτραι $\frac{4\chi}{9}$ καὶ $\frac{4\chi}{12}$ ἢ $\frac{\chi}{3}$.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $$\frac{4\chi}{7}+\frac{4\chi}{9}+\frac{\chi}{3}+50=\chi$$
καὶ τὸν περιορισμὸν χ=θετικῷ ἀριθμῷ.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=-143\frac{2}{11}$· ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται· διότι δὲν πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ὥστε τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

120. *Πατὴρ τις ἀφίνει εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του κληρονομίαν 3530 δραχ. Διατάσσει δὲ ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος διπλάσια τοῦ δευτέρου πλὴν 2000 δραχμῶν, ὁ δεύτερος τριπλάσια τοῦ τρίτου πλὴν 3000 δραχμῶν, καὶ ὁ τρίτος τετραπλάσια τοῦ τετάρτου πλὴν 4000 δραχμῶν. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος;*

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ εἶνε μὲν τέσσαρα τὰ ἄγνωστα, τουτέστιν αἱ τέσσαρες μερίδες, ἀλλ' ἐκ τῆς μερίδος τοῦ τελευταίου υἱοῦ εὑρίσκονται εὐκόλως αἱ τῶν λοιπῶν κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Διὰ τοῦτο παριστῶμεν τὴν μερίδα τοῦ τετάρτου διὰ τοῦ χ, τότε ἡ μερὶς τοῦ τρίτου θὰ εἶνε $4\chi-4000$·
ἡ τοῦ δευτέρου $3.(4\chi-4000)-3000$, ἢ $12\chi-15000$·
ἡ δὲ τοῦ πρώτου $2.(12\chi-15000)-2000$, ἤτοι $24\chi-32000$.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν τεσσάρων υἱῶν αἱ μερίδες συναποτελοῦσι προδήλως τὴν ὅλην κληρονομίαν, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις
$$\chi+(4\chi-4000)+(12\chi-15000)+(24\chi-32000)=3530.$$
Ὁ ἄγνωστος χ πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ εἶνε θετικὸς καὶ τὰς μερίδας πάσας νὰ καθιστᾷ θετικάς.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=1330$, ἐκ δὲ ταύτης προκύπτουσιν αἱ μερίδες κατὰ σειρὰν —80, 960, 1320, 1330.

Ἡ λύσις αὕτη εἶνε ἀπορριπτέα ὡς μὴ πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ
ἡ πρώτη· [illegible] ματος· ὥστε τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.
Ἐπειδὴ πᾶσ[illegible] *Ποσόν τι δραχμῶν διενεμήθη μεταξὺ τεσσάρων ἀνθρώπων,*
σιασμὸν (50), ἐκ [illegible] *πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ* [illegible] *δεύτερος τὸ τρίτον τοῦ*
τερα διὰ τοῦ αὐτοῦ [illegible] *ὁ δὲ* [illegible] *ὑπολοίπου πλὴν 1,*
ΣΗΜ. Α'. Πολλαπλασι[illegible] *σαι ἦσαν αἱ δρα-*
0, εὑρίσκομεν πάντοτε 0=0· [illegible]
νεται νὰ ὁρισθῇ. [illegible] τῆς ἀνα[illegible]

Ἐὰν παρασταθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν διὰ τοῦ χ, ὁ πρῶτος ἔλαβεν

$$\frac{1}{2}\chi-6$$

ἔμεινε δὲ ὑπόλοιπον ἐκ δραχμῶν $\chi-\left(\frac{1}{2}\chi-6\right)$ ἢ $\frac{1}{2}\chi+6\cdot$

ὁ δεύτερος ἔλαβεν $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\chi+6\right)-2$, ἤτοι $\frac{1}{6}\chi\cdot$

ἀφαιρουμένης δὲ τῆς μερίδος ταύτης ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, μένει ὑπόλοιπον $\frac{1}{2}\chi+6-\frac{1}{6}\chi$, ἤτοι $\frac{1}{3}\chi+6\cdot$

ὁ τρίτος ἔλαβεν $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\chi+6\right)-1$, ἤτοι $\frac{1}{12}\chi+\frac{1}{2}\cdot$

ἀφαιρουμένης δὲ τῆς μερίδος τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, μένει ὑπόλοιπον $\frac{1}{3}\chi+6-\left(\frac{1}{12}\chi+\frac{1}{2}\right)$ ἤτοι $\frac{1}{4}\chi+\frac{11}{2}\cdot$

τοῦτο δὲ εἶνε τὸ μερίδιον τοῦ τετάρτου· ὅθεν εἶνε $\frac{1}{4}\chi+\frac{11}{2}=13$

Πρέπει δὲ νὰ εἶνε καὶ ὁ χ θετικὸς καὶ νὰ καθιστᾷ καὶ τὰς μερίδας πάσας θετικάς.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=30\cdot$ καὶ ἐκ τούτου τὰς μερίδας τῶν τεσσάρων ἀνθρώπων 9, 5, 3, 13·
ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

122. *Δύο ἁτμάμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων ἀπεχουσῶν 280 στάδια ἀπ' ἀλλήλων καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς μεταξὺ τῶν πόλεων ὁδοῦ. Ἡ πρώτη διατρέχει καθ' ὥραν 45 στάδια, ἡ δὲ δευτέρα 30. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πρώτης πόλεως θὰ συναντηθῶσιν ;*

Εὑρεθέντος τοῦ πρώτου, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ δεύτερον. Ἔστω λοιπὸν ἡ συνάντησις μετὰ χ ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῶν ἁτμαμαξῶν. Ἡ μὲν πρώτη, ἐπειδὴ καθ' ὥραν διατρέχει 45 στάδια, θὰ διατρέξῃ κατὰ τὰς χ ὥρας 45χ στάδια· ἡ δὲ δευτέρα θὰ διατρέξῃ 30χ στάδια. Ἀποτελοῦσι δὲ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως τὰ διανυσθέντα διαστήματα προφανῶς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων· ὥστε εἶνε

$$45\chi+30\chi=280\cdot$$

πρέπει δε νὰ εἶνε καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν λύοντες $\chi=3^{\omega\rho}, 44'$,
ἥτις λύσις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

ΣΗΜ. Τὴν λύσιν εὑρίσκει τις καὶ ἄνευ ἐξισώσεως παρατηρῶν, ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις τῶν ἁτμαμαξῶν ἐλαττοῦται καθ' ἑκάστην ὥραν κατὰ τὰ ὑπ' αὐτῶν διανυόμενα 75 στάδια.

123. *Κύριος συνεφώνησεν ὑπηρέτην 230 δραχμὰς κατ' ἔτος καὶ μίαν ἐνδυμασίαν· ἀποπέμψας δὲ αὐτὸν μετὰ 10 μῆνας, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν 180 δραχμὰς καὶ τὴν ἐνδυμασίαν. Πόσον τιμᾶται ἡ ἐνδυμασία;*

Ἔστω χ ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας. Ὁ ἐτήσιος μισθὸς τοῦ ὑπηρέτου σύγκειται ἐκ τῆς ἐνδυμασίας καὶ ἐκ τῶν 230 δραχμῶν, ἤτοι εἶνε $230+\chi$· ἑπομένως ὁ μηνιαῖος εἶνε $\frac{230+\chi}{12}$ καὶ διὰ 10 μῆνας ἔπρεπε νὰ λάβῃ $\frac{10}{12}(230+\chi)$, ἢ $\frac{5}{6}(230+\chi)$· ἔλαβε δὲ $180+\chi$· ὥστε εἶνε

$$\frac{5}{6}(230+\chi)=180+\chi·$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=70$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

124. *Θέλει τις μὲ 55 δραχμὰς νὰ ἀγοράσῃ 12 πήχεις ἐκ δύο ὑφασμάτων· καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς τιμᾶται ὁ πῆχυς 5 δραχμὰς τοῦ δὲ ἄλλου 3. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ ἐκ τοῦ πρώτου ὑφάσματος καὶ πόσους ἐκ τοῦ δευτέρου;*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τοὺς πήχεις τοῦ πρώτου, οἱ τοῦ δευτέρου θὰ εἶνε $12-\chi$.

Ἐπειδὴ εἷς πῆχυς τοῦ πρώτου ἀξίζει 5 δραχμάς, οἱ χ πήχεις ἀξίζουν 5χ δραχμάς.

Ἐπειδὴ εἷς πῆχυς τοῦ δευτέρου ἀξίζει 3 δραχμάς, οἱ $12-\chi$ πήχεις ἀξίζουν $3.(12-\chi)$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν πήχεων εἶνε 55 δραχμαί, συνάγεται ἡ ἐξίσωσις
$$5\chi+3(12-\chi)=55·$$
πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ τῶν πήχεων νὰ εἶνε ἀμφότεροι θετικοί.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=9\frac{1}{2}$ καὶ $12-\chi=2\frac{1}{2}$ ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶνε παραδεκτή, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

125. *Εἰς 32 λίτρας θαλασσίου ὕδατος περιέχεται 1 λίτρα ἅλατος. Πόσον γλυκὺ ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς αὐτό, ἵνα τεσσαράκοντα λίτραι τοῦ κράματος περιέχωσιν $\frac{1}{5}$ τῆς λίτρας ἅλατος;*

Ἂς προστεθῶσι χ λίτραι γλυκέος ὕδατος· ὅτε τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ λίτρας $\chi+32$. Ἐπειδὴ αἱ 40 λίτραι τοῦ κράματος περιέχουσιν $\frac{1}{5}$ τῆς λίτρας ἅλατος, ἡ μία λίτρα τοῦ κράματος θὰ περιέχῃ ἅλατος $\frac{1}{200}$ τῆς λίτρας, καὶ τὸ ὅλον κρᾶμα, ἤτοι αἱ $32+\chi$ λίτραι θὰ περιέχωσιν ἅλατος λίτρας $\frac{32+\chi}{200}$, ἀλλὰ τὸ ἐν τῷ κράματι ὑπάρχον ἅλας εἶνε μία λίτρα· ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{32+\chi}{200}=1\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=168$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

126. *Εἰπέ τις: ἐὰν μοὶ τριπλασιάσῃ τις ὅσα ἔχω, δίδω εἰς αὐτὸν 27 δραχμάς· ἐξεπληρώθη ἡ αἴτησίς του τρὶς καὶ ἔχασε πάντα ὅσα εἶχε· πόσα εἶχεν;*

Ἔστωσαν χ αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐν ἀρχῇ· τὸ ποσὸν τοῦτο ἐτριπλασιάσθη, ἤτοι ἔγινε 3χ, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἔδωκεν 27 δραχμάς. Λοιπὸν τῷ ἔμειναν δραχμαὶ $3\chi-27$· ἔπειτα πάλιν ἐτριπλασιάσθη τὸ ποσὸν τοῦτο καὶ ἐκ τοῦ τριπλασιασθέντος ἔδωκεν 27 δραχμάς· ὥστε τῷ ἔμειναν

$$3(3\chi-27)-27, \text{ ἢ } 9\chi-108.$$

Ὁμοίως μετὰ τὸν τρίτον τριπλασιασμὸν καὶ τὴν πληρωμὴν τῶν 27 δραχμῶν τῷ ἔμειναν $27\chi-351$· ἐπειδὴ δὲ ἔχασεν ὅλα ὅσα εἶχε, θὰ εἶνε

$$27\chi-351=0\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=13$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα,

ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

127. *Δώδεκα ἄτομα (ἄνδρες καὶ γυναῖκες) ἐδαπάνησαν ὁμοῦ διὰ τὸ δεῖπνον 55 δραχμάς· καὶ τῶν μὲν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε 5 δραχμάς, τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστη 3. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;*

Εὑρεθέντος τοῦ πλήθους τῶν ἀνδρῶν, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ πλῆθος τῶν γυναικῶν. Ἔστω λοιπὸν χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, τότε ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶνε $12-\chi$.

Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 5 δραχμάς, οἱ χ ἄνδρες ἐπλήρωσαν δραχμὰς 5χ.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γυναικῶν ἐπλήρωσε 3 δραχμάς, αἱ $(12-\chi)$ γυναῖκες ἐπλήρωσαν $3(12-\chi)$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὅλη δαπάνη τοῦ δείπνου εἶνε 55 δραχμαί, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $5\chi+3(12-\chi)=55\cdot$ πρέπει δὲ καὶ ὁ τῶν ἀνδρῶν καὶ ὁ τῶν γυναικῶν ἀριθμὸς νὰ εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=9\frac{1}{2}\cdot$ καὶ $12-\chi=2\frac{1}{2}\cdot$ ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

128. *Ἐρωτηθείς τις, πόσα τέκνα ἔχει, ἀπεκρίθη· ἀγοράσας μῆλα ἠθέλησα νὰ δώσω 7 εἰς ἕκαστον τέκνον μου, ἀλλὰ μοῦ ἔλειψαν 4, τότε ἔδωκα 4 μῆλα εἰς ἕκαστον καὶ μοῦ ἐπερίσσευσαν 3. Πόσα τέκνα εἶχεν ὁ ἄνθρωπος οὗτος;*

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν τέκνων· κατὰ τὴν πρώτην διανομὴν ἦσαν τὰ μῆλα $7\chi-4\cdot$ κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $4\chi+3\cdot$ καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων ἦτο ὁ αὐτὸς καὶ τὰς δύο διανομάς, ἕπεται

$$7\chi-4=4\chi+3\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ὁ χ θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτουσα λύσις $\chi=2\frac{1}{3}$ ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

129. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις εἴτε διὰ 7 εἴτε διὰ 9 διαιρεθῇ νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ δύο πηλίκα νὰ διαφέρωσι κατὰ 4.*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἐπειδὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ 7 ἢ τοῦ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3, ἕπεται, ὅτι κατὰ 3 ἐλαττούμενος διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ ὑπὸ τοῦ 7 καὶ ὑπὸ τοῦ 9· καὶ τὰ πηλίκα εἶνε $\frac{\chi-3}{7}$ καὶ $\frac{\chi-3}{9}$. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα διαφέρουσι κατὰ 4, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi-3}{7}-\frac{\chi-3}{9}=4\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ὁ χ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=129\cdot$ ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα,

ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ περιέχηται μεταξὺ ὁρίων τινῶν.

130. *Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{5}$ ἔργου τινὸς ἐργαζόμενοι 4 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐπὶ 9 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν 15 ἐργάται, ἵνα ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον εἰς 3 ἡμέρας;*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν. Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν 15 ἐργατῶν θὰ ἐργάζηται χ ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς τρεῖς ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ 3χ ὥρας· χρειάζονται λοιπὸν οἱ 15 ἐργάται διὰ τὰ μένοντα $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου 3χ ὥρας· ἐπομένως εἷς μόνος ἐργάτης θὰ χρειασθῇ διὰ τὰ αὐτὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου 15πλάσιον χρόνον, ἤτοι $15.3.\chi$.

Ἀφ' ἑτέρου οἱ 8 ἐργάται διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου χρειάζονται ὥρας 4.9· ἐπομένως εἷς μόνος χρειάζεται $\left(\text{διὰ τὸ } \frac{1}{5}\right)$ $4.9.8$ ὥρας, καὶ διὰ τὰ $\frac{4}{5}$ χρειάζεται ὥρας $4.9.8.4$. Ἐξισοῦντες δὲ τὰς ὥρας, τὰς ὁποίας χρειάζεται εἷς ἐργάτης διὰ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου, εὑρίσκομεν

$$15.3.\chi = 4.9.8.4\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 24· διότι τοιοῦτον εἶνε φύσει τὸ ζητούμενον.

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi = 25\frac{3}{5}$· ἐπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ὥστε τὸ προτεινόμενον εἶνε ἀδύνατον νὰ πραγματωθῇ.

131. *Αἱ ἡλικίαι δύο ἀνθρώπων εἶνε τοῦ μὲν 50, τοῦ δὲ 60 ἔτη. Ζητεῖται, πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶνε, ἢ ἦτο, πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς ὁ 40 πρὸς τὸν 41.*

Αἱ παραστάσεις $50+\chi$ καὶ $60+\chi$ ἐκφράζουσι τὰς ἡλικίας τῶν ἀνθρώπων μετὰ παρέλευσιν χ ἐτῶν· ἀλλ' αἱ αὐταὶ παραστάσεις ἐκφράζουσι καὶ τὰς ἡλικίας αὐτῶν πρὸ χ ἐτῶν, ἂν τὰ παρελθόντα ἔτη σημαίνωνται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\frac{50+\chi}{60+\chi} = \frac{40}{41}\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς $50+\chi$, ὡς ἀριθμὸς ἡλικίας νὰ εἶνε θετικός, καὶ ὁ $60+\chi$ (ἡ μεγαλητέρα ἡλικία) νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου. ('Εκ τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ περιορισμοὶ ἐνίοτε δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσιν ἀκριβῶς).

'Η ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=350$· ἀλλὰ μετὰ παρέλευσιν 350 ἐτῶν οὐδέτερος τῶν ἀνθρώπων θὰ ζῇ· ὥστε ἡ λύσις αὕτη εἶνε ἀπορριπτέα καὶ τὸ προτεινόμενον εἶνε ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

132. *Πατήρ τις εἶνε 37 ἐτῶν ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 9· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο, ἢ θὰ εἶνε διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;*

Παριστῶντες διὰ τοῦ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν (θετικὸν μέν, ἂν τὰ ἔτη εἶνε τοῦ μέλλοντος χρόνου, ἀρνητικὸν δέ, ἂν τοῦ παρελθόντος) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$37+\chi=2(9+\chi)$$

οἱ δὲ περιορισμοὶ εἶνε ὅμοιοι τοῖς τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

'Η ἐξίσωσις αὕτη λυομένη δίδει $\chi=19$· ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶνε παραδεκτὴ ὡς πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

133. *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 56 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου διαιρεθὲν νὰ παρέχῃ πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.*

'Εὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ μικρότερον τῶν μερῶν, τὸ μεγαλήτερον θὰ εἶνε $56-\chi$· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο διαιρούμενον διὰ τοῦ χ ἀφίνει ὑπόλοιπον 2, ἕπεται, ὅτι κατὰ 2 ἐλαττωθὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ χ καὶ παρέχει πηλίκον 5· τοῦτ' ἔστι

$$\frac{54-\chi}{\chi}=5$$

πρέπει δὲ ἀμφότερα τὰ μέρη νὰ εἶνε θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

'Η ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=9$· ὅθεν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ 56 εἶνε 9 καὶ 47· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

134. *Νὰ μερισθῇ ὁ 51 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ τὸ πέμπτον τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελῶσι τὸν 21.*

"Εστω χ τὸ πρῶτον μέρος· τότε τὸ δεύτερον θὰ εἶνε $51-\chi$· εἶνε δέ, ὡς δηλοῖ ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος,

$$\frac{\chi}{3}+\frac{51-\chi}{5}=21\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τοῦ 51.

'Η ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=81$· ἐπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Εἰς τὰ 9 τέκνα του ἔδωκεν ἄνθρωπός τις 53 δραχμὰς καὶ ἕκαστον μὲν κοράσιον ἔλαβε 5 δραχμάς, ἕκαστος δὲ υἱὸς 3· πόσοι ἦσαν οἱ υἱοὶ καὶ πόσα τὰ κοράσια;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν κορασίων, ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν θὰ εἶνε $9-\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον κοράσιον ἔλαβε 5 δραχμάς, τὰ χ κοράσια ἔλαβον 5χ δραχμάς.

Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος υἱὸς ἔλαβε 3 δραχμάς, οἱ $9-\chi$ υἱοὶ ἔλαβον $3(9-\chi)$ δραχμάς.

Ἀλλ' ὅλα ὁμοῦ τὰ τέκνα ἔλαβον 53 δραχμάς· ὅθεν συνάγεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$5\chi+3(9-\chi)=53\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς χ νὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 9.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=13$· ἡ δὲ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος· τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶνε ἀδύνατον· (τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τούτου, ὅτι καὶ ἂν ἦσαν κοράσια ὅλα τὰ τέκνα, πάλιν θὰ ἐλάμβανον μόνον 45 δραχμὰς καὶ ὄχι 53).

135. *Δύο πίθοι περιέχουσιν ὁ μὲν 400 ὀκάδας οἴνου, ὁ δὲ 280· ἐὰν ἀνοιχθῶσιν αἱ στρόφιγγες αὐτῶν, ἐκρέουσιν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 9 ὀκάδες τὴν ὥραν, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 7. Ζητεῖται, ἂν ἀνοιχθῶσι συγχρόνως ἀμφότεραι αἱ στρόφιγγες, μετὰ πόσας ὥρας θὰ ὑπολειφθῶσιν ἐν τοῖς πίθοις ἴσα ποσὰ οἴνου.*

Ἔστω μετὰ χ ὥρας· τότε θὰ περιέχωνται ἐν μὲν τῷ πρώτῳ $400-9\chi$, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ $280-7\chi$· ὥστε θὰ εἶνε

$$400-9\chi=280-7\chi\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς χ νὰ εἶνε θετικὸς καὶ νὰ καθιστᾷ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά· διότι μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶν χ ὡρῶν πρέπει νὰ μένῃ πράγματι οἶνος ἐν τοῖς πίθοις.

Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=60$· ἀλλὰ μετὰ 60 ὥρας οὐδέτερος τῶν πίθων περιέχει οἶνον· διότι ὁ μὲν πρῶτος κενοῦται εἰς $\frac{400}{9}$ ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος εἰς 40· ἐπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται καὶ τὸ προτεινόμενον δὲν δύναται νὰ πραγματωθῇ.

136. *Δύο ἄνθρωποι ἔχουσιν ὁ μὲν 100, ὁ δὲ 50 δραχμάς· δαπανῶσι δὲ καθ' ἑκάστην ὁ μὲν πρῶτος 3 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 2· μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχωσιν ἴσας δραχμάς;*

Ἔστω μετὰ χ ἡμέρας· τότε ὁ μὲν πρῶτος θὰ ἔχῃ $100-3\chi$, ὁ δὲ δεύτερος $50-2\chi$, καὶ θὰ εἶνε $100-3\chi=50-2\chi$· πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ καθιστᾷ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά· διότι μετὰ παρέλευσιν τῶν χ ἡμερῶν πρέπει νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι ποσόν τι δραχμῶν.

Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=50$· ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται· διότι οὐδέτερος τῶν ἀνθρώπων ἔχει τι μετὰ 34 ἡμέρας· ὥστε τὸ προτεινόμενον εἶνε ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

Παρατήρησις.

137. Ἐκ τῶν προηγουμένων γίνεται καταφανές, ὅτι ἡ ἐξίσωσις μόνη δὲν ἐξαρκεῖ συνήθως εἰς τὴν πιστὴν καὶ τελείαν ἀλγεβρικὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος· ἀλλ' εἶνε ἀνάγκη νὰ ἐπιβάλλωνται ἐπὶ τοῦ ἀγνώστου καὶ περιορισμοί τινες, ἤτοι ὅροι ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀγνώστου ποσοῦ πηγάζοντες καὶ ὅλως ἄσχετοι ὄντες πρὸς τὴν διὰ τῆς ἐξισώσεως ἐκφραζομένην σχέσιν τῶν γνωστῶν πρὸς τὸν ἄγνωστον. Καὶ πάντα τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ἡ σχέσις τοῦ γνωστοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον εἶνε ἡ αὐτή, ἄγουσιν εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, οἱαςδήποτε φύσεως ποσὰ καὶ ἂν περιέχωσι (τοιαῦτα λ. χ. εἶνε τὰ προβλήματα τῶν ἐδαφίων 124 καὶ 127), δύνανται ὅμως νὰ διαφέρωσι κατὰ τοὺς περιορισμούς. Πόσον δὲ σπουδαίως ἐπιδρῶσιν οἱ περιορισμοὶ εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἐμάθομεν ἐκ τῶν λυθέντων προβλημάτων.

Πολλάκις εἶνε δυνατὸν δι' ἐλαφρᾶς τινος μεταβολῆς ἢ γενικεύσεως τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος νὰ ἄρωμεν τοὺς περιορισμούς, ἢ νὰ καταστήσωμεν αὐτοὺς ὀλιγώτερον στενούς, ὥστε ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρισκομένη λύσις νὰ εἶνε ἐφαρμοστή. Οὕτως ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι, ἂν παραδεχθῶμεν ἐξ ἀρχῆς, ὅτι τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς θὰ ἔχωσιν οἱ ἄνθρωποι, δύναται καὶ ἀρνητικὸν νὰ εἶνε, ἤτοι ἀντὶ περιουσίας νὰ ἔχωσιν ἴσον χρέος, ὁ περιορισμὸς ἐπὶ τοῦ ἀγνώστου αἴρεται καὶ ἡ εὑρισκομένη λύσις εἶνε ἐφαρμοστή. Ὁμοίως ἐν τοῖς προβλήμασι τῶν ἐδαφίων 131 καὶ 132 παρεδέχθημεν ἐξ ἀρχῆς, ὅτι τὸ προτεινόμενον δύναται νὰ γίνῃ ἢ εἰς τὸ παρελθὸν ἢ εἰς τὸ μέλλον. Αἱ γενικεύσεις αὗται τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος δέον εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς νὰ γίνωνται πρὸ τῆς συντάξεως τῆς ἐξισώσεως· οὐχὶ δὲ νὰ λύωμεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν καὶ ἔπειτα νὰ ζητῶμεν τὴν σημασίαν τῆς τοιαύτης ἢ τοιαύτης τιμῆς τοῦ ἀγνώστου· διότι ὁ ἄγνωστος δὲν δύναται βεβαίως διὰ τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐκτελεσθεισῶν πράξεων νὰ ἀποκτήσῃ ποτὲ σημασίαν, τὴν ὁποίαν ἡμεῖς ἐξ ἀρχῆς δὲν ἐδώκαμεν εἰς αὐτόν.

Προβλήματα γενικά.

138. Ὅταν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶνε ἀριθμοί, ἐπὶ τοῦ εὑρεθέντος ἀγνώστου ἀριθμοῦ οὐδὲν ἴχνος τῶν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ γενομένων πράξεων σῴζεται. Ἀλλ᾽ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ, ἐπειδὴ οἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν γινόμενοι συλλογισμοὶ εἶνε ἀδιάφοροι πρὸς τὸ μέγεθος τῶν ἀριθμῶν καὶ πρὸς τὸ εἶδος αὐτῶν, (ὡς στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν γενικῶν σχέσεων τῶν ἀριθμῶν), δύναται ἕκαστος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν νὰ παριστᾶται δι᾽ ἑνὸς γράμματος καὶ τότε τὰ γράμματα ταῦτα διασῴζονται μέχρι τέλους ἐν τῇ λύσει καὶ εὑρίσκονται ἐπ᾽ αὐτῶν σεσημειωμέναι αἱ πράξεις, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπ᾽ αὐτῶν, ἵνα εὑρεθῇ ἐξ αὐτῶν ὁ ἄγνωστος. Τοῦτο δὲ καὶ τὴν ἐξάρτησιν τοῦ ἀγνώστου ἀπὸ τῶν γνωστῶν σαφεστέραν ποιεῖ καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος καθιστᾷ γενικήν, δηλαδὴ ἁρμόζουσαν εἰς πάντα τὰ προβλήματα, ὅσα μόνον κατὰ τὸ μέγεθος (ἢ καὶ τὸ εἶδος) τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διαφέρουσι.

Πρόβλημα, οὗτινος τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων, λέγεται *γενικόν*.

139. Ἡ ἐκ τῆς λύσεως γενικοῦ προβλήματος προκύπτουσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου περιέχει ἐν γένει τὰ γράμματα, δι᾽ ὧν παρίστανται τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος· ὥστε εἶνε ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ τύπος· κατὰ τὰς διαφόρους δὲ τιμὰς τῶν γραμμάτων τούτων ἢ κατὰ τὰς διαφόρους ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν περὶ αὐτῶν, δύναται τὸ πρόβλημα νὰ καθιστᾶται δυνατὸν ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον. Ἡ ἔρευνα τῶν διαφόρων τούτων περιπτώσεων λέγεται *διερεύνησις* τοῦ γενικοῦ προβλήματος.

Παραδείγματα τοιούτων προβλημάτων καὶ τῆς διερευνήσεως αὐτῶν ἔστωσαν τὰ ἑπόμενα.

1ον

140. *Πατήρ τις εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε, ἢ πότε ἦτο, διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;*

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶνε (παραβλ. ἐδ. 132).

$$\alpha+\chi=2(\beta+\chi).$$

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, καὶ $\beta+\chi$, ὡς ἀριθμοὶ ἡλικίας πρέπει νὰ εἶνε θετικοί· νὰ εἶνε δὲ καὶ $\alpha>\beta$· μηδὲ πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τις ἐξ αὐτῶν τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου.

$$\chi=\alpha-2\beta.$$

Διερεύνησις. Ἂν εἶνε $\alpha < 2\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶνε ἀρνητική· τοῦτ' ἔστι τὸ προτεινόμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν· εἶνε δὲ παραδεκτὴ ἡ λύσις αὕτη· διότι αἱ ἡλικίαι ἦσαν τότε

$$\alpha+(\alpha-2\beta) \quad \text{καὶ} \quad \beta+(\alpha-2\beta),$$

ἤτοι $2(\alpha-\beta)$ καὶ $\alpha-\beta$, καὶ εἶνε ἀμφότεραι θετικαί.

Ἂν δὲ εἶνε $\alpha > 2\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶνε θετική· τοῦτ' ἔστι τὸ προτεινόμενον θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον, ὅταν ὁ μὲν πατὴρ θὰ εἶνε $2(\alpha-\beta)$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $\alpha-\beta$· εἶνε δὲ παραδεκτὴ ἡ λύσις αὕτη, ἐὰν ἡ μεγαλητέρα ἡλικία $2(\alpha-\beta)$ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

2ον

141. *Ἐργάτης χρειάζεται α ὥρας, ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι, δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται β ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ τρίτος γ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον;*

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ὡς καὶ ὁ χ, πρέπει νὰ εἶνε πάντες θετικοί.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε (παρβλ. ἐδ. 118)

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}=1\cdot$$

καὶ λύοντες εὑρίσκομεν $\quad \chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\cdot$

εἶνε δὲ ἡ λύσις αὕτη παραδεκτή.

3ον

142. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος* $\dfrac{\alpha}{\beta}$ *νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ κλάσματι* $\dfrac{\gamma}{\delta}$.

Περιορισμός. Οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ τῶν δοθέντων κλασμάτων πρέπει νὰ διαφέρωσι τοῦ 0.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\gamma}{\delta}$$

ἐξ ἧς ἕπεται, ἂν ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0,

$$\chi(\gamma-\delta)=\beta\gamma-\alpha\delta. \qquad (1)$$

Ὅθεν ὑποθέτοντες τὴν διαφορὰν $\gamma-\delta$ διάφορον τοῦ μηδενός, τουτέστι τὸ δοθὲν κλάσμα $\dfrac{\gamma}{\delta}$ διάφορον τῆς μονάδος 1, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma-\delta}\cdot \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Πλὴν τῶν δύο περιπτώσεων, τὰς ὁποίας ἐξῃρέσαμεν, ἵνα φθάσωμεν εἰς τὴν λύσιν ταύτην, εἰς πάσας τὰς λοιπὰς ἡ λύσις εἶνε παραδεκτή.

Ἐὰν εἶνε $\gamma=\delta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=\gamma(\beta-\alpha)$, καὶ τὸ προτεινόμενον εἶνε ἑπομένως ἀδύνατον, ἂν δὲν εἶνε καὶ $\alpha=\beta$· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο συμβαίνῃ, ἡ ἐξίσωσις (1) καταντᾷ $0=0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀόριστον, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ζητούμενον.

Ἐάν ποτε ὁ τύπος (2) δώσῃ $\chi=\beta$, ἡ λύσις αὕτη πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ· διότι $\beta-\chi$ ὑπετέθη (ἵνα ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταὶ) διάφορον τοῦ 0· τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶνε $\alpha=\beta$· τουτέστιν ὅταν τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε ἴσον τῇ μονάδι 1· καὶ ὄντως τότε ὁ τύπος γίνεται

$$\chi=\frac{\beta(\gamma-\delta)}{\gamma-\delta}=\beta\cdot$$

ὅτι δὲ τότε τὸ προτεινόμενον εἶνε ἀδύνατον, βλέπει τις εὐκόλως.

4ον

143. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος* $\frac{\alpha}{\beta}$ *νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ ἀντιστρόφῳ αὐτοῦ.*

Περιορισμός. Ὁ β πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὅθεν ὑποθέτοντες τὸν παρονομαστὴν $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0, ἤτοι χ διάφορον τοῦ β, εὑρίσκομεν $(\alpha-\beta)\chi=\alpha^2-\beta^2$. (1)

Καὶ ἂν $\alpha-\beta$ διαφέρῃ τοῦ 0, τουτέστιν ἂν τὸ δοθὲν κλάσμα διαφέρῃ τῆς μονάδος 1, ἔχομεν $\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$

ἤτοι $\chi=\alpha+\beta$. (2)

Διερεύνησις. Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν. Καὶ ἂν μὲν εἶνε $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$· ὅθεν πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ἐπιταχθὲν καὶ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀόριστον. Ἡ δὲ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$ τότε μόνον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2), ὅταν $\alpha=0$, ὅτε προδήλως τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον.

5ον

144. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος κλάσματος* $\frac{\alpha}{\beta}$ *καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ*

Περιορισμός. Ὁ παρονομαστὴς β διαφέρει τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

ὅθεν ὑποθέτοντες $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0, εὑρίσκομεν

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha\beta(\alpha-\beta). \quad (1)$$

Καὶ ἂν $\alpha^2-\beta^2$ διαφέρῃ τοῦ 0, ἕπεται ἡ τιμὴ τοῦ χ·

$$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \quad (2)$$

Διερεύνησις. Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν.

Ἂν εἶνε $\alpha^2=\beta^2$, θὰ εἶνε ἢ $\alpha=\beta$, ἢ $\alpha=-\beta$· διότι καὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶνε ἴσα· καὶ ἂν μὲν εἶνε $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀόριστον, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν· ἂν δὲ εἶνε $\alpha=-\beta$, ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις γίνεται $0=2\beta^2$, καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον.

Ἡ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$, οὐδέποτε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2)· διότι, ἂν ἦτο $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\beta$, θὰ ἦτο καὶ $\alpha\beta=\alpha\beta+\beta^2$· ὅθεν καὶ $\beta^2=0$, ἤτοι $\beta=0$· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Παρατηρήσεις.

145. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων βλέπομεν, ὅτι δύναται πρόβλημά τι κατά τινα ὑπόθεσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων αὐτοῦ νὰ καταντᾷ ἀόριστον (τουτέστι νὰ λύηται ὑπὸ παντὸς ἀριθμοῦ), κατὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαν ὑπόθεσιν νὰ ἔχῃ λύσιν ἐντελῶς ὡρισμένην.

Δυνατὸν δὲ εἶνε ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει νὰ ζητηθῇ, πρὸς ποίαν τιμὴν πλησιάζει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ δεδομένα πλησιάζωσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην, ἥτις καθιστᾷ τὸ πρόβλημα ἀόριστον.

Τὴν τοιαύτην τιμὴν τοῦ ἀγνώστου παρέχει ὁ γενικὸς τύπος τῆς τιμῆς αὐτοῦ, ἀφοῦ ἐξαλειφθῇ ὁ τὴν ἐξίσωσιν μηδενίζων καὶ τὴν λύσιν ἀόριστον καθιστῶν κοινὸς παράγων, ἐὰν τοιοῦτος παράγων ὑπάρχῃ. Οὕτως ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι ὁ τύπος (2) ἀληθεύει, ὁσονδήποτε ὀλίγον καὶ ἂν διαφέρωσι τὰ α καὶ β (ἀρκεῖ νὰ διαφέρωσι)· καὶ ἐξ αὐτοῦ φαίνεται, ὅτι, ὅσῳ πλησιάζουσι ταῦτα νὰ γίνωσιν ἴσα, τόσῳ ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου προσεγγίζει πρὸς τὸ $\frac{\alpha.\alpha}{\alpha+\alpha}$ ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{2}$. Ὁμοίως ἐν τῷ προβλήματι τοῦ

ἐδ. 143 φαίνεται ἐκ τοῦ τύπου (2), ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου προσεγγίζει πρὸς τὸ 2α, ὅταν τὰ α καὶ β τείνωσι νὰ καταστῶσιν ἴσα.

146. Ὡσαύτως εἶνε δυνατὸν κατά τινα ὑπόθεσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων αὐτοῦ νὰ καθιστᾶται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ἀδύνατος, κατὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαν αὐτῆς νὰ ἔχῃ λύσιν ἐντελῶς ὡρισμένην. Οὕτως ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι ἂν ὑποτεθῇ $\alpha = -\beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἀδύνατος· διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην ὑπόθεσιν μικρὸν αὐτῆς διαφέρουσαν ἡ ἐξίσωσις λύεται.

Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει, ὅσον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος πλησιάζουσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην, ἥτις καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν ἀδύνατον, τόσον ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου αὐξάνει καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν.

Διότι, τῆς ἐξισώσεως ἀχθείσης εἰς τὴν μορφὴν $\alpha\chi = \beta$, ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου εἶνε $\chi = \frac{\beta}{\alpha}$· καὶ ὁ μὲν α πλησιάζει τότε πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ β πρὸς ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0. Ἀλλὰ κλάσμα, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς πλησιάζει πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ ἀριθμητὴς πρὸς ἄλλον οἱονδήποτε ἀριθμόν, αὐξάνει καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν· διότι, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ $\frac{1}{10}$, τὸ κλάσμα γίνεται 10β, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ $\frac{1}{100}$, τὸ κλάσμα γίνεται 100β, ὅταν $\frac{1}{1000}$, τὸ κλάσμα γίνεται 1000β· καὶ οὕτω καθεξῆς.

6ον

Ἐν τῇ ὁμαλῇ κινήσει λέγεται ταχύτης τὸ καθ' ἑκάστην μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα.

147. *Δύο κινητὰ κινοῦνται πρὸ ἀορίστου χρόνου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς κίνησιν ὁμαλήν, καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ ταχύτης εἶνε τ, τοῦ δὲ δευτέρου τ'· εὑρίσκονται δὲ τὴν στιγμὴν ταύτην εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπόστασις εἶνε α. Ζητεῖται ὁ μεταξὺ τῆς παρούσης στιγμῆς καὶ τῆς συναντήσεως αὐτῶν χρόνος.*

A ———————————————— B

Περιορισμός. Ὁ ἀριθμὸς α, ὁ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ ἐκφράζων, ὑποτίθεται θετικός· ἑκάτερος δὲ τῶν ἀριθμῶν τ καὶ τ' ὑποτίθεται (κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. 66 εἰρημένα) θετικὸς μέν, ἂν τὸ ὑπ' αὐτοῦ ἐκφραζόμενον διάστημα διανύηται κατὰ τὴν φορὰν ΑΒ, ἀρνητικὸς δέ, ἂν κατὰ τὴν ἐναντίαν ΒΑ.

Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κινητῶν ἐντὸς μιᾶς χρονικῆς μονάδος ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς. Καὶ πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τέσσαρας περιπτώσεις, αἵτινες εἶνε αἱ μόναι δυναταί.

1) Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ τ καὶ τ' εἶνε θετικοί.

2) Ἐὰν ἀμφότεροι εἶνε ἀρνητικοί.

3) Ἐὰν ὁ τ εἶνε θετικός, ἀλλ' ὁ τ' ἀρνητικός.

4) Ἐὰν ὁ τ' εἶνε θετικός, ἀλλ' ὁ τ ἀρνητικός.

1$^{\text{ον}}$) Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ ταχύτητες εἶνε θετικαί, αἱ θέσεις τῶν κινητῶν εἰς τὸ τέλος μιᾶς χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε A_1 καὶ B_1 (ἔνθα ἡ AA_1 ἔχει μῆκος τ καὶ ἡ BB_1 ἔχει μῆκος τ') καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε A_1B_1· εἶνε δὲ προφανῶς

A A$_1$ B B$_1$

$$A_1B_1=AB+BB_1-AA_1=\alpha+\tau'-\tau.$$

2$^{\text{ον}}$) Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ ταχύτητες εἶνε ἀρνητικαί, αἱ θέσεις τῶν δύο κινητῶν εἰς τὸ τέλος μιᾶς χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε A' καὶ B' (ἔνθα $A'A=AA_1$ καὶ $B'B=BB_1$) ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε $A'B'$· εἶνε δὲ

A' A B' B

$$A'B'=A'A+AB-B'B$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς $A'A$ παρίσταται νῦν ὑπὸ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $-\tau$, (διότι ὁ τ εἶνε νῦν ἀρνητικός), τὸ δὲ μῆκος τῆς $B'B$ παρίσταται διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $-\tau'$, ἕπεται

$$A'B'=-\tau+\alpha+\tau'=\alpha+\tau'-\tau.$$

3$^{\text{ον}}$) Ἐὰν ὁ τ εἶνε θετικός, ἀλλ' ὁ τ' ἀρνητικός, αἱ θέσεις τῶν δύο κινητῶν εἰς τὸ τέλος μιᾶς χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε A_1 καὶ B', ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε ἡ A_1B'· ἀλλ' εἶνε προδήλως

A A$_1$ B' B

$$A_1B'=AB-A_1A-B'B\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς AA_1 παριστᾷ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς τ, τὸ δὲ μῆκος τῆς $B'B$ παριστᾷ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $-\tau'$, συνάγεται καὶ πάλιν

$$A_1B'=\alpha+\tau'-\tau.$$

4$^{\text{ον}}$) Ἐὰν τέλος εἶνε τ ἀρνητικόν, ἀλλὰ τ' θετικόν, αἱ θέσεις τῶν δύο κινητῶν εἰς τὸ τέλος μιᾶς χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε A' καὶ B_1, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε $A'B_1$·

A' A B B$_1$

εἶνε δὲ $A'B_1=A'A+AB+BB_1$·

καὶ τὸ μὲν μῆκος τῆς Α′Α παρίσταται ὑπὸ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ —τ, τὸ δὲ μῆκος τῆς $ΒΒ_1$ ὑπὸ τοῦ τ′· ὥστε εἶνε καὶ πάλιν

$$Α'Β_1 = α + τ' - τ.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι κατὰ πάσας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν εἰς τὸ τέλος μιᾶς χρονικῆς μονάδος (ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς) θὰ εἶνε $α + τ' - τ$, ἤτοι εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα προστίθεται εἰς τὴν ἀπόστασιν α ὁ ἀριθμὸς $τ' - τ$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ εἰς ἑκάστην ἑπομένην χρονικὴν μονάδα συμβαίνει προδήλως τὸ αὐτό, ἤτοι προστίθεται εἰς τὴν ἀπόστασιν ὁ ἀριθμὸς $(τ' - τ)$, ἕπεται, ὅτι μετὰ παρέλευσιν δύο χρονικῶν μονάδων ἡ ἀπόστασις θὰ εἶνε $α + 2(τ' - τ)$· μετὰ παρέλευσιν τριῶν $α + 3(τ' - τ)$ κτλ. καὶ μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου χ ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν θὰ εἶνε $α + χ(τ' - τ)$.

Ὁ αὐτὸς δὲ τύπος ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν τῶν κινητῶν καὶ ἐν τῷ παρελθόντι, ἂν ὁ παρελθὼν χρόνος παριστᾶται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· διότι κατὰ τὸν χρόνον -1, ἢ $1'$, ἤτοι πρὸ μιᾶς χρονικῆς μονάδος (ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς) ἡ ἀπόστασις ἦτο $α - (τ' - τ)$, ἢ $α + 1'(τ' - τ)$, διότι, αὐξηθεῖσα κατὰ $τ' - τ$ εἰς τὸ διάστημα μιᾶς χρονικῆς μονάδος, γίνεται α· ὁμοίως κατὰ τὸν χρόνον -2, ἦτο $α + 2'(τ' - τ)$, καὶ γενικῶς κατὰ τὸν χρόνον, ὅντινα παριστᾷ ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς χ, ἡ ἀπόστασις ἦτο $α + χ(τ' - τ)$.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν γίνεται 0, θὰ εἶνε

$$α + χ(τ' - τ) = 0 \qquad (1)$$

καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὸν χρόνον τὸν ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς μέχρι τῆς συναντήσεως

$$χ = \frac{α}{τ - τ'}. \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Ἂν ἡ διαφορὰ $τ - τ'$ εἶνε θετικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶνε θετικὴ καὶ ἡ συνάντησις γίνεται εἰς τὸ μέλλον· ἂν δὲ ἡ αὐτὴ διαφορὰ $τ - τ'$ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ χ ἀποβαίνει ἀρνητικὴ καὶ ἡ συνάντησις ἐγένετο εἰς τὸ παρελθόν· ἂν δὲ τέλος εἶνε $τ = τ'$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $α = 0$· ἑπομένως οὐδεμία ὑπάρχει λύσις· ἀλλὰ καὶ τὸ πρόβλημα τότε προφανῶς εἶνε ἀδύνατον (146). Ὅσον δὲ αἱ ταχύτητες πλησιάζουσι νὰ γίνωσιν ἴσαι, τόσον τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως ἀπομακρύνεται ἀπὸ τῶν Α καὶ Β καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς μέχρι τῆς συναντήσεως αὐξάνει καὶ καταντᾷ ὅσον θέλωμεν μέγας.

ΣΗΜ. Ὁ τύπος $\alpha+\chi(\tau'-\tau)$ δίδει τὴν ἀπόστασιν θετικὴν μὲν πρὸ τῆς συναντήσεως (ὑποτιθεμένης τῆς συναντήσεως ἐν τῷ μέλλοντι), ἀρνητικὴν δὲ μετ' αὐτήν· τουτέστι θετικὴν μέν, ἂν ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις τῶν κινητῶν εἶνε ΑΒ, ἀρνητικὴν δέ, ἂν εἶνε ΒΑ.

7ον

148. Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του τὴν διανομὴν τῆς περιουσίας αὐτοῦ εἰς τοὺς υἱούς του ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοίπου· μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς μερίδος τοῦ πρώτου νὰ λάβῃ ὁ δεύτερος 2α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου· μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μερίδων τούτων νὰ λάβῃ ὁ τρίτος 3α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ μένοντος τότε ὑπολοίπου, καὶ οὕτω καθεξῆς· συνέβη δὲ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον νὰ διανεμηθῇ ἡ ὅλη περιουσία ἐξ ἴσου εἰς τοὺς υἱούς, μηδενὸς ὑπολειφθέντος καταλοίπου. Ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ υἱοί, πόση ἡ περιουσία καὶ πόση ἡ μερὶς ἑκάστου.

Ἐκ τοῦ πλήθους τῶν υἱῶν εὑρίσκονται καὶ τὰ ἄλλα εὐκόλως· ἔστω δὲ τοῦτο χ.

Ἐπειδὴ οὐδὲν ἔμεινεν, ὁ τελευταῖος υἱὸς ἔλαβε μόνον τοσάκις τὸ α, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ τὴν τάξιν αὐτοῦ δεικνύων ἀριθμός, ἤτοι ὁ χ· ὥστε ἔλαβε μόνον $\chi.\alpha$· τόσα δὲ ἔλαβε καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων· ὥστε οἱ χ υἱοὶ ἔλαβον δραχμὰς $\chi^2.\alpha$· τόση ἄρα ἦτο ἡ περιουσία.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὁ πρῶτος υἱὸς ἔλαβεν α δραχμὰς καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου (δηλαδὴ ἐκ τοῦ $(\chi^2\alpha-\alpha)$) τὸ $\frac{1}{\nu}$ μέρος· ὥστε ἔλαβεν οὗτος

$$\alpha+\frac{\chi^2\alpha-\alpha}{\nu}.$$

Ἐπειδὴ δὲ πάντες ἔλαβον ὅσα καὶ ὁ τελευταῖος, ἤτοι $\chi\alpha$, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\chi\alpha=\alpha+\frac{\chi^2\alpha-\alpha}{\nu}. \qquad (1)$$

ἀνάγκη δὲ νὰ εἶνε ὁ χ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Ἵνα λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1), διαιροῦμεν πάντας τοὺς ὅρους διὰ α

καὶ ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν· οὕτω προκύπτει

$$\nu\chi = \nu + \chi^2 - 1 \cdot \text{ ὅθεν } \nu(\chi - 1) = \chi^2 - 1 = (\chi - 1)(\chi + 1).$$

Καὶ ἐπειδὴ $\chi - 1$ διαφέρει τοῦ 0, διαιροῦντες δι' αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\nu = \chi + 1, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \chi = \nu - 1$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ χ θὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός, ἂν εἶνε καὶ ὁ ν τοιοῦτος.

Εὑρεθέντος τοῦ πλήθους τῶν υἱῶν $\nu - 1$
ἡ μερὶς ἑκάστου εἶνε $\alpha(\nu - 1)$,
καὶ ἡ περιουσία εἶνε $\alpha(\nu - 1)^2$.

Παρατήρησις. Ἐν τῇ εὑρέσει τῆς ἐξισώσεως ἐλήφθη μὲν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὅλαι αἱ μερίδες εἶνε ἴσαι, ἐξισώθησαν ὅμως μόνον αἱ μερίδες τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου· μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι κατὰ τὴν λύσιν, ἣν εὕρομεν, καὶ τῶν ἄλλων αἱ μερίδες εἶνε ἴσαι τῇ τοῦ τελευταίου. Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν, ὅτι οἱοσδήποτε ἐκ τῶν υἱῶν, ἔστω ὁ τὴν τάξιν π ἔχων, θὰ λάβῃ τὴν μερίδα $\alpha(\nu - 1)$, ἂν πάντες οἱ προηγούμενοι αὐτοῦ λάβωσι τὴν αὐτὴν μερίδα. Καὶ ὄντως τοῦ τὴν τάξιν π ἔχοντος προηγοῦνται $\pi - 1$ υἱοί, καὶ ἕκαστος ἔλαβεν ἐξ ὑποθέσεως μερίδα $\alpha(\nu - 1)$· ὥστε ἔλαβον ὅλοι $\alpha(\nu - 1)(\pi - 1)$· ἦτο δὲ ἡ περιουσία $\alpha(\nu - 1)^2$, ὥστε ἔμειναν $\alpha(\nu - 1)^2 - \alpha(\nu - 1)(\pi - 1)$· ἤτοι $\alpha(\nu - 1)(\nu - \pi)$· ἐκ δὲ τούτων ἔλαβεν ὁ τὴν τάξιν π ἔχων υἱὸς $\alpha\pi$ δραχμὰς καὶ τοῦ ὑπολοίπου $\alpha(\nu - 1)(\nu - \pi) - \alpha\pi$ τὸ $\nu^{\text{ον}}$ μέρος· ὥστε ἔλαβεν ἐν συνόλῳ

$$\alpha\pi + \frac{\alpha(\nu - 1)(\nu - \pi) - \alpha\pi}{\nu}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha(\nu - 1)(\nu - \pi) + \pi\alpha\nu - \alpha\pi}{\nu}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\alpha(\nu - 1)(\nu - \pi) + \alpha\pi(\nu - 1)}{\nu} = \frac{\alpha(\nu - 1)(\nu - \pi + \pi)}{\nu} = \alpha(\nu - 1).$$

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ὁ δεύτερος υἱὸς θὰ λάβῃ καὶ αὐτὸς μερίδα $\alpha(\nu - 1)$, διότι ὁ προηγούμενος αὐτοῦ τὴν αὐτὴν ἔλαβε μερίδα· καὶ ὁ τρίτος θὰ λάβῃ μερίδα $\alpha(\nu - 1)$· διότι οἱ προηγούμενοι αὐτοῦ τὸ αὐτὸ ἔλαβον, καὶ καθεξῆς· ὥστε ἀπεδείχθη ἡ ἰσότης πασῶν τῶν μερίδων.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

1) Πατὴρ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ἀπεκρίθη· μετὰ 20 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μου θὰ εἶνε τετραπλασία τῆς περυσινῆς.
Ποία ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ; (Ἀπ. 8).

2) Ἀλώπηξ εἶχε κάμει 60 πηδήματα, ὅταν λαγωνικὸν ἤρχισε νὰ διώκῃ αὐτήν· κάμνει δὲ ἡ ἀλώπηξ 9 πηδήματα, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ λαγωνικὸν κάμνει 6· ἀλλὰ 3 πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 7

τῆς ἀλώπεκος. Πόσα πηδήματα θὰ κάμῃ τὸ λαγωνικόν, μέχρις οὗ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα; ('Απ. 72).

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν εὐκολώτατα παρατηροῦντες, ὅτι, ἂν ληφθῇ μονὰς τοῦ χρόνου ὁ χρόνος τῶν 6 πηδημάτων τοῦ λαγωνικοῦ, ἢ τῶν 9 τῆς ἀλώπεκος, καθ' ἑκάστην μονάδα χρόνου ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις αὐτῶν ἐλαττοῦται κατὰ 5 πηδήματα ἀλώπεκος.

3) Διόφαντος ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἀρχαιοτάτου σῳζομένου βιβλίου ἀλγέβρας ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παῖς καὶ τὸ δωδέκατον ὡς νεανίας, ἔπειτα νυμφευθεὶς ἔζησε τὸ ἕβδομον καὶ 5 ἔτη πρὶν ἀποκτήσῃ υἱόν, ὅστις ἀπέθανε 4 ἔτη πρὸ τοῦ πατρός του, ζήσας τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς αὐτοῦ. Πόσον ἔζησεν ὁ Διόφαντος; ('Απ. 84 ἔτη).

4) Ἔχων τις 100000 δραχμὰς μεταχειρίζεται μέρος αὐτῶν εἰς ἀγορὰν οἰκίας· τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου τοκίζει πρὸς 4 %, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{2}{3}$ πρὸς 3 %· ἀπολαμβάνει δὲ ἐκ τῶν τοκισθέντων χρημάτων ἐτήσιον εἰσόδημα 2000 δραχμῶν· ποία ἡ τιμὴ τῆς οἰκίας καὶ ποῖα τὰ τοκισθέντα πρὸς 4 % καὶ 3 % χρήματα; ('Απ. 40000, 20000, 40000).

5) Ἔχει τις εἰς τόκον κεφάλαιόν τι πρὸς 5 % κατ' ἔτος· μετὰ δύο ἔτη ἀφαιρεῖ τὸ τέταρτον τοῦ κεφαλαίου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀφίνει εἰς τόκον 8 μῆνας, μετὰ τοὺς ὁποίους ἀφαιρεῖ πάλιν τὸ τέταρτον (τοῦ νέου κεφαλαίου), τὸ δὲ ὑπόλοιπον λαμβάνει μετὰ 16 μῆνας. Ἔλαβε δὲ ἐν τῷ διαστήματι τῶν 48 μηνῶν τόκον 26000 δραχμάς. Ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον. ('Απ. 160000).

6) Δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται διὰ δύο ἀνίσων κρουνῶν· ἀνοίγεται ὁ πρῶτος καὶ ἐκρέει τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου ὕδατος· τότε ἀνοίγεται καὶ ὁ ἕτερος καὶ ἐκρέει ἐξ ἀμφοτέρων τὸ ὕδωρ. Οὕτω δὲ κενοῦνται καὶ τὰ λοιπὰ τρία τέταρτα τῆς δεξαμενῆς εἰς μίαν ὥραν καὶ ἓν τέταρτον περισσότερον, ἢ ὅσον ἐχρειάσθη ὁ πρῶτος κρουνὸς διὰ νὰ κενώσῃ τὸ τέταρτον τῆς δεξαμενῆς. Ἐὰν δὲ ἀμφότεροι οἱ κρουνοὶ ἠνοίγοντο ἐξ ἀρχῆς, ἡ δεξαμενὴ θὰ ἐκενοῦτο ἓν τέταρτον τῆς ὥρας ταχύτερον. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος τῶν κρουνῶν θὰ ἐκένου μόνος τὴν δεξαμενήν; ('Απ. ὁ α' εἰς 4, ὁ β' εἰς 12).

7) Ὡρολογίου δεικνύοντος ἀκριβῶς μεσημβρίαν συμπίπτουσιν οἱ δεῖκται ἐπὶ τοῦ 12· μετὰ πόσην ὥραν θὰ γίνῃ ἡ πρώτη σύμπτωσις τῶν δύο δεικτῶν καὶ πόσαι συμπτώσεις θὰ γίνωσιν εἰς τὸ διάστημα 12 ὡρῶν;

('Απ. 1 ὥρ. 5' $\frac{5}{11}$, συμπτώσεις 11).

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκολώτατα παρατηροῦντες, ὅτι ἀπὸ μὲν τῆς $12^{ης}$ μέχρι τῆς $1^{ης}$ οὐδεμία συμβαίνει σύμπτωσις, ἐν ἑκάστῃ δὲ τῶν ἄλλων ὡρῶν, 1—2, 2—3, ... 11—12 συμβαίνει μία καὶ μόνη· ὥστε γίνονται ἐν 12 ὥραις 11 συμπτώσεις· ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεροι οἱ δεῖκται κινοῦνται ὁμαλῶς, ἕπεται, ὅτι ὁ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν συμπτώσεων παρερχόμενος χρόνος εἶνε $\frac{12}{11}$ τῆς ὥρας, ἤτοι 1 ὥρα 5' καὶ $\frac{5}{11}$ τοῦ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

8) Ἐὰν τὸ αὐτὸ ὡρολόγιον ἔχῃ τρεῖς δείκτας (τῶν ὡρῶν, τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῶν δευτέρων λεπτῶν) καὶ συμπίπτωσιν οἱ δεῖκται ἐπὶ τοῦ 12, μετὰ πόσα δεύτερα λεπτὰ ὁ τῶν δευτέρων λεπτῶν δείκτης θὰ διαιρῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν ὑπὸ τῶν ἄλλων δύο ἀποτελουμένην γωνίαν.
$\left(\text{Ἀπ. } 60'' + \frac{780}{1427}\right)$.

9) Ἁμάξης τῶν μὲν ἐμπροσθίων τροχῶν ἡ περιφέρεια εἶνε α ποδῶν, τῶν δὲ ὀπισθίων β. Διανυσάσης δὲ τῆς ἁμάξης διάστημά τι, παρετηρήθη, ὅτι οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἔκαμαν ν περιστροφὰς περισσοτέρας ἢ οἱ ὀπίσθιοι. Εὑρεῖν τὸ διανυσθὲν ὑπὸ τῆς ἁμάξης διάστημα. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha\beta\nu}{\beta-\alpha}\right)$.

10) Εὑρεῖν ἐν τῷ προβλήματι τῶν δύο κινητῶν (ἐδ. 147) πότε ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν κινητῶν εἶνε β. $\left(\text{Ἀπ. } \chi = \frac{\alpha+\beta}{\tau-\tau'}\right)$.

11) Δύο ὡρολόγια ἔδειξαν συγχρόνως τὸ μὲν ἐν 7 ὡρ. 5' τὸ δὲ ἄλλο 8· ἔπειτα πάλιν τὸ μὲν πρῶτον 9 ὡρ. 58', τὸ δὲ ἄλλο τὴν αὐτὴν στιγμὴν 10 ὡρ. Πότε τὰ δύο ταῦτα ὡρολόγια θὰ δείξωσι τὴν αὐτὴν ὥραν;

12) Κινητόν τι ἀπέχει ἀπὸ ἄλλου κινητοῦ, πρὸς ὃ διευθύνεται, ἀπόστασιν α, ἡ δὲ ταχύτης του εἶνε διπλασία τῆς ταχύτητος ἐκείνου (καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως)· πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ ἵνα τὸ φθάσῃ;
(Ἀπ. 2α).

13) Ἁμαξοστοιχία τις ἀνεχώρησε δύο ὥρας ὕστερον ἄλλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ διατρέχει τὴν αὐτὴν ὁδόν, ἡ δὲ ταχύτης αὐτῆς εἶνε τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς ταχύτητος τῆς ἄλλης, μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ αὐτήν; (Ἀπ. 3).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΛΥΣΙΣ ΟΣΩΝΔΗΠΟΤΕ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤ' ΙΣΑΡΙΘΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

149. Καλεῖται *σύστημα ἐξισώσεων* τὸ σύνολον πολλῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.

Δύο συστήματα ἐξισώσεων λέγονται *ἰσοδύναμα*, ἐὰν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύωσιν ἀμφότερα.

Φανερὸν δέ, ὅτι, ὅταν μόνον εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀγνώστων ἀποβλέπωμεν, δυνάμεθα, ἔχοντες δύο συστήματα ἰσοδύναμα, νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἓν διὰ τοῦ ἑτέρου.

Ἐκ δοθέντος συστήματος εὑρίσκομεν ἄλλο προφανῶς ἰσοδύναμον, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν δι' ἄλλης ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτήν· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει, καὶ ἂν περισσοτέρας ἀντικαταστήσωμεν, ἑκάστην δι' ἄλλης ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτήν.

Παραδείγματος χάριν τὸ σύστημα

$$2\chi-\psi=8$$
$$\frac{\chi}{2}+\psi=4$$

εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑξῆς

$$2\chi-\psi=8$$
$$\chi+2\psi=8.$$

Ἐκ δοθέντος συστήματος εὑρίσκομεν ἄλλο ἰσοδύναμον καὶ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἀλλήλας, κατὰ τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

150. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἐὰν ἐν συστήματι ἐξισώσεων προσθέσωμεν ὁσασδήποτε ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον τῷ πρώτῳ.*

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} A&=A' \\ B&=B' \\ \Gamma&=\Gamma' \end{aligned} \qquad (1)$$

ἔνθα πρὸς συντομίαν παρεστήσαμεν ἕκαστον τῶν μελῶν δι' ἑνὸς μόνου γράμματος·
λέγω, ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ

$$\begin{aligned} A+B&=A'+B' \\ B&=B' \\ \Gamma&=\Gamma' \end{aligned}$$

ἢ καὶ τῷ ἑξῆς

$$Α+Β+Γ=Α'+Β'+Γ'$$
$$Β=Β'$$
$$Γ=Γ',$$

ἅτινα εὑρέθησαν ἀντικατασταθείσης τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ δοθέντος συστήματος δι' ἐκείνης, ἥτις προέκυψεν ἐκ τῆς προσθέσεως αὐτῆς τῆς πρώτης καὶ τῶν ἄλλων κατὰ τὰ μέλη.

Διότι, ἂν εὑρεθῶσι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ποιοῦσαι τὰς παραστάσεις Α, Β, Γ ἴσας ταῖς Α', Β', Γ', αἱ αὐταὶ τιμαὶ θὰ ποιήσωσι καὶ τὴν παράστασιν $Α+Β$ ἴσην τῇ $Α'+Β'$ (διότι, ἂν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶνε ἴσα)· ὡσαύτως καὶ τὴν παράστασιν $Α+Β+Γ$ θὰ ποιήσωσιν ἴσην τῇ $Α'+Β'+Γ'$· ὥστε, ἀληθεύοντος τοῦ δοθέντος συστήματος, ἀληθεύουσι καὶ τὰ ἄλλα· ἂν δὲ πάλιν εὑρεθῶσι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύουσαι τὸ δεύτερον σύστημα, ἤτοι ποιοῦσαι τὰς παραστάσεις $Α+Β$, Β, Γ ἴσας ταῖς $Α'+Β'$, Β', Γ', αἱ αὐταὶ τιμαὶ θὰ ποιήσωσι καὶ τὴν παράστασιν Α ἴσην τῇ Α' (διότι ἂν ἀπὸ τῶν ἴσων $Α+Β$ καὶ $Α'+Β'$ ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ Β καὶ Β', τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶνε ἴσα), ἤτοι θὰ ἐπαληθεύσωσι καὶ τὸ πρῶτον σύστημα· ὥστε τὸ δεύτερον σύστημα εἶνε ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι· ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ τρίτον ἰσοδύναμον αὐτοῦ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$χ+ψ=18$$
$$χ-ψ=6,$$

τὰς ὁποίας θὰ εὑρίσκομεν, ἂν προετείνετο νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 18 καὶ διαφορὰν 6.

Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν δευτέραν διὰ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$2χ=24$$
$$χ+ψ=18·$$

εἶνε δὲ ἡ λύσις τούτου εὐκολωτέρα· διότι ἐκ τῆς πρώτης προσδιορίζεται ὁ χ,

$$χ=12·$$

Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν (διότι καὶ αὐτὴ πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ὑπὸ τῆς αὐτῆς τιμῆς τοῦ χ), προκύπτει

$ψ+12=18·$ ὅθεν $ψ=6·$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶνε $χ=12$ $ψ=6.$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα, πρὶν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις, νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ἐπὶ οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς διαφόρους τοῦ 0.

Παραδείγματος χάριν, τὸ σύστημα (1) εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ

$$\mu A+\nu B+\rho\Gamma=\mu A'+\nu B'+\rho\Gamma'$$
$$B=B'$$
$$\Gamma=\Gamma',$$

ἔνθα μ, ν, ρ εἶνε οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ (διάφοροι τοῦ 0).

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα

$$\chi+3\psi=9$$
$$2\chi-\psi=4.$$

Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ 1 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 3, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$7\chi=21$$
$$\chi+3\psi=9,$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν εὐκόλως $\chi=3$, καὶ $\psi=2$.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν ἐν συστήματι μία τῶν ἐξισώσεων εἶνε τῆς μορφῆς $\chi=A$, ἔνθα χ εἶνε εἷς τῶν ἀγνώστων, καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν ταῖς λοιπαῖς (ἢ ἐν πάσαις ἢ καὶ ἔν τισι μόνον) τὸ χ ὑπὸ τοῦ A, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον.*

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\chi=A$$
$$B=\beta$$
$$\Gamma=\gamma.$$

Λέγω, ὅτι τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑξῆς

$$\chi=A$$
$$B'=\beta'$$
$$\Gamma'=\gamma'$$

ἔνθα διὰ τῶν τονιζομένων γραμμάτων παρεστήσαμεν τὰς ἐκ τῶν ἀτόνων προκυπτούσας παραστάσεις, ὅταν ἀντικατασταθῇ ἐν αὐταῖς τὸ χ ὑπὸ τοῦ A.

Καὶ ὄντως, ὁπότερον τῶν συστημάτων τούτων καὶ ἂν ἀληθεύσῃ, τὸ χ καὶ τὸ A γίνονται ἴσοι ἀριθμοί· ἑπομένως καὶ τὸ ἕτερον σύστημα θὰ ἀληθεύσῃ· διότι ἡ μόνη διαφορὰ μεταξὺ αὐτῶν εἶνε, ὅτι τὸν τόπον τοῦ χ ἐν τῷ πρώτῳ κατέχει τὸ A ἐν τῷ δευτέρῳ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα

$$\chi=2\psi-1$$
$$4\chi+\psi=41.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ χ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ $2\psi-1$, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\chi = 2\psi - 1$$
$$4(2\psi - 1) + \psi = 41$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει ἕνα μόνον ἄγνωστον, τὸν ψ, λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $\psi = 5$·
ὅθεν ἐκ τῆς πρώτης (μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ψ) εὑρίσκεται $\chi = 9$.

Παρατήρησις.

152. Ὅταν δυνάμει ἑνὸς τῶν θεωρημάτων τούτων συνδυάζωμεν πολλὰς ἐξισώσεις οὕτως, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσα νὰ μὴ ἔχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων, λέγομεν, ὅτι *ἀπαλείφομεν* τὸν ἄγνωστον τοῦτον· ὁ δὲ τοιοῦτος συνδυασμὸς τῶν ἐξισώσεων λέγεται *ἀπαλοιφὴ* τοῦ ἀγνώστου τούτου. Ἡ λύσις παντὸς συστήματος ἐξισώσεων γίνεται, ὡς κατόπιν θὰ μάθωμεν, διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς.

Λύσεις δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν.

153. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύο ἔχουσα ἀγνώστους, ὅταν ἐφαρμοσθῶσιν ἐπ' αὐτῆς αἱ πράξεις τοῦ ἐδ. 105, λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$$

ἔνθα α, β, γ εἶνε γνωσταὶ παραστάσεις ἢ ὡρισμένοι ἀριθμοί, χ δὲ καὶ ψ οἱ ἄγνωστοι.

Ἀλλ' ἂν ἔχωμεν μίαν μόνην τοιαύτην ἐξίσωσιν, δυνάμεθα κατ' ἀπείρους τρόπους νὰ ἐπαληθεύσωμεν αὐτήν· διότι ἀντικαθιστῶντες τὸν ἕτερον τῶν ἀγνώστων, ἔστω τὸν ψ, δι' οἱουδήποτε θέλωμεν ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν ἕνα μόνον ἄγνωστον περιέχουσαν, τὸν χ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $\quad 7\chi - 5\psi = 1$.

Θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστὸν καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν χ,

εὑρίσκομεν $\quad \chi = \dfrac{1 + 5\psi}{7}$.

ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\quad \psi = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$

εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\quad \chi = \dfrac{1}{7}, \quad \dfrac{6}{7}, \quad \dfrac{11}{7}, \quad \dfrac{16}{7}, \quad 3, \ldots$

Ἑκάστη τιμὴ τοῦ ψ μετὰ τῆς ἀντιστοιχούσης τιμῆς τοῦ χ ἀποτελοῦσι μίαν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ὥστε ἡ τοιαύτη ἐξίσωσις *ἔχει λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

154. Θεωρήσωμεν νῦν σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους περιεχουσῶν· ἔστω δὲ ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα

$$3\chi-4\psi=17$$
$$2\chi+5\psi=19.$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου δυνάμεθα πάντοτε νὰ πορισθῶμεν ἕτερον ἰσοδύναμον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν ἐξισώσεων νὰ μὴ περιέχῃ ἕνα ἄγνωστον, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον.

Καὶ ὄντως ἐκ τοῦ θεωρήματος (150) ἐμάθομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων δι' ἐκείνης, ἣν λαμβάνομεν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δοθείσας πολλαπλασιασθείσας ἐπὶ οἱουσδήποτε ἀριθμούς, δυνάμεθα δὲ νὰ ἐκλέξωμεν τοὺς πολλαπλασιαστὰς οὕτως, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς ἀγνώστου νὰ γίνωσιν ἀντίθετοι ἀριθμοί· τότε προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον τοῦτον, τοῦτ' ἔστιν ἀπαλείφομεν αὐτὸν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων. Εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, οἱ τοιοῦτοι πολλαπλασιασταὶ εἶνε, τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ὁ 5, τῆς δὲ δευτέρας ὁ 4· διότι πολλαπλασιάζοντες ἐπ' αὐτοὺς λαμβάνομεν

$$15\chi-20\psi=85$$
$$8\chi+20\psi=76$$

καὶ προσθέτοντες $\quad 23\chi \quad =161\cdot$

ἐπομένως τὸ δοθὲν σύστημα εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑξῆς

$$3\chi-4\psi=17$$
$$23\chi=161.$$

Ἀλλ' ἡ λύσις τοῦ τελευταίου τούτου συστήματος εἶνε εὐκολωτάτη· διότι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις, ὡς ἔχουσα μόνον τὸν χ, προσδιορίζει αὐτὸν καὶ δίδει $\chi=7$· ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ ἀντικατασταθῇ εἰς τὴν πρώτην (διότι καὶ αὕτη ὑπὸ τῆς αὐτῆς τιμῆς τοῦ χ πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται), μένει εἰς αὐτὴν ἄγνωστος μόνον ὁ ψ, καὶ ἐπομένως προσδιορίζεται ἐξ αὐτῆς· οὕτως εὑρίσκομεν $\quad 21-4\psi=17, \quad$ ἐξ ἧς $\psi=1.$

ὥστε αἱ *μόναι τιμαὶ* τῶν ἀγνώστων, αἱ τὸ δοθὲν σύστημα ἐπαληθεύουσαι, εἶνε $\quad \chi=7, \quad \psi=1.$

155. Ἡ μέθοδος αὕτη, δι' ἧς ἀπαλείφεται ὁ ἕτερος τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ λύεται τὸ σύστημα, λέγεται μέθοδος τῆς *προσθέσεως*. Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὡς πολλαπλασιασταὶ δύνανται πάντοτε νὰ ληφθῶσιν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου, ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων πολλαπλασιάσῃ τὴν ἄλλην· διότι τότε

εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις προκύπτει συντελεστὴς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ ἐν ταῖς δεδομέναις. Συνήθως οἱ πολλαπλασιασταὶ λαμβάνονται θετικοί, καὶ ἂν μὲν ὁ προκύπτων κοινὸς συντελεστὴς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἔχῃ ἐναντία σημεῖα εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε ὁ ἄγνωστος ἀπαλείφεται· ἂν δὲ ἔχῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, πρὶν προσθέσωμεν ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων.

Ἀλλ' ἁπλούστερον εἶνε νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δύο συντελεστῶν τοῦ ἀγνώστου καὶ τοῦτο νὰ καθιστῶμεν κοινὸν συντελεστὴν αὐτοῦ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις (ὡς ἐν τῇ ἀναγωγῇ δύο κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν)· γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου διαιρεθέντος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει.

Παραδείγματα.

1ον)

$$7\chi-8\psi=19$$
$$13\chi-6\psi=53.$$

Τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶνε ὁ 24· ἐπομένως πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ $\frac{24}{8}$, ἤτοι 3 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ $\frac{24}{6}$ ἢ 4· οὕτως εὑρίσκομεν

$$21\chi-24\psi=57$$
$$52\chi-24\psi=212,$$

ἀλλάσσοντες δὲ τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς πρώτης καὶ προσθέτοντες ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$31\chi=155,$$

ἐξ ἧς $\chi=5$·

ἀντικαθιστῶντες νῦν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δοθεισῶν (διότι ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις μετὰ τῆς ἑτέρας τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι), ἔστω εἰς τὴν πρώτην, καὶ λύοντες ἔπειτα πρὸς τὸν ψ εὑρίσκομεν

$35-8\psi=19$, ἐξ ἧς $\psi=2$.

2ον)

$$\chi-2\psi=-9$$
$$\chi+5\psi=26$$

Ἐπειδὴ ὁ χ ἔχει τὸν αὐτὸν συντελεστὴν εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, ἀπαλείφομεν αὐτόν· πρὸς τοῦτο ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς πρώτης καὶ προσθέτομεν ἀμφοτέρας κατὰ μέλη· οὕτως εὑρίσκομεν

$$7\psi=35, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=5\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi-2.5=-9$, ἐξ ἧς $\chi=1$.

3ον)

$$5\chi+2\psi=0$$
$$9\chi+8\psi=1.$$

Ἐπειδὴ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ εἶνε ὁ συντελεστὴς τῆς δευτέρας, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ 4 (τὸ πηλίκον αὐτῶν) καὶ εὑρίσκομεν

$$20\chi+8\psi=0$$
$$9\chi+8\psi=1,$$

ἀλλάσσοντες δὲ τὰ σημεῖα τῆς δευτέρας καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $11\chi=-1$, ἐξ ἧς $\chi=-\frac{1}{11}$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν εὑρίσκομεν

$$-\frac{9}{11}+8\psi=1, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=\frac{5}{22}.$$

4ον)

$$3\chi-16\psi=1$$
$$4\chi+25\psi=12\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ —4 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 3 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις, ἀπαλείφομεν τὸν χ (προτιμῶμεν δ' αὐτὸν ὡς ἔχοντα μικροτέρους συντελεστάς) καὶ εὑρίσκομεν

$$139\psi=32, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=\frac{32}{139}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν

$$3\chi-16\cdot\frac{32}{139}=1, \qquad \text{ὅθεν} \quad \chi=\frac{217}{139}.$$

5ον)

$$5\chi-3\psi=8$$
$$15\chi-9\psi=12\cdot$$

ἀπαλείφοντες τὸν ψ εὑρίσκομεν $0=+12$· ὥστε τὸ σύστημα τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ

$$0=12$$
$$5\chi-3\psi=8,$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ δοθὲν εἶνε ἀδύνατον.

6ον)
$$\chi - 3\psi = 8$$
$$4\chi - 12\psi = 32\cdot$$
ἐπαλείφοντες τὸν χ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα
$$0 = 0$$
$$\chi - 3\psi = 8,$$
ὅπερ ἔχει μόνον μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἐπιδέχεται διὰ τοῦτο λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν εἶνε τοιοῦτον· καὶ ὄντως, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ, ὡς προκύπτουσα ἐξ αὐτῆς πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ 4· ὥστε ἐδόθη κυρίως μία μόνον ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν δύο ἀγνώστων.

*156. Ἔστω τέλος τὸ γενικὸν σύστημα
$$\begin{aligned} \alpha\chi + \beta\psi &= \gamma \\ \alpha'\chi + \beta'\psi &= \gamma'. \end{aligned} \qquad (1)$$
Ἵνα ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τὸν ἄγνωστον ψ, πολλαπλασιάζομεν, τὴν μὲν πρώτην ἐπὶ β', τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ $-\beta$ καὶ προσθέτομεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε εὑρίσκομεν
$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta).\chi = \gamma\beta' - \gamma'\beta,$$
ἐξ ἧς, ὑποθέτοντες τὴν παράστασιν $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ διάφορον τοῦ 0, λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην τιμὴν τοῦ χ
$$\chi = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$
Ὁμοίως ἀπαλείφοντες τὸν χ, εὑρίσκομεν
$$\psi = \frac{\gamma'\alpha - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$
Ὥστε, ἂν ἡ παράστασις $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ διαφέρῃ τοῦ 0, τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων ἐπιδέχεται μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνην· ἤτοι ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ χ καὶ μία τοῦ ψ ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα.

*157. Μένει πρὸς ἐξέτασιν ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν εἶνε
$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0\cdot$$
καὶ ταύτην ὑποδιαιροῦμεν εἰς τρεῖς ἄλλας.

1) Ἂν ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις ἔχωσιν ἀγνώστους.

Τότε ἐκ τῶν συντελεστῶν α, β εἷς τοὐλάχιστον διαφέρει τοῦ 0 (ὁμοίως καὶ ἐκ τῶν α', β') ἔστω τοιοῦτος ὁ α· λέγω ὅτι καὶ ὁ α' θὰ εἶνε διάφορος τοῦ 0· διότι ἂν ἦτο $\alpha' = 0$, ἡ ἰσότης $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ (ἥτις συνδέει νῦν τοὺς συντελεστὰς) θὰ ἐγίνετο $\alpha\beta' = 0$· ὅθεν καὶ $\beta' = 0$ ἤτοι ἀμφότεροι οἱ συντελεσταὶ α' καὶ β' θὰ ἦσαν 0 καὶ ἑπομένως ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δὲν θὰ εἶχεν ἀγνώστους· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ὥστε ὁ α' διαφέρει τοῦ 0.

Τούτου τεθέντος, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἐπὶ α καὶ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἰσότητα $\alpha\beta'=\beta'\alpha$, φέρομεν τὸ δοθὲν σύστημα (1) εἰς τὴν μορφὴν

$$\begin{aligned}\alpha\chi+\beta\psi&=\gamma\\ \alpha'(\alpha\chi+\beta\psi)&=\gamma'\alpha\end{aligned} \quad \text{ἤτοι} \quad \begin{aligned}\alpha\chi+\beta\psi&=\gamma\\ \alpha\chi+\beta\psi&=\frac{\gamma'\alpha}{\alpha'}.\end{aligned}$$

'Αλλ' ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἢ οὐδόλως διαφέρει τῆς πρώτης (ἐὰν εἶνε $\frac{\gamma'\alpha}{\alpha'}$ ἴσον τῷ γ), ἐπομένως ἐδόθη μία μόνη ἐξίσωσις· ἢ εἶνε ἀσυμβίβαστος πρὸς αὐτὴν $\left(\text{ἐὰν } \frac{\gamma'\alpha}{\alpha'} \text{ διαφέρῃ τοῦ } \gamma\right)$· διότι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς $\alpha\chi+\beta\psi$ δὲν δύναται νὰ εἶνε ἴσος πρὸς δύο διαφόρους ἀριθμούς. Καὶ ἂν μὲν αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶνε μία καὶ ἡ αὐτή, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις (ἐδ. 152)· ἐὰν δὲ εἶνε ἀσυμβίβαστοι, οὐδεμία ὑπάρχει λύσις.

2) Ἂν μία μόνη ἐξίσωσις ἔχῃ ἀγνώστους· τότε τὸ σύστημα εἶνε

$$\begin{aligned}0&=\gamma\\ \alpha'\chi+\beta'\psi&=\gamma'\end{aligned}$$

πληροῦται δὲ ἀληθῶς καὶ ἡ ἰσότης $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$· ἀλλὰ τότε, ἂν μὲν ὁ γ διαφέρῃ τοῦ 0, εἶνε ἀδύνατον τὸ σύστημα, ἂν δὲ εἶνε $\gamma=0$, περιορίζεται εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$, ἥτις περιέχει ἢ τὸν ἕνα ἄγνωστον ἢ ἀμφοτέρους· καὶ ἂν μὲν περιέχῃ τὸν ἕνα μόνον ἄγνωστον, ὁρίζει αὐτόν, ἀλλ' ὁ ἄλλος μένει ἀόριστος· ἂν δὲ περιέχῃ καὶ τοὺς δύο, ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος (ἐδ. 152)· ὥστε καὶ πάλιν τὸ σύστημα εἶνε ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

3) Ἂν μήτε ἡ μία ἐξίσωσις μήτε ἡ ἄλλη ἔχῃ ἄγνωστον· τότε τὸ σύστημα εἶνε

$$\begin{aligned}0&=\gamma\\ 0&=\gamma'\end{aligned}$$

ἀλλὰ τότε, ἂν μὲν ἀμφότερα τὰ γ, γ' εἶνε 0, ἀληθεύει τὸ σύστημα, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων χ, ψ· εἰ δὲ μή, εἶνε ἀδύνατον.

'Εκ τῶν προειρημένων πάντων συνάγεται, ὅτι

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned}\alpha\chi+\beta\psi&=\gamma\\ \alpha'\chi+\beta'\psi&=\gamma'\end{aligned}$$

ἐπιδέχεται μίαν καὶ μίαν μόνην λύσιν, ἐὰν ἡ παράστασις

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta$$

εἶνε διάφορος τοῦ 0· ἀλλ' ἐὰν τοὐναντίον εἶνε $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$, *τὸ σύστημα ἢ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν ἢ ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος· καὶ τὸ*

μὲν πρῶτον συμβαίνει, ὅταν τις τῶν ἐξισώσεων καθ' ἑαυτὴν εἶνε ἀδύνατος, ἢ ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις εἶνε πρὸς ἀλλήλας ἀσυμβίβαστοι· τὸ δὲ δεύτερον συμβαίνει, ὅταν ἡ μία τῶν ἐξισώσεων εἶνε ταὐτότης ἢ ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις εἶνε ἰσοδύναμοι.

158. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ συστήματος δύναται καὶ ἄλλως νὰ γίνῃ δυνάμει τοῦ Β' θεωρήματος.

Ἔστω τῷ ὄντι τὸ σύστημα

$$3\chi+8\psi=43$$
$$11\chi-7\psi=-24.$$

Ἐὰν ἡ πρώτη ἐξίσωσις λυθῇ πρὸς τὸ χ, τίθεται τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi=\frac{43-8\psi}{3}$$
$$11\chi-7\psi=-24\cdot$$

ἐὰν δὲ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, εὑρίσκεται τὸ ἰσοδύναμον (ἐδ. 151) σύστημα

$$\chi=\frac{43-8\psi}{3}$$
$$11\left(\frac{43-8\psi}{3}\right)-7\psi=-24,$$

οὗτινος ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἄγνωστον τὸν ψ καὶ λυομένη πρὸς αὐτὸν δίδει $\psi=5$· καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ ψ τεθῇ εἰς τὴν πρώτην, προκύπτει καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ

$$\chi=1.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως*· δύνανται δὲ καὶ ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις νὰ λυθῶσι πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον καὶ μετὰ ταῦτα νὰ γίνῃ ἡ ἀντικατάστασις.

Ἀλλ' ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως προτιμᾶται, μόνον ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων δοθῇ λελυμένη πρὸς ἕνα ἄγνωστον· ἄλλως προτιμητέα ἡ μέθοδος τῆς προσθέσεως ὡς συντομωτέρα.

Λύσις οἱουδήποτε συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἐχουσῶν ἀγνώστους ἴσους τὸ πλῆθος.

159. Ἔστω πρότερον τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$2\chi-5\psi+5\omega=40$$
$$5\chi+2\psi-\omega=45$$
$$7\chi-\psi+9\omega=98.$$

Ἐὰν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἀπαλείψωμεν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων τῆς πρώτης, ἔστω τὸν ψ, (δι' ὁποτέρας τῶν μεθόδων), εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δύο μόνον ἀγνώστους περιέχουσαν καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν δευτέραν· ὁμοίως, ἂν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστο , εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τρίτην· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$2\chi-5\psi+5\omega=40$$
$$29\chi+5\omega\quad=305$$
$$33\chi+40\omega\quad=450.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις αὐτοῦ περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους, (ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν), δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὰς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους (διότι ἐμάθομεν τοῦτο)· ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων ($\chi=10$, $\omega=3$), ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζομεν καὶ τοῦτον ($\psi=-1$).

Οὕτως ἀνάγεται ἡ λύσις τοῦ συστήματος τριῶν ἐξισώσεων τρεῖς ἀγνώστους ἐχουσῶν εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν.

Ἔστωσαν νῦν ν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἰσαρίθμους ἀγνώστους περιέχουσαι· ἐὰν ἄγνωστόν τινα τῆς πρώτης ἀπαλείψωμεν μεταξὺ αὐτῆς καὶ ἑκάστης τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν ν—1 ἐξισώσεις (μίαν ἐξ ἑκάστης τῶν λοιπῶν), αἵτινες μετὰ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι, (διότι ἑκάστη νέα ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ ἐκείνην, ἥτις συνδυασθεῖσα μετὰ τῆς πρώτης ἔδωκεν αὐτήν, καὶ τὸ σύστημα μένει ἰσοδύναμον). Αἱ νέαι αὗται ἐξισώσεις περιέχουσι μόνον τοὺς ν—1 ἀγνώστους καὶ ἑπομένως ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα ν—1 ἐξισώσεων μετὰ ν—1 ἀγνώστων· ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ σύστημα λυθῇ καὶ ἀντικατασταθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν ν—1 ἀγνώστων εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ μείνῃ ἐν αὐτῇ εἷς μόνον ἄγνωστος καὶ ἑπομένως θὰ προσδιορισθῇ καὶ οὗτος· ὥστε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἀνάγεται *ἡ λύσις παντὸς συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν ἄλλου συστήματος μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ἔχοντος ὀλιγώτερα.*

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου δυνάμεθα νὰ λύσωμεν οἱονδήποτε σύστημα·

διότι δι' αὐτοῦ ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν ν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν τῶν ν—1, καὶ τούτων πάλιν εἰς τὴν λύσιν τῶν ν—2, καὶ οὕτω καθεξῆς, καὶ τέλος εἰς τὴν λύσιν δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν, τὴν ὁποίαν λύσιν ἐμάθομεν.

* Παρατηρήσεις.

Πολλάκις ἡ φύσις τῶν ἐξισώσεων παρέχει τρόπον λύσεως συντομώτερον τοῦ γενικοῦ.

Οὕτω, λόγου χάριν, δὲν εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὴν συντομίαν τῆς λύσεως ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἐν ἑκάστῃ μεταβάσει ἀπὸ συστήματος εἰς σύστημα, οὐδὲ ἡ ἐκλογὴ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις, μόνη αὕτη, συνδυάζεται πρὸς πάσας τὰς ἄλλας· ἀλλ' οὐδὲ εἶνε ἀνάγκη νὰ συνδυάζηται πάντοτε μία καὶ ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις πρὸς τὰς ἄλλας, ἀλλὰ ποικίλοι συνδυασμοὶ δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων (ἢ καὶ πασῶν) δύνανται νὰ γίνωσι, δι' ὧν ταχύτερον νὰ εὑρίσκηται ἡ λύσις.

Καὶ ταῦτα μὲν γενικῶς, ἰδίᾳ δὲ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

1) Ἐὰν ἐξίσωσίς τις ἑνὸς συστήματος δὲν ἔχῃ τινὰ τῶν ἀγνώστων, ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ εἶνε ἐξίσωσις καὶ τοῦ ἑπομένου συστήματος (τοῦ μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ἔχοντος ὀλιγώτερα), ἐὰν ὡς ἀπαλειπτέος ἄγνωστος ληφθῇ ὁ ἐν τῇ ἐξισώσει μὴ ὑπάρχων.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 3\chi-5\psi+4\varphi+\omega&=0\\ 2\chi+5\psi-\varphi-2\omega&=1\\ 5\chi-\psi&=2\\ 3\chi+8\psi+8\omega&=10. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁ φ δὲν ὑπάρχει εἰς τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις, λαμβάνοντες τοῦτον ὡς ἀπαλειπτέον ἄγνωστον, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 11\chi+11\psi-7\omega&=4\\ 5\chi-\psi&=2\\ 3\chi+8\psi+8\omega&=10, \end{aligned}$$

τοῦ ὁποίου ἡ πρώτη ἐξίσωσις προέκυψεν ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τοῦ δοθέντος συστήματος, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἶνε αὐταὶ αἱ δοθεῖσαι.

Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δὲν ἔχει τὸν ἄγνωστον ω, λαμβάνοντες τοῦτον ὡς ἀπαλειπτέον, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 109\chi+144\psi&=102\\ 5\chi-\psi&=2. \end{aligned}$$

2) Ἐνίοτε προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (ἢ πάσας ἢ τινας μόνον) εὑρίσκομεν τὴν λύσιν. Οὕτως ἐν τῷ συστήματι

$$\chi+\psi-\varphi=3$$
$$\chi-\psi+\varphi=5$$
$$-\chi+\psi+\varphi=9$$

ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ἀνὰ δύο, εὑρίσκομεν

$$2\chi=8, \qquad 2\psi=12, \qquad 2\varphi=14.$$

Ὁμοίως εἰς τὸ σύστημα

$$\chi+\psi+\varphi=5$$
$$\psi+\varphi+\omega=4$$
$$\varphi+\omega+\chi=8$$
$$\omega+\chi+\psi=13$$

ἐὰν προσθέσωμεν πάσας τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιρέσωμεν τὴν προκύπτουσαν διὰ 3, εὑρίσκομεν

$$\chi+\psi+\varphi+\omega=10.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρεθῇ ἑκάστη τῶν δοθεισῶν, προκύπτει

$$\omega=5, \qquad \chi=6, \qquad \psi=2, \qquad \varphi=-3.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε πολλαπλασιασταί τινες, ἐφ' οὓς πολλαπλασιαζόμεναι αἱ ἐξισώσεις τοῦ τυχόντος συστήματος καὶ προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουσιν ἐξίσωσιν ἕνα μόνον (ἢ οὐδένα) ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζουσαν αὐτόν· ἀλλ' ἡ εὕρεσις τῶν πολλαπλασιαστῶν τούτων ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος ἔργου.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἐκ τῆς προσθέσεως ἐξισώσεών τινων τοῦ συστήματος (πολλαπλασιασμένων ἑκάστης ἐπὶ ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0) προκύπτῃ ἐξίσωσις μηδένα περιέχουσα ἄγνωστον, τὸ σύστημα εἶνε ἢ ἀδύνατον, ἢ ἀόριστον.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑπόμενα συστήματα

1ον) $\begin{cases} \chi+2\psi-\omega=2 \\ 3\chi-\psi+4\omega=27 \\ 4\chi+\psi-5\omega=-11 \end{cases}$ $\qquad \chi=3,\ \psi=2,\ \omega=5$

2ον) $\begin{cases} \chi+\psi=\gamma \\ \psi+\omega=\alpha \\ \omega+\chi=\beta \end{cases}$ $\qquad \chi=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha),\ \psi=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta),\ \omega=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$

3ον) $\begin{cases} \chi-\psi=\alpha \\ \psi-\omega=\beta \\ \omega-\chi=\gamma \end{cases}$

4ον) $\begin{cases} \chi-8\psi+3\omega-\varphi=-1 \\ \psi-2\omega-\varphi=0 \\ 5\omega+2\varphi=0 \\ 4\varphi=1 \end{cases}$ $\quad \varphi=\frac{1}{4}, \ \omega=-\frac{1}{10}, \ \psi=\frac{1}{20}, \ \chi=-\frac{1}{20}$

5ον) $\begin{cases} 5\chi-7\psi+4\omega+\varphi=31 \\ 3\chi+\psi-\omega-2\varphi=10 \\ 2\omega-\varphi=0 \\ 7\omega+2\varphi=11 \end{cases}$ $\quad \omega=1, \ \varphi=2, \ \psi=0, \ \chi=5$

6ον) $\begin{cases} 2\chi-\psi+5\omega-\varphi=11 \\ 2\chi+\psi-3\omega+4\varphi=11 \\ \chi+5\psi-3\omega+\varphi=6 \\ 6\chi-\psi+4\omega+2\varphi=24 \end{cases}$ $\quad \chi=1, \ \psi=2, \ \omega=3, \ \varphi=4$

7ον) $\frac{2}{\chi}-\frac{1}{\psi}=1$

$\frac{7}{\chi}+\frac{2}{\psi}=20 \qquad \chi=\frac{1}{2}, \quad \psi=\frac{1}{3}.$

Ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὡς ἄγνωστοι δέον νὰ θεωρηθῶσι τὰ $\frac{1}{\chi}$ καὶ $\frac{1}{\psi}$, καὶ πρὸς ταῦτα νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις.

Ἡ ἐξίσωσις $\chi+\psi=2$ προφανῶς ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, καὶ ὅμως διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν· διότι ἐξ αὐτῆς ἕπεται

$$(\chi+\psi)^2=4$$

ἐκ δὲ τούτων συνάγεται $(\chi+\psi)^2-4=\chi+\psi-2$

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ $\chi+\psi-2$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi+\psi+2=1 \quad \text{ἢ καὶ} \quad \chi+\psi=-1$$

αὕτη δὲ μετὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως συνδυαζομένη δίδει

$$2=-1 \quad \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

Προβλήματα.

1ον) *Εὑρεῖν κλάσμα, τὸ ὁποῖον, ἂν μὲν αὐξηθῶσι κατὰ μονάδα ὅροι αὐτοῦ, νὰ γίνηται ἴσον τῷ $\frac{4}{5}$, ἂν δὲ ἐλαττωθῶσι κατὰ μονά νὰ γίνηται ἴσον τῷ $\frac{3}{4}$.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διὰ τοῦ ψ παρονομαστὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi+1}{\psi+1}=\frac{4}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi-1}{\psi-1}=\frac{3}{4},$$

ἤτοι

$$5\chi-4\psi=-1$$
$$4\chi-3\psi=\ 1.$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶνε οἱ χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=7$, $\psi=9$· ἐπομένως τὸ ζητού νον κλάσμα εἶνε $\frac{7}{9}$.

2ον) *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ 7 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπο διὰ 11 ὑπόλοιπον 10 καὶ διὰ 13 ὑπόλοιπον 3· τὸ δὲ ἄθροισμα τριῶν πηλίκων νὰ εἶνε ἴσον πρὸς τὰ τρία δέκατα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ*

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν καὶ διὰ ω, φ, ψ, τὰ πηλίκα, θὰ ἔχωμεν

$$\chi=7\omega+1$$
$$\chi=11\varphi+10$$
$$\chi=13\psi+3$$
$$\omega+\varphi+\psi=\frac{3}{10}\chi,$$

πρέπει δὲ πάντες οἱ ἄγνωστοι νὰ εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν ω, φ, ψ, ληφθεῖσαι ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ἐξι σεων ἀντικατασταθῶσιν εἰς τὴν τετάρτην, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi-1}{7}+\frac{\chi-10}{11}+\frac{\chi-3}{13}=\frac{3}{10}\chi,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=120$· ὅθεν $\varphi=10$, $\omega=17$, $\psi=9$.

3ον) *Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας· τὸ τετ πλοῦν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα τὸ τριπλ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων· ἐὰν δὲ γραφῶσι τὰ ψηφία κατ' ἀντίστρο τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 36.*

Ἔστωσαν χ αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ πρῶτον εἶνε $4\psi-3\chi=1$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ ὅλον $10\chi+\psi$ μονάδας καὶ ὁ ἐξ αὐτοῦ προκύπτων (διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων) ἔχει μονάδας τὸ ὅλον $10\psi+\chi$, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$10\chi+\psi=10\psi+\chi+36 \cdot \quad \text{ὅθεν } 9\chi-9\psi=36.$$

Ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα

$$4\psi-3\chi=1$$
$$\chi-\psi=4,$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ἄγνωστοι θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10,

Ἐπειδὴ δὲ λύοντες τὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\chi=17$ καὶ $\psi=13$, συμπεραίνομεν, ὅτι τοιοῦτος ἀριθμὸς οὐδεὶς ὑπάρχει.

4ον) *Ἱέρων ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν ἔδωκεν εἰς χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ ἐξ αὐτοῦ στέφανον τοῦ Διός. Ὑποπτεύσας δὲ μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ στεφάνου, ὅτι ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε δι' ἀργύρου μέρος τοῦ χρυσοῦ, ἠρώτησε τὸν Ἀρχιμήδην, ἂν εἶνε δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῇ τοῦτο. Ὁ Ἀρχιμήδης γνωρίζων, ὅτι ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, ὁ δὲ ἄργυρος τὰ 99, ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν αὐτὸν 9 λιτρῶν καὶ 6 οὐγγιῶν· οὕτω δὲ ἀνεκάλυψε τὸν δόλον. Ζητεῖται, πόσος ἄργυρος καὶ πόσος χρυσὸς ὑπῆρχεν ἐν τῷ στεφάνῳ.*

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν οὐγγιῶν τοῦ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσοῦ καὶ ψ ὁ τοῦ ἀργύρου· κατὰ πρῶτον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν (ἀναμνηστέον, ὅτι 1 λίτρ. $=16$ οὐγγ.)

$$\chi+\psi=160.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, τὸ βάρος χ τοῦ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσοῦ θὰ ἀποβάλῃ ἐν τῷ ὕδατι $\frac{52}{1000}\chi$ οὐγγίας· ὁμοίως τὸ βάρος ψ τοῦ ἀργύρου θὰ ἀποβάλῃ οὐγγίας $\frac{99}{1000}\psi$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἀπωλειῶν θὰ συναποτελέσῃ τὴν ὅλην ἀπώλειαν τοῦ βάρους τοῦ στεφάνου ἐν τῷ ὕδατι, ἤτοι 10 οὐγγίας, ἐξ ὧν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{52}{1000}\chi+\frac{99}{1000}\psi=10$$

ἢ

$$52\chi+99\psi=10000.$$

Λύοντες δὲ τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν

$$\chi = 7 \text{ λίτρ. } 12 \text{ οὐγγίαι καὶ } \frac{12}{47} \text{ οὐγγίας.}$$

$$\psi = 2 \text{ λίτρ. } 3 \text{ οὐγγίαι καὶ } \frac{35}{47} \text{ οὐγγίας.}$$

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἄνευ ἐξισώσεων ὡς ἑξῆς. Ἂν ὁ στέφανος ἦτο ὅλος ἐκ χρυσοῦ, θὰ ἔχανεν ἐν τῷ ὕδατι τὰ 0,052 τοῦ βάρους του, ἤτοι θὰ ἔχανεν οὐγγίας $0{,}052 \times 160$ ἢ 8,32 οὐγγ. ἀλλὰ τώρα χάνει 10 οὐγγίας, ἤτοι χάνει 1,68 οὐγγ. περισσότερον τοῦ πρέποντος, καὶ ἐπειδὴ δι' ἑκάστην οὐγγίαν χρυσοῦ, ἣν ἀντικαθιστῶμεν δι' ἀργύρου, χάνει ὁ στέφανος 0,047 τῆς οὐγγίας περισσότερον (διότι τοῦ χρυσοῦ ἡ οὐγγία χάνει τὰ 0,052, ἐν ᾧ τοῦ ἀργύρου χάνει τὰ 0,099 αὐτῆς), συμπεραίνομεν, ὅτι τόσαι οὐγγίαι ἀργύρου θὰ εἶνε (ἂν δι' ἀργύρου ἐνοθεύθη ὁ στέφανος) ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν ἀριθμὸν 0,047 ὁ 1,68, ἤτοι $\frac{1680}{47}$ ἢ 2λίτρ. 3οὐγ. καὶ $\frac{35}{47}$ τῆς οὐγγίας

5ον) *Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{1}{5}$, *ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων του ὁ 5, καὶ ἴσον μὲ* $\frac{1}{3}$, *ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων του ὁ 3.*

Ἔστω χ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ψ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος· κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\frac{\chi-5}{\psi-5} = \frac{1}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi-3}{\psi-3} = \frac{1}{3},$$

αἱ ἐξισώσεις αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$3\chi - \psi = 6$$
$$5\chi - \psi = 20,$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε οἱ χ καὶ ψ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν $\chi = 7$, $\psi = 15$· ὥστε τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶνε τὸ $\frac{7}{15}$.

6ον) *Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 15 καὶ ὅστις ἀντιστρεφόμενος ἐλαττοῦται κατὰ 9.*

Ἔστωσαν χ αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐν πρώτοις εἶνε $\chi + \psi = 15.$

Ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ ὅλον $10\chi + \psi$ μονάδας, ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ $\chi + 10\psi$, αὗται δὲ θὰ εἶνε ὀλιγώτεραι τῶν πρώτων κατὰ 9, ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $10\chi + \psi = \chi + 10\psi + 9$

ἢ $9\chi = 9\psi + 9$, ἤτοι $\chi = \psi + 1$

ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα $\chi+\psi=15$
$\chi=\psi+1$.

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=8$, $\psi=7$, ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 87.

7ον) *Ἐρωτηθείς τις περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ἀπεκρίθη· πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία μου ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ μου, μετὰ 8 δὲ ἔτη θὰ εἶνε διπλασία· ζητοῦνται αἱ ἡλικίαι αὐτῶν.*

Ἐὰν παρασταθῇ τοῦ πατρὸς ἡ ἡλικία διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ υἱοῦ διὰ τοῦ ψ, αἱ ἡλικίαι αὐτῶν πρὸ 8 ἐτῶν ἦσαν

$$\chi-8 \quad \text{καὶ} \quad \psi-8,$$

μετὰ 8 δὲ ἔτη αἱ ἡλικίαι θὰ εἶνε

$$\chi+8 \quad \text{καὶ} \quad \psi+8$$

ἑπομένως κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶνε

$$\chi-8=3(\psi-8)$$
$$\chi+8=2(\psi+8)$$

ἢ

$$\chi-3\psi=-16$$
$$\chi-2\psi=\ \ 8,$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνωσι τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\chi=56$ $\psi=24$, ἡ δὲ λύσις αὐτὴ πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

8ον) *Ἔχων τις τρία καλάθια μὲ μῆλα ἔλαβεν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἔθεσεν εἰς τὰ δύο ἄλλα, εἰς ἕκαστον τόσα, ὅσα αὐτὸ εἶχεν· ἔπειτα ἔλαβεν ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἔθεσεν εἰς τὰ δύο ἄλλα, εἰς ἕκαστον τόσα ὅσα τότε εἶχεν· ἔπειτα καὶ ἐκ τοῦ τρίτου ὁμοίως· τότε δὲ καὶ τὰ τρία καλάθια εἶχον ἴσον ἀριθμὸν μήλων, ἤτοι 80· ζητεῖται, πόσα εἶχεν ἕκαστον ἐν ἀρχῇ.*

Ἔστωσαν χ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων τοῦ πρώτου, ψ ὁ ἀριθμὸς τοῦ δευτέρου καὶ ω τοῦ τρίτου.

Εἰς τὴν πρώτην μετάθεσιν τῶν μήλων ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τοῦ πρώτου καλαθίου τόσα μῆλα, ὅσα εἶχον τὰ δύο ἄλλα ὁμοῦ, ἤτοι $\psi+\omega$, τῶν δὲ δύο ἄλλων τὰ μῆλα ἐδιπλασιάσθησαν, ὥστε τὰ μῆλα ἦσαν μετ' αὐτὴν

$$\chi-\psi-\omega, \qquad 2\psi, \qquad 2\omega$$

εἰς τὴν δευτέραν μετάθεσιν ἐδιπλασιάσθησαν μὲν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου καλαθίου, ἀφῃρέθησαν δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τόσα, ὅσα

περιεῖχον τὰ δύο ἄλλα· ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ τῶν μήλων ἔγιναν

$$2(\chi-\psi-\omega), \qquad 2\psi-(\chi-\psi-\omega)-2\omega, \qquad 4\omega$$

ἢ
$$2\chi-2\psi-2\omega, \qquad 3\psi-\omega-\chi \qquad 4\omega$$

εἰς δὲ τὴν τρίτην μετάθεσιν ἔγιναν ὁμοίως

$$4\chi-4\psi-4\omega, \qquad 6\psi-2\omega-2\chi, \qquad 7\omega-\chi-\psi.$$

Ἑπομένως κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\begin{array}{l} 4\chi-4\psi-4\omega=80 \\ -2\chi+6\psi-2\omega=80 \\ -\chi-\psi+7\omega=80 \end{array} \quad (1) \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{array}{l} \chi-\psi-\omega=20 \\ -\chi+3\psi-\omega=40 \\ -\chi-\psi+7\omega=80, \end{array} \quad (\iota)$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ἵνα λύσωμεν τὸ σύστημα (1) προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\chi+\psi+\omega=240 \qquad (2)$$

(ὅπερ καὶ ἐκ τῶν προτέρων ἦτο φανερόν· διότι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν μήλων δὲν μετεβλήθη).

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (ι), εὑρίσκομεν

$$\chi=130, \qquad \psi=70, \qquad \omega=40.$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἄνευ ἐξισώσεων ὡς ἑξῆς. Εἰς τὴν τελευταίαν μετάθεσιν ἐδιπλασιάσθησαν τὰ μῆλα τῶν δύο πρώτων καλαθίων, ἑπομένως ταῦτα εἶχον πρὶν 40 καὶ 40 μῆλα· ὅθεν τὸ τρίτον εἶχεν 160· εἰς τὴν δευτέραν μετάθεσιν ἐδιπλασιάσθησαν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου· λοιπὸν εἶχε τὸ μὲν πρῶτον 20, τὸ δὲ τρίτον 80· ἄρα εἶχε τὸ δεύτερον 140· τέλος εἰς τὴν πρώτην ἐδιπλασιάσθησαν τὰ μῆλα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, ἄρα τὸ μὲν δεύτερον εἶχεν 70, τὸ δὲ τρίτον 40· ἑπομένως τὸ πρῶτον εἶχεν 130.

9ον) *Δύο βυτία ἐντελῶς ἴσα καὶ ὅμοια τὴν κατασκευὴν εἶνε πλήρη, τὸ μὲν ἓν ἐλαίου, τὸ δὲ ἄλλο ὕδατος· καὶ τὸ μὲν πρῶτον ζυγίζει α ὀκάδας, τὸ δὲ δεύτερον β. Πόσον εἶνε τὸ ἔλαιον καὶ πόσον τὸ ὕδωρ; καὶ πόσον ζυγίζει τὸ καθὲν βυτίον κενόν;*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸ βάρος τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν δύο βυτίων κενοῦ καὶ διὰ ψ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ διὰ ω τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶνε κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος·

$$\chi+\psi=\beta$$
$$\chi+\omega=\alpha.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἔλαιον καὶ τὸ ὕδωρ τῶν δύο βυτίων ἔχουσιν ἴσους ὄγκους,

τὸ βάρος ω τοῦ ἐλαίου θὰ εἶνε τὰ 0,912 τοῦ βάρους ψ τοῦ ὕδατος, ἤτοι

$$ω=0,912.ψ.$$

Ἀπαλείφοντες νῦν τὸ ω εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$χ+ψ=β$$
$$1000χ+912ψ=1000α,$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν λύοντες

$$χ=\frac{1000α-912β}{88},\quad ψ=\frac{1000(β-α)}{88}\quad καὶ\quad ω=\frac{912(β-α)}{88}.$$

Ὅτι β εἶνε μεγαλήτερον τοῦ α εἶνε προφανές· ἀλλὰ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ εἶνε θετική· ἤτοι πρέπει νὰ εἶνε

$$0,912\,β<α<β.$$

ΣΗΜ. Ἐὰν πρόβλημά τι ἔχῃ μὲν πολλοὺς ἀγνώστους, ἀλλὰ τοιούτους, ὥστε ἐκ τοῦ ἑνὸς νὰ εὑρίσκωνται εὐκόλως καὶ οἱ ἄλλοι, τὸ τοιοῦτον πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως καὶ διὰ πολλῶν· (τοιαῦτα εἶνε τὰ προβλήματα τῶν ἐδαφίων 120, 127, 129, 133, 134 καὶ τὸ 2ον καὶ 4ον ἐκ τῶν προηγουμένων)· διὰ μιᾶς μέν, ἐὰν παρασταθῇ ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄγνωστος δι' ἑνὸς γράμματος καὶ ἐκφρασθῶσι δι' αὐτοῦ οἱ λοιποί, μετὰ δὲ ταῦτα εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἣν ὁ ἄγνωστος οὗτος ἐπαληθεύει· διὰ πολλῶν δέ, ἐὰν ἕκαστος τῶν ἀγνώστων παρασταθῇ δι' ἰδίου γράμματος καὶ ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμοσθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος. Ὁ δεύτερος οὗτος τρόπος εἶνε γενικώτερος τοῦ πρώτου· διότι παρέχει σύστημα ἐξισώσεων, ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ἄλλων ἀγνώστων προκύπτει καὶ ἡ ἐξίσωσις ἡ κατὰ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρισκομένη· δύναται δὲ πάντοτε νὰ γίνῃ ἡ τοιαύτη ἀπαλοιφή· διότι ἐξ ὑποθέσεως τοιοῦτοι εἶνε οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος, ὥστε δι' ἑνὸς ἐκ τῶν ἀγνώστων ἐκφράζονται οἱ λοιποί· τοὺς ὅρους δὲ τούτους τοῦ προβλήματος παριστῶσι καὶ σημαίνουσιν αἱ ἐξισώσεις. Εὐνόητον δὲ εἶνε, ὅτι κατὰ τὰς περιστάσεις δύναται νὰ εἶνε εὐκολωτέρα ἡ διὰ πολλῶν ἐξισώσεων λύσις· διότι αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος δύνανται κατὰ ποικίλους τρόπους νὰ συνδυασθῶσιν, ὥστε νὰ προκύψῃ ἐξ αὐτῶν μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον· καθ' ἕνα δὲ τῶν τρόπων τούτων προκύπτει ἡ μία ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

1) Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμὸν ἔχοντα τὰς ἑπομένας ἰδιότητας. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ψηφίων εἶνε 11· τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶνε διπλάσιον τοῦ τῶν ἑκατοντάδων· ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλήτερος κατὰ 99. (Ἀπ. 182).

2) Δύο ἀγγεῖα περιέχουσιν α ὀκάδας ὕδατος· λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον· ἔπειτα τὸ τρίτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον· ἔπειτα τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου τότε εἰς τὸ πρῶτον καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον· τέλος δὲ λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον. Τότε δὲ τὸ πρῶτον ἀγγεῖον εὑρίσκεται περιέχον β ὀκάδας περισσότερον τοῦ δευτέρου. Πόσας ὀκάδας περιεῖχεν ἕκαστον τῶν ἀγγείων κατ' ἀρχάς; $\left(\text{'Απ. } \frac{\alpha+5\beta}{2}, \frac{\alpha-5\beta}{2}\right)$.

3) Ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 2 μέτρα ἡ βάσις ὀρθογωνίου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ 3 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐλαττοῦται κατὰ 41 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἐὰν δὲ αὐξηθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ κατὰ 3 μέτρα καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος κατὰ 2, ἡ ἐπιφάνεια αὐξάνει κατὰ 24 τετραγωνικὰ μέτρα. Ζητοῦνται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου. (Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει τόσα τετραγωνικὰ μέτρα, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι, πόσα μέτρα ἔχει ἡ βάσις καὶ πόσα τὸ ὕψος). ('Απ. βάσις 33, ὕψος 32)

4) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον νὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5 ('Απ. 10 καὶ 2).

5) Ἄνθρωπος ἀναδεχθεὶς τὴν μετακόμισιν ἀγγείων τριῶν μεγεθῶν, συμφωνεῖ νὰ πληρώσῃ δι' ἕκαστον συντριβὲν ἀγγεῖον τόσα, ὅσα θὰ ἐλάμβανε μετακομίσας αὐτὸ σῶον. Ἔλαβε δὲ ἵνα μετακομίσῃ 3 μεγάλα ἀγγεῖα, 5 μεσαῖα καὶ 9 μικρά.

Εὑρέθη δὲ ὅτι, ἂν μὲν ἔθραυε τὰ μεγάλα ἢ τὰ μικρά, θὰ ἐλάμβανεν 25 δραχμάς, ἂν δὲ τὰ μεσαῖα, 11 δραχμάς. Ζητεῖται, πόσον συνεφώνησε διὰ τὴν μετακόμισιν τῶν ἀγγείων ἑκάστου εἴδους.

('Απ. δι' ἕκαστον μέγα 6, δι' ἕκαστον μεσαῖον 5 καὶ δι' ἕκαστον μικρὸν 2).

6) Εὑρεῖν τετραψήφιον ἀριθμὸν ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας· τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶνε 14· ἐὰν γραφῶσι τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς κατὰ 369· τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν μέσων· ἐὰν δὲ τὰ μεσαῖα ψηφία ἀντιμετατεθῶσιν, ἐλαττοῦται ὁ ἀριθμὸς κατὰ 630. ('Απ. 3704).

7) Ὀκτὼ βόες ἔφαγον εἰς 7 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 4 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο· 9 βόες ἔφαγον εἰς 8 ἑβδομά-

δας τὸ χόρτον 5 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο. Ζητεῖται, πόσοι βόες δύνανται νὰ βοσκήσωσιν ἐπὶ 12 ἑβδομάδας εἰς 6 στρέμματα συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ χόρτου, τὸ ὁποῖον θὰ βλαστήσῃ κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο; (᾿Απ. 8).

8) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἁτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετά τινα χρόνον ἄλλη ἁτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ'· ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος, ὥστε νὰ φθάσωσιν ἀμφότεραι συγχρόνως εἴς τινα τόπον. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἁτμάμαξα, ἀφοῦ διέτρεξε τὰ δύο τρίτα τῆς ὁδοῦ, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς εἰς τὸ ἥμισυ τῆς προτέρας, καὶ οὕτω συμβαίνει συνάντησις τῶν ἁτμαμαξῶν α χιλιόμετρα πρὸ τοῦ τόπου, εἰς ὃν ἔπρεπε νὰ συναντηθῶσι. Ζητεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως ἀπόστασις τοῦ τόπου.

Ἀπ. Ἂν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσαντα χρόνον, εὑρίσκομεν

$$\chi=3\left(2-\frac{\tau}{\tau'}\right).\alpha, \qquad \psi=3\frac{\tau'-\tau}{\tau\tau'}\left(2-\frac{\tau}{\tau'}\right)\alpha.$$

9) Ἵνα ἐκτελέσωσιν ἔργον τι, χρειάζονται, οἱ μὲν Α καὶ Β ὁμοῦ γ ὥρας, οἱ δὲ Β καὶ Γ ὁμοῦ α ὥρας, οἱ δὲ Γ καὶ Α ὁμοῦ β ὥρας· πόσας ὥρας χρειάζεται ἕκαστος τούτων διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ πόσας ὅλοι ὁμοῦ;

Ἀπ. Παριστῶντες διὰ τοῦ χ τὰς ὥρας τοῦ πρώτου, διὰ ψ τοῦ δευτέρου καὶ διὰ ω τοῦ τρίτου, διὰ δὲ τοῦ φ τὰς ὥρας, καθ' ἃς ὅλοι ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον, εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\chi}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right), \qquad \frac{1}{\psi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

$$\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right) \text{ καὶ } \frac{1}{\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

10) Γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος α καὶ τοῦ πηλίκου π δύο ἀριθμῶν, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha\pi}{\pi+1}, \ \frac{\alpha}{\pi+1}\right).$

11) Τρία βυτία ἴσα καὶ τὴν κατασκευὴν ἐντελῶς ὅμοια, εἶνε πλήρη τὸ μὲν ἓν ὕδατος, τὸ δὲ ἄλλο ἐλαίου, τὸ δὲ τρίτον ἐλαίου καὶ ὕδατος ὁμοῦ· τὸ βάρος τοῦ πρώτου εἶνε α ὀκάδες, τοῦ δευτέρου β καὶ τοῦ τρίτου γ. Νὰ εὑρεθῇ 1) τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ 2) πόσον ὕδωρ καὶ πόσον ἔλαιον περιέχει τὸ τρίτον.

(Ἀπ. Ἐὰν χ παριστᾷ τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ, φ τὸ βάρος τοῦ

ὕδατος κα[illegible] ω τὸ τοῦ ἐλαίου καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶνε

$$\lambda = \frac{\beta - \alpha\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \varphi = \frac{\gamma - \beta}{1-\varepsilon}, \quad \omega = \frac{\alpha - \gamma\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

12. Λέβης [illegible] ἐκ χαλκοῦ κα[illegible] ἔχει βάρος 108 χιλιογράμμων, χάνει δὲ ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθιζόμενος 13 χιλιόγραμμα. Γνωστὸν δὲ εἶνε ὅτι ὁ χαλκὸς χάνει ἐν τῷ ὕδατι βυθιζόμενος τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ βάρους του, [illegible] ζητεῖται ἐκ πόσου χαλκοῦ καὶ ἐκ πόσου [illegible] ὁ λέβης οὗτος.

(Ἀπ. [illegible] 72 [illegible] χαλκοῦ 36).

13. [illegible] ἀλλὰ [illegible] κατὰ 3 μονάδας [illegible] ὡς τόσον νὰ [illegible] (Ἀπ. 3 καὶ 6).

14. [illegible] δὲ τὸ ὕψος [illegible] τὸ ὕψος τοῦ [illegible] (Ἀπ. 4).

Περὶ ἀνισοτήτων

15. [illegible] $<$ τὴν ἀνισότητα δύο [illegible] λέγεται ἀνισότης [illegible]

[illegible] ἀριθμῶν [illegible] ἀφαιρ[illegible]

[illegible] ἀριθμός. ἢ [illegible]

[illegible] καὶ τοὺς [illegible] καὶ [illegible] σημεῖα [illegible]

[illegible] πολλάκις [illegible]

Καὶ ἂν εἰς τὴν αὐτὴν ἀνισότητα προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς -10 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, προκύπτει ἡ ἀνισότης $-5<-2$.

Καὶ γενικῶς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀνισότητα ὡς ἑξῆς:

Ἀριθμὸς α λέγεται μεγαλήτερος ἄλλου β, ἐὰν ἡ διαφορὰ α—β εἶνε θετικὸς ἀριθμός.

Καὶ ὄντως· ἔστω ἡ διαφορὰ α—β θετικὸς ἀριθμός, καὶ ἴση τῷ θ· ἂν τότε εἰς τὴν ἀνισότητα $\theta>0$ προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς β, προκύπτει ἡ ἀνισότης $\beta+\theta>\beta$, ἤτοι $\alpha>\beta$.

Ἐὰν ὅμως ἡ διαφορὰ α—β εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ ἀντίθετος β—α εἶνε θετικὸς καὶ ἑπομένως θὰ εἶνε τότε $\beta>\alpha$· ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι $\alpha>\beta$ σημαίνει, ὅτι ἡ διαφορὰ α—β εἶνε θετικὸς ἀριθμός.

162. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰδιότητος ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς:

α'.) Ἐὰν προστεθῶσιν ἄνισοι εἰς ἀνίσους, ἀλλ' ὁ μεγαλήτερος εἰς τὸν τὸν μεγαλήτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης μένει.

Ἔστω $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$

λέγω, ὅτι τότε θὰ εἶνε καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

Διότι, ἂν εἶνε $\alpha-\beta=\theta$ καὶ $\gamma-\delta=\theta'$

θὰ εἶνε καὶ $\alpha+\gamma-(\beta+\delta)=\theta+\theta'$,

ἐπειδὴ δὲ αἱ διαφοραὶ θ καὶ θ' εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\theta+\theta'$ εἶνε θετικόν· ὥστε εἶνε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

β'.) Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ 0), μένει μὲν ἡ ἀνισότης, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε θετικός, ἀντιστρέφει ὅμως, ἂν εἶνε ἀρνητικός.

Ἔστω $\alpha>\beta$· ἂν εἶνε $\alpha-\beta=\theta$, θὰ εἶνε $\alpha\mu-\beta\mu=\theta\mu$.

καὶ ἂν μὲν ὁ μ εἶνε θετικός, μθ εἶνε ὡσαύτως θετικόν· ὥστε ἔχομεν

$$\alpha\mu>\beta\mu\cdot$$

ἂν δὲ πάλιν εἶνε μ ἀρνητικόν, καὶ ὁ μθ εἶνε ἀρνητικός· ὥστε ἔχομεν

$$\alpha\mu<\beta\mu.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος τραπῶσιν εἰς τὰ ἀντίθετα (ἤτοι ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα ἐπὶ -1), ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφει.

Οὕτως ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5>-9$, ἕπεται $5<9$.

163. Καὶ αἱ ἀνισότητες, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα, δύνανται ... ἀληθεύωσι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, ἢ μόνον διά τινας

καὶ δι' οὐδεμίαν)· τότε τὰ γράμματα ταῦτα λέγονται ἄγνωστοι τῆς ἀνισότητος.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες (101) καὶ (102) τῶν ἐξισώσεων ἀληθεύουσι καὶ εἰς τὰς ἀνισότητας, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα ἄγνωστα, καὶ ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· μόνον ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν πρέπει νὰ εἶνε θετικὸς ἀριθμός.

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\frac{\chi}{3}+\frac{2\chi}{5}+\frac{\chi-1}{2}>\chi+\frac{2}{3}$.

πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 2.3.5, λαμβάνομεν

$$10\chi+12\chi+15\chi-15>30\chi+20$$

καὶ χωρίζοντες τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἀγνώστων,

$$10\chi+12\chi+15\chi-30\chi>20+15$$

ἢ

$$7\chi>35$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ 7 (ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{1}{7}$), εὑρίσκομεν $\chi>5$·

ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ ἀριθμὸς χ εἶνε μεγαλήτερος τοῦ 5.

Ὅταν ἀνισότης ἀχθῇ εἰς τοιαύτην μορφήν, ὥστε τὸ ἓν μέλος αὐτῆς νὰ ἀποτελῆται ὑπὸ μόνου τοῦ ἀγνώστου γράμματος, τὸ δὲ ἄλλο ὑπὸ τῶν γνωστῶν, τότε λέγομεν, ὅτι *ἐλύθη* ἡ ἀνισότης.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν γίνεται καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

Πρόβλημα. Δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α πρὸς τὴν πόλιν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α· ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ποικίλει μεταξὺ 5 καὶ 8 σταδίων καθ' ὥραν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου μεταξὺ 6 καὶ 7· ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶνε 44 στάδια. Μεταξὺ ποίων ὡρῶν θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις αὐτῶν; καὶ εἰς ποῖον μέρος τῆς ὁδοῦ;

(Ἀπ. Ἡ συνάντησις θὰ συμβῇ μεταξὺ τῆς $2^{\text{ωρ.}}\ 56'$ καὶ τῆς $4^{\text{ωρ.}}$ ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως· θὰ συμβῇ δὲ μεταξὺ τοῦ $18^{\text{σταδ.}}\ \frac{1}{3}$ καὶ τοῦ $25^{\text{σταδ.}}\ \frac{1}{7}$ ἀπὸ τῆς πόλεως Α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

164. Ἐξίσωσις περιέχουσα ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος· διότι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν αὐτοβούλως πάντας τοὺς ἀγνώστους πλὴν ἑνός, ὅστις προσδιορίζεται καὶ οὗτος ἐκ τῆς ἐξισώσεως.

165. Καὶ σύστημα ἐξισώσεων περισσοτέρους ἔχον ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις ἐπιδέχεται ἐν γένει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· διότι ὁρίζοντες τοὺς περισσεύοντας ἀγνώστους αὐτοβούλως, δυνάμεθα ἐν γένει νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς λοιποὺς ἐκ τοῦ συστήματος.

Ἀλλ' ἂν ἐκ τῶν ἀπειροπληθῶν λύσεων τοιαύτης ἐξισώσεως ἢ συστήματος ζητῆται νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι (ἐν αἷς αἱ τιμαὶ πάντων τῶν ἀγνώστων εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί), τὸ ζήτημα ἀποβαίνει δυσκολώτερον· διότι οἱ περισσεύοντες ἄγνωστοι πρέπει νὰ ὁρίζωνται τότε οὐχὶ αὐτοβούλως, ἀλλ' ἁρμοδίως, ἵνα αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων προκύπτωσιν, εἰ δυνατόν, ἀκέραιαι.

166. *Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἀλγέβρας, ἐν τῷ ὁποίῳ διδάσκεται ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων δεδομένης ἐξισώσεως περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἐχούσης ἀγνώστους, ἢ καὶ συστήματος ἐξισώσεων περισσοτέρους ἔχοντος ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὑποτίθενται ἀκέραιοι ἀριθμοί· (διότι, ἂν εἶναι κλασματικοί, καθιστῶμεν αὐτοὺς ἀκεραίους ἀπαλλάσσοντες τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν).

Ἐνταῦθα θὰ θεωρήσωμεν μόνον μίαν ἐξίσωσιν περιέχουσαν δύο ἀγνώστους καὶ ἠγμένην εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma,$$

ἔνθα α, β, γ εἶνε γνωστοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί).

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, γ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι, ἂν ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διαιροῦντες δι' αὐτοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως.

167. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β, τῶν ἀγνώστων ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, ἡ ἐξίσωσις* $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ *οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν.*

Διότι, ἂν οἱ ἀκέραιοι α, β εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ ἀκεραίου δ, οἱουσδήποτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τῶν χ καὶ ψ, τὸ πρῶτον

μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ δ, καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε ἴσον τῷ γ, ὅστις ἐξ ὑποθέσεως δὲν εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ δ.

168. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις* $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ *ἔχει ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.*

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι εἷς τῶν συντελεστῶν, οἷον ὁ α, δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ θετικός· διότι, ἂν δὲν εἶνε, γίνεται, τρεπομένων τῶν σημείων πάντων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως.

Ἐὰν νῦν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν ἄγνωστον χ, οὗτινος ὁ συντελεστὴς ὑποτίθεται θετικὸς ἀριθμός, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$$

λέγω δέ, ὅτι ἐκ τῶν ἑπομένων τιμῶν τοῦ ψ

$$\psi=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots,(\alpha-1). \qquad (\mu)$$

ὧν τὸ πλῆθος εἶνε α, εὑρίσκεται μία καὶ μία μόνη, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ τιμὴ τοῦ χ ἀκεραία.

Ἂς τεθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ ψ κατὰ σειρὰν εἰς τὴν παράστασιν $\gamma-\beta\psi$ καὶ ἂς διαιρεθῶσιν οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ πάντες διὰ τοῦ α, ἀλλ' οὕτως, ὥστε πάντα τὰ ὑπόλοιπα νὰ εἶνε θετικὰ (γίνεται δὲ τὸ ἀρνητικὸν ὑπόλοιπον θετικόν, ἐὰν εἰς τὸ πηλίκον προστεθῇ μία ἀρνητικὴ μονάς· ἂν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν -9 διὰ 5, θὰ εἶνε πηλίκον -1 καὶ ὑπόλοιπον -4· λαμβάνοντες ὅμως ὡς πηλίκον τὸ -2, θὰ ἔχωμεν ὑπόλοιπον 1· διότι $-9=5.(-2)+1$)· λέγω, ὅτι τῶν διαιρέσεων τούτων τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶνε πάντα διάφορα ἀπ' ἀλλήλων· διότι, ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι δύο διαιρέσεις δίδουν ἴσα ὑπόλοιπα, ἔστωσαν δὲ αἱ πρὸς τὰς τιμὰς ψ' καὶ ψ'' τοῦ ψ ἀντιστοιχοῦσαι· τότε παριστωμένου τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὑπολοίπου διὰ υ καὶ τῶν πηλίκων διὰ π' καὶ π'', θὰ εἶνε

$$\gamma-\beta\psi'=\alpha\pi'+\upsilon$$
$$\gamma-\beta\psi''=\alpha\pi''+\upsilon$$

ἐκ δὲ τούτων, ἀφαιρουμένων κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\beta(\psi''-\psi')=\alpha(\pi'-\pi'')\cdot$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α, πρῶτος ὢν πρὸς τὸν β, διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\beta(\psi''-\psi')$· ἑπομένως ὁ α διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $\psi''-\psi'$· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· διότι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ψ', ψ'' εἶνε μικρότεροι τοῦ α· ἄτοπος ἄρα ἦτο ἡ ὑπόθεσις, ὅτι δύο διαιρέσεις ἔδιδον ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἐπειδὴ δὲ διαιρέτης εἶνε ὁ α, ἕπεται, ὅτι ὑπόλοιπα τῶν εἰρημένων

διαιρέσεων δύνανται νὰ εἶνε μόνον οἱ μικρότεροι αὐτοῦ ἀριθμοὶ

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots \alpha-1 \cdot$$

καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε ἀκριβῶς τόσοι, ὅσαι εἶνε καὶ αἱ διαιρέσεις, καὶ ἑκάστη ἔχει ἴδιον ὑπόλοιπον, συμπεραίνομεν, ὅτι μία τῶν διαιρέσεων τούτων δίδει ὑπόλοιπον 0· ἤτοι πρὸς μίαν τῶν τιμῶν (μ) τοῦ ψ ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ· *ὥστε ὑπάρχει τις ἀκεραία λύσις.*

169. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. *Ὅταν ἡ ἐξίσωσις* $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ *ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ἔχει καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

Ἔστω $\chi=\eta$, $\psi=\theta$ μία ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma,$$

ἤτοι ἔστω $\qquad \alpha\eta+\beta\theta=\gamma.$

Ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοί, ὁ $\alpha\eta+\beta\theta$ καὶ ὁ γ, θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις ἰσοδύναμος,

ἢ $$\alpha(\chi-\eta)+\beta(\psi-\theta)=0,$$

ἢ $$\alpha(\chi-\eta)=\beta(\theta-\psi). \qquad (\varepsilon)$$

Ἵνα εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ α διαιρεῖ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως, πρέπει ἄρα νὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον (ἂν ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύῃ δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν χ καὶ ψ)· ἐπειδὴ δὲ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν β, ἀνάγκη νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $\theta-\psi$, ἥτις θὰ εἶνε διὰ τοῦτο πολλαπλάσιόν τι τοῦ α· ὥστε πρέπει νὰ εἶνε

$$\theta-\psi=\alpha\omega,$$

τοῦ ω ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ $\theta-\psi$ τεθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (ε), προκύπτει

$$\chi-\eta=\beta\omega$$

ἐξ ὧν συνάγεται, ὅτι, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ω, αἱ τιμαὶ

$$\chi=\eta+\beta\omega$$
$$\psi=\theta-\alpha\omega$$

ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$· ὑπάρχουσιν ἄρα ἄπειροι λύσεις· ἀλλὰ πλὴν τῶν λύσεων τούτων οὐδεμία ἄλλη ὑπάρχει.

ΣΗΜ. Ὅτι αἱ τιμαὶ $\chi=\eta+\beta\omega$, $\psi=\theta-\alpha\omega$, ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, οἱοσδήποτε ἀκέραιος καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ω, ἐπιβεβαιοῦται καὶ διὰ τῆς ἀμέσου ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τὴν ἐξίσωσιν· διότι θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν χ καὶ ψ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, εὑρίσκομεν $\alpha\eta+\alpha\beta\omega+\beta\theta-\alpha\beta\omega=\gamma$, ἤτοι $\alpha\eta+\beta\theta=\gamma$, ὅπερ εἶνε ταὐτότης, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ τιμαὶ $\chi=\eta$, $\psi=\theta$, λύουσι τὴν ἐξίσωσιν.

170. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι ἐκ μιᾶς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ εὑρίσκομεν τύπον περιέχοντα πάσας τὰς λύσεις· πρὸς τοῦτο *αὐξάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ ἀόριστόν τινα ἀκέραιον ω, τὴν δὲ τιμὴν τοῦ ψ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ χ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ω.*

Ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ ω δύναται νὰ γραφῇ καὶ $-\omega$, (διότι ὁ ω εἶνε τυχὼν ἀριθμός), ἕπεται, ὅτι εἶνε ἀδιάφορον, τίς ἐκ τῶν συντελεστῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ω καὶ τίς ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ ω.

Μέθοδοι πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$.

171. Ἡ ἀπόδειξις τῆς ὑπάρξεως ἀκεραίας λύσεως παρέχει καὶ τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως αὐτῆς· καὶ ὄντως εἴδομεν, ὅτι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $0, 1, 2, 3 \ldots, \alpha-1$, εἰς ἕνα τούτων θὰ ἀντιστοιχῇ τιμὴ τοῦ χ ἀκεραία· μιᾶς δὲ λύσεως ἀκεραίας εὑρεθείσης, εὑρίσκονται ἀμέσως καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαί.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$5\chi-8\psi=7\cdot$$

λύοντες πρὸς τὸν χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{7+8\psi}{5}.$$

εἰξεύρομεν δέ, ὅτι ἐκ τῶν πέντε τιμῶν τοῦ ψ

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4$$

μία καὶ μία μόνη καθιστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἀκεραίαν· δοκιμάζοντες λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\psi=1,\quad \chi=3\cdot$$

ὅθεν πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως περιέχονται ἐν τοῖς τύποις

$$\chi=3+8\omega$$
$$\chi=1+5\omega.$$

Αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ ω (καὶ ἡ τιμὴ 0) δίδουσι τιμὰς θετικὰς ἀμφοτέρων τῶν ἀγνώστων, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἀρνητικάς.

Ἔστω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις $\quad 91\chi-30\psi=19\cdot$

λύοντες πρὸς τὸν ψ (διότι οὗτος ἔχει τὸν μικρότερον συντελεστὴν καὶ διὰ τοῦτο θὰ γίνωσιν ὀλιγώτεραι δοκιμαί), εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{91\chi-19}{30}$$

παρατηρητέον νῦν ὅτι, ἵνα διαιρῆται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ 30, ἀνάγκη νὰ λήγῃ εἰς 0· ἤτοι ἀνάγκη νὰ λήγῃ ὁ ἀριθμὸς 91χ εἰς 9· ὁ χ ἄρα πρέπει νὰ ἔχῃ μίαν τῶν ἑπομένων τιμῶν $9,\ 19,\ 29$ καὶ ταύτας μόνον δοκιμάζομεν· οὕτως εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\chi=19 \qquad \psi=3.19=57,$$

ἐξ ἧς ἐν γένει

$$\chi=19+30\omega$$
$$\psi=57+91\omega.$$

Ἔστω τέλος ἡ ἐξίσωσις $7\chi+13\psi=75$·

λύοντες πρὸς τὸν χ εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{75-13\psi}{7}$$

καὶ δοκιμάζοντες τὰς τιμὰς $\psi=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $\psi=2, \qquad \chi=7,$

ἐξ ἧς καὶ τὴν γενικὴν λύσιν

$$\chi=7-13\omega$$
$$\psi=2+\ 7\omega.$$

πλὴν τῆς εὑρεθείσης λύσεως, (ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\omega=0$) πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἔχουσιν ἕνα ἀρνητικὸν καὶ ἕνα θετικὸν ἀριθμόν.

*172. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶνε μεγάλοι ἀριθμοί, ἡ μέθοδος αὕτη ἀποβαίνει ἐπίπονος· τότε μεταχειριζόμεθα τὴν ἑπομένην μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας καὶ ἡ ὕπαρξις ἀκεραίας τινὸς λύσεως γίνεται καταφανής.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma,$

τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ α, β ὑποτίθενται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν ὁ β εἶνε μεγαλήτερος, ἂς διαιρεθῇ διὰ τοῦ α· ἔστω δὲ π τὸ πηλίκον καὶ β' τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως· τότε θὰ εἶνε

$$\beta=\alpha\pi+\beta'\cdot$$

ὅθεν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha\chi+(\alpha\pi+\beta')\psi=\gamma$$

ἢ

$$\alpha(\chi+\pi\psi)+\beta'\psi=\gamma\cdot$$

καὶ ἂν τεθῇ $\chi+\pi\psi=\chi'$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha\chi'+\beta'\psi=\gamma,$$

ἔνθα χ' εἶνε νέος τις ἄγνωστος συνδεόμενος πρὸς τοὺς χ, ψ διὰ τῆς ἰσότητος $\chi'=\chi+\pi\psi, \quad$ ἢ $\quad \chi=\chi'-\pi\psi.$

Ἐὰν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρεθῇ ἀκεραία τις λύσις, εὑρίσκεται ἀμέσως ἄλλη τῆς δοθείσης· διότι εὑρεθέντων τῶν χ' καὶ ψ, εὑρίσκεται καὶ ὁ χ ἐκ τῆς ἰσότητος $\chi=\chi'-\pi\psi.$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων ἄλλης ὁποία ἔχει συντελεστάς τὸν μικρότερον τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου συντελεστοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου· ἀλλ' ὁμοίως ἀνάγεται καὶ αὐτῆς ἡ λύσις εἰς ἄλλην καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γινόμεναι διαιρέσεις εἶνε αἱ διαιρέσεις δι' ὧν εὑρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν συντελεστῶν a καὶ b, οἵτινες δὲ ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔπεται ὅτι θὰ εὑρεθῇ τελικῶς ὑπόλοιπόν τι ἴσον τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ 1, καὶ θὰ φθάσωμεν οὕτως εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾗ ὁ εἷς τῶν ἀγνώστων θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὴν μονάδα 1, ἤτοι εἰς ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

[illegible]

[illegible]

*'Ακέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$.

173. Δυνατὸν νὰ ζητηθῶσιν ἐκ τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $+\beta\psi=\gamma$ ἐκεῖναι, ἐν αἷς αἱ τιμαὶ ἀμφοτέρων τῶν ἀγνώστων εἶνε θεcοὶ ἀριθμοί. Πρὸς εὕρεσιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον συντελεσταὶ α καὶ β εἶνε ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς.

Ἔστωσαν πρότερον ὁμοειδεῖς· ἐπειδὴ ὁ α ὑπετέθη θετικός, καὶ ὁ β εἶνε τικός· ἐὰν νῦν ὁ γ εἶνε ἀρνητικός, οὐδεμία προφανῶς ὑπάρχει θετικὴ σις· ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶνε καὶ ὁ γ θετικός.

Τούτων τεθέντων, ἔστω $\chi=\eta$, $\psi=\theta$ ἡ διὰ τοῦ πρώτου τρόπου εὑρι-ομένη ἀκεραία λύσις, ἐν ᾗ ἑπομένως εἶνε ὁ θ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρόρος τοῦ α· τότε πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις περιέχονται ἐν τοῖς τύποις

$$\chi=\eta-\beta\omega$$
$$\psi=\theta+\alpha\omega.$$

Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ ω καθιστῶσι τὸν ψ ἀρνητικόν· διότι, ἂν τεθῇ $=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ldots$, προκύπτει

$$\psi=\theta-\alpha,\quad \theta-2\alpha,\quad \theta-3\alpha,\ldots$$ ἅτινα

ντα εἶνε ἀρνητικά, διότι ὁ θ εἶνε μικρότερος τοῦ α· αἱ δὲ θετικαὶ πᾶσαι καὶ ἡ 0) καθιστῶσιν αὐτὸν θετικόν· διότι αἱ τιμαὶ

$$\omega=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots$$

δουσι $$\psi=\theta,\quad \theta+\alpha,\quad \theta+2\alpha,\ldots$$

λ' ἵνα καὶ ὁ χ ἀποβῇ θετικὸς διὰ τὰς τιμὰς $\omega=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$, ν νὰ εἶνε ὁ η θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τοῦ ἀφαιρουμένου ὅρου $\beta.\omega$· ὥστε ῦ η ὄντος θετικοῦ) πρέπει νὰ εἶνε $\eta>\beta\omega$, ἤτοι

$$\frac{\eta}{\beta}>\omega.$$

Ὅθεν ὁ ω δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2,.. μέχρι τοῦ μεγίστου ικοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\eta}{\beta}$ περιεχομένου, καὶ ἂν ὁ μέτος οὗτος ἀκέραιος παρασταθῇ διὰ τοῦ μ, αἱ τιμαί, ἃς δύναται νὰ λάβῃ ω, εἶνε 0, 1, 2, 3, 4,.. μ· καὶ ἑπομένως τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ ραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως εἶνε τότε $\mu+1$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\alpha\eta+\beta\theta=\gamma$ (διότι $\chi=\eta$, $\psi=\theta$ εἶνε λύσις τῆς ἐξισώσς $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$), ἕπεται, ἂν διαιρέσωμεν πάντας τοὺς ὅρους διὰ αβ,

$$\frac{\eta}{\beta}+\frac{\theta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha\beta} \qquad (1)$$

Εστω μ ὁ μέγιστος θετικὸς ἀκέραιος ὁ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{η}{β}$ περιεχόμενος, τότε θὰ εἶνε $\frac{η}{β}=μ+φ$ (τοῦ φ ὄντος μικροτέρου τῆς μονάδος 1), καὶ ἡ ἰσότης (ι) γίνεται

$$μ+φ+\frac{θ}{α}=\frac{γ}{αβ}.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{γ}{αβ}$ θὰ περιέχῃ μέγιστον ἀκέραιον, ἢ τὸν μ, ἢ τὸν $μ+1$ (τὸν μ, ἂν τὸ ἄθροισμα $φ+\frac{θ}{α}$ εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, τὸν δὲ $μ+1$, ἂν μεγαλήτερον)· μεγαλήτερον ὅμως ἀκέραιον δὲν δύναται νὰ περιέχῃ· διότι οἱ δύο ἀριθμοὶ φ καὶ $\frac{θ}{α}$ εἶναι ἀμφότεροι μικρότεροι τῆς μονάδος (διότι $θ<α$) καὶ δὲν δύνανται ν' ἀποτελέσωσι τὸν 2.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι *τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $αχ+βψ=γ$, ὅπου α καὶ β εἶνε ἀμφότεροι θετικοί, ἐκφράζεται ἢ ὑπὸ τοῦ μεγίστου θετικοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{γ}{αβ}$ περιεχομένου* (ἂν περιέχηται ὁ $μ+1$) *ἢ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ηὐξημένου κατὰ μονάδα* (ἂν περιέχηται ὁ μ).

Ἔστωσαν νῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β ἑτεροειδεῖς, ἤτοι ὁ α θετικὸς καὶ ὁ β ἀρνητικός· ἐὰν καὶ πάλιν λάβωμεν τὴν αὐτὴν λύσιν $χ=η$, $ψ=θ$, ἔχομεν τοὺς αὐτοὺς τύπους τῆς γενικῆς λυσεως

$$χ=η-βω$$
$$ψ=θ+αω.$$

Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ ω καθιστῶσι καὶ πάλιν τὸν ψ ἀρνητικὸν (διότι δίδουσι $ψ=θ-α$, $θ-2α$, $θ-3α,\ldots$), αἱ δὲ θετικαὶ (καὶ ἡ 0) καθιστῶσιν αὐτὸν θετικὸν (διότι δίδουσι $ψ=θ$, $θ+α$, $θ+2α,\ldots$).

Ὡς πρὸς τὸν χ παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν μὲν εἶνε ὁ η θετικός, αἱ τιμαὶ $ω=0,1,2,\ldots$ δίδουσι θετικὰς τιμὰς τοῦ χ, $χ=η$, $η-β$, $η-2β,\ldots$ (διότι ὁ β εἶνε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀρνητικός· ἄρα ὁ $-β$ θετικός). ἂν δὲ ὁ η εἶνε ἀρνητικός, αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ ω αἱ ὑπερβαίνουσαι τὸ κλάσμα $\frac{η}{β}$ καθιστῶσι τὸν χ θετικόν.

Διότι ἡ τιμὴ τοῦ χ δυναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$χ=β\left(\frac{η}{β}-ω\right)$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ παράγων β εἶνε ἀρνητικός, διὰ νὰ εἶνε θετικὸν τὸ γινόμε-

νον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε καὶ ἄλλος παράγων ἀρνητικός· ἤτοι νὰ εἶνε $\omega > \frac{\eta}{\beta}$.

ὥστε, ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἡ ἐξίσωσις ἐπιδέχεται πλῆθος ἄπειρον θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων.

Προβλήματα.

1) *Εὑρεῖν κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ 3 καὶ ὁ παρονομαστὴς κατὰ 4, νὰ γίνηται τὸ κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{2}{3}$.*

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παρασταθῇ ὁ παρονομαστὴς καὶ διὰ τοῦ ψ ὁ ἀριθμητής, θὰ εἶνε

$$\frac{\psi+3}{\chi+4} = \frac{2}{3}.$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $3\psi - 2\chi = -1$, ἥτις ἐπιδέχεται τὰς ἀκεραίας λύσεις

$$\chi = 2 + 3\omega,$$
$$\psi = 1 + 2\omega.$$

Εἶνε δὲ πᾶσαι αὗται θετικαί, ἐὰν ω εἶνε ἢ 0 ἢ θετικόν, ὥστε ὑπάρχουσιν ἄπειρα τοιαῦτα κλάσματα καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1+2\omega}{2+3\omega}, \qquad \text{ἔνθα } \omega = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

ΣΗΜ. Τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\psi+3}{\chi+4} = \frac{2}{3}$$

εὑρίσκομεν ἁπλούστατα, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, ὅτι, ὅταν δύο κλάσματα εἶνε ἴσα καὶ τὸ ἕτερον αὐτῶν εἶνε ἀνάγωγον $\left(\text{ὡς τὸ } \frac{2}{3}\right)$, οἱ ὅροι τοῦ ἄλλου εἶνε γινόμενα τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμόν· ἵνα ἀληθεύσῃ λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις, ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\psi + 3 = 2\varphi$$

καὶ

$$\chi + 4 = 3\varphi.$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ λύσις $\chi = 3\varphi - 4$ καὶ $\psi = 2\varphi - 3$, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα, ἂν τεθῇ $\varphi = \omega + 2$ (διότι ὁ φ εἶνε οἱοσδήποτε ἀκέραιος, ὡς καὶ ὁ ω). Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν καὶ γενικῶς τὰς λύσεις πάσης ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$\frac{\psi-\theta}{\chi-\eta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

αἵτινες εἶνε $\chi=\eta+\beta\omega$
$\psi=\theta+\alpha\omega$.

2) *Ἔμπορος ἠγόρασεν ἵππους καὶ βόας ἀντὶ 1770 ταλλήρων· ἐπλήρωσε δὲ δι' ἕκαστον μὲν ἵππον 31 τάλληρα, δι' ἕκαστον δὲ βοῦν 21. Πόσους ἵππους καὶ πόσους βόας ἠγόρασεν;*

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἵππων καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν βοῶν, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$31\chi+21\psi=1770,$$

ἧς τινος αἱ ἀκέραιαι λύσεις περιέχονται πᾶσαι εἰς τοὺς τύπους

$$\chi=9+21\omega, \qquad \psi=71-31\omega.$$

Ἐκ δὲ τούτων θετικαὶ εἶνε μόνον αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega=0$, $\omega=1$, $\omega=2$ ἀντιστοιχοῦσαι· ἤτοι

$$\begin{matrix}\chi=9\\ \psi=71\end{matrix} \;\text{ἢ}\; \begin{matrix}\chi=30\\ \psi=40\end{matrix} \;\text{ἢ}\; \begin{matrix}\chi=51\\ \psi=9.\end{matrix}$$

3) *Πρόκειται νὰ πληρωθῶσι 43 δραχμαὶ διὰ διδράχμων καὶ πενταδράχμων· πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους πρέπει νὰ δοθῶσι;*

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν διδράχμων καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν πενταδράχμων, θὰ εἶνε

$$2\chi+5\psi=43.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης περιέχονται εἰς τοὺς τύπους

$$\chi=19-5\omega$$
$$\psi=1+2\omega.$$

Ἐκ τούτων εἶνε θετικαὶ αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega=0$, 1, 2, 3 ἀντιστοιχοῦσαι· ὥστε εἶνε

$$\text{ἢ}\; \begin{matrix}\chi=19\\ \psi=1\end{matrix} \;\text{ἢ}\; \begin{matrix}\chi=14\\ \psi=3\end{matrix} \;\text{ἢ}\; \begin{matrix}\chi=9\\ \psi=5\end{matrix} \;\text{ἢ}\; \begin{matrix}\chi=4\\ \psi=7.\end{matrix}$$

4) *Βοσκός τις θέλει μὲ 40 λίρας νὰ ἀγοράσῃ 40 ζῷα τριῶν εἰδῶν· ἀρνία, πρόβατα, καὶ κριούς· πωλεῖται δὲ ἕκαστον ἀρνίον ἡμίσειαν λίραν, ἕκαστον πρόβατον δύο καὶ ἕκαστος κριὸς τέσσαρας λίρας. Πόσα θὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;*

Ἔστωσαν χ οἱ κριοί, ψ τὰ πρόβατα καὶ φ τὰ ἀρνία· τότε εἶνε

$$\chi+\psi+\varphi=40$$

καὶ $$4\chi+2\psi+\frac{\varphi}{2}=40,$$

ἐξ ὧν ἀπαλείφοντες τὸν φ εὑρίσκομεν $7\chi+3\psi=40.$

Ἐπιδέχεται δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη τὰς ἀκεραίας λύσεις

$$\chi=1+3\omega$$
$$\psi=11-7\omega,$$

ἐξ ὧν θετικαὶ εἶνε αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega=0$, $\omega=1$ ἀντιστοιχοῦσαι· ἤτοι

ἢ $\chi=1$, $\psi=11$ καὶ ἐπομένως $\varphi=28$

ἢ $\chi=4$, $\psi=4$ » $\varphi=32$.

5) *Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων αὐτοῦ προσλαβὸν καὶ τὸν 8 νὰ γίνηται ἴσον πρὸς τὸ πέμπτον τῆς διαφορᾶς τοῦ 66 καὶ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὰς δεκάδας καὶ διὰ τοῦ ψ τὰς μονάδας, θὰ εἶνε

$$2\chi+8=\frac{66-\psi}{5}$$

ἢ $10\chi+40=66-\psi$, ὅθεν $10\chi+\psi=26$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε οἱ ἄγνωστοι χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε

$\chi=0$ $\psi=26$

$\chi=1$ $\psi=16$

$\chi=2$ $\psi=6$.

Ἐκ δὲ τούτων ἡ τελευταία μόνη πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς πάντας· ὥστε ἡ μόνη λύσις εἶνε ὁ ἀριθμὸς 26.

6) *Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ 25πλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων προσλαβὸν καὶ τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων καὶ τὸν 156 νὰ γίνηται ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ 1560, ἀφοῦ ἐλαττωθῇ οὗτος κατὰ τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων καὶ κατὰ τὰς μονάδας.*

Ἔστωσαν χ αἱ ἑκατοντάδες, ψ αἱ δεκάδες καὶ ω αἱ μονάδες τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶνε

$$25\chi+2\psi+156=\frac{1560-2\psi-\omega}{4}$$

ἢ $$100\chi+8\psi+624=1560-2\psi-\omega,$$

ὅθεν $$100\chi+10\psi+\omega=936$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε οἱ ἄγνωστοι χ, ψ, ω, πάντες ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Γράφοντες τὴν ἐξίσωσιν ὡς ἕπεται

$$100(\chi-9)+10(\psi-3)+(\omega-6)=0,$$

βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι ἡ μόνη λύσις ἡ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος πληροῦσα εἶνε $\chi=9$, $\psi=3$, $\omega=6$· ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 936.

7) *Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ εἰκοσαπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων προσλαβόντα καὶ τὴν μονάδα 1 νὰ ἰσῶνται πρὸς τὸ πέμπτον τοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$20\chi+\psi+1=\frac{100\chi+10\psi+\omega}{5}$$

διότι ὁ ἀριθμὸς ἔχει μονάδας τὸ ὅλον $100\chi+10\psi+\omega$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται

$$\omega+5\psi=5$$

αἱ δὲ λύσεις αὐτῆς, αἱ εἰς τὸ πρόβλημα ἁρμόζουσαι, εἶνε

$$\omega=0,\quad \psi=1$$
$$\omega=5,\quad \psi=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χ δὲν ὡρίσθη, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἑπομένων

110	210	310	410	510	610	710	810	910
105	205	305	405	505	605	705	805	905

διότι πάντες οὗτοι πληροῦσι τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

8) *Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον, ὅστις ἀντιστρεφόμενος γίνεται ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ ἑαυτοῦ.*

Ἐὰν χ εἶνε αἱ δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ψ αἱ μονάδες αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ μονάδας τὸ ὅλον $10\chi+\psi$, ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ μονάδας τὸ ὅλον $10\psi+\chi$· ὥστε θὰ εἶνε

$$10\psi+\chi=\frac{4}{7}(10\chi+\psi).$$

Ὅθεν προκύπτει $\qquad 66\psi=33\chi$

ἢ $\qquad 2\psi=\chi$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε οἱ ἄγνωστοι χ, ψ, ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξισώσεως καὶ εἶνε

$$\psi=1 \quad \text{καὶ} \quad \chi=2$$
$$\psi=2 \qquad\qquad \chi=4$$
$$\psi=3 \qquad\qquad \chi=6$$
$$\psi=4 \qquad\qquad \chi=8$$

ὥστε οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 21, 42, 63, 84

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

1) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 3, δι' 7 ὑπόλοιπον 2 καὶ διὰ 11 ὑπόλοιπον 1. ('Απ. $\chi=23+385.\omega$).

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ 150 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν νὰ εἶνε διαιρετὸν δι' 7, τὸ δὲ διὰ 23. ('Απ. 35 καὶ 115).

3) Εἰς ἑορτὴν ἐδαπάνησαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες δραχμὰς 200· εἶνε δὲ γνωστόν, ὅτι ἑκάστη γυνὴ ἐδαπάνησε δραχμὰς 9, ἕκαστος δὲ ἀνὴρ 11. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

('Απ. $\alpha=1$ καὶ $\gamma=21$, ἢ $\alpha=10$ καὶ $\gamma=10$).

4) Εἰς ἑορτὴν ἐδαπάνησαν 30 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία 30 τάλληρα· καὶ τῶν μὲν ἀνδρῶν ἐδαπάνησεν ἕκαστος 3 τάλληρα, τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστη $2\frac{1}{2}$, τῶν δὲ παιδίων $\frac{1}{2}$. Ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία; ('Απ. 6, 0, 24, ἢ 2, 5, 23).

5) Πρόκειται ἐξ 100 νομισμάτων πενταδράχμων, διδράχμων καὶ ἀργυρῶν κερμάτων τῶν 20 λεπτῶν νὰ σχηματισθῇ τὸ ποσὸν 100 δραχμῶν· πόσα πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

6) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ 7 νὰ δίδῃ πηλίκον ὅσον καὶ ὑπόλοιπον. ('Απ. 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48).

7) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις εἴτε διὰ 7 εἴτε διὰ 11 διαιρεθῇ νὰ δίδῃ πηλίκα ἴσα μὲ τὰ ὑπόλοιπα. ('Απ. 0, 24, 48).

8) Ἄνθρωπός τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῶσιν αἱ καμηλοί του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ αὐτῶν, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{9}$. Ὁ ἀριθμὸς τῶν καμήλων δὲν διῃρεῖτο διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 9· ὥστε ἡ διανομὴ ἦτο ἀδύνατος· ἀλλ' ὁ καδῆς, ἵνα κατορθωθῇ ἡ διανομή, ἐδώρησεν εἰς τὰ ὀρφανὰ ἀριθμόν τινα καμήλων καὶ τότε ὄχι μόνον ἔγινεν ἡ διανομὴ συμφώνως πρὸς τὴν διαθήκην, ἀλλ' ἔμειναν καὶ ὡς περίσσευμα αἱ κάμηλοι τοῦ καδῆ, ἃς οὗτος ἔλαβε πάλιν ὀπίσω. Ζητεῖται πόσαι ἦσαν αἱ κάμηλοι καὶ πόσας ἐδώρησεν ὁ καδῆς;

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς χ σημαίνῃ τὰς καμήλους τῶν ὀρφανῶν καὶ ὁ ψ τὰς τοῦ καδῆ, εὑρίσκομεν $\chi=17\psi$· ὥστε τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος.

9) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον, ὅστις ἀντιστρεφόμενος γίνεται ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ ἑαυτοῦ. ('Απ. 231, 462, 693).

10) Εὑρεῖν ἀκέραιον ἀριθμὸν διψήφιον, ὅστις ἀντιστρεφόμενος ἐλαττοῦται κατὰ 81.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

174. Τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν) εἶνε μὲν τέλειον κατὰ τὰς τέσσαρας στοιχειώδεις πράξεις, ὥστε λύονται ἐν αὐτῷ πάντα τὰ εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ἄγοντα ζητήματα· φαίνεται ὅμως ἐλλιπὲς καὶ τοῦτο, ὅταν, μένοντες ἐν αὐτῷ, ἐπιχειρήσωμεν τὴν λύσιν ἀνωτέρων ζητημάτων, οἷα εἶνε τὰ ἑπόμενα.

Εὑρεῖν ἀριθμὸν, οὗ τὸ τετράγωνον νὰ εἶνε ἴσον τῷ 2.
ἢ εὑρεῖν ἀριθμὸν, οὗ ὁ κύβος νὰ εἶνε ἴσος τῷ 4, καὶ τὰ λοιπά,
ἅτινα ὑπὸ οὐδενὸς τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν λύονται.

Ὅτι π. χ. οὐδεὶς ἀκέραιος ἔχει τετράγωνον τὸν 2, εἶνε προφανές· ἀλλ' οὐδὲ κλασματικός· διότι ἂς ὑποτεθῇ τοιοῦτος ὁ $\frac{\mu}{\nu}$, ἔστω δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ ἀνάγωγον· τότε θὰ εἶνε

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=2, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu^2}{\nu^2}=2.$$

Ὅθεν ἕπεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μ καὶ ν ἡ ἰσότης

$$\mu^2=2.\nu^2$$

Ἀλλ' ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἐπαληθεύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δὲν ὑπάρχουσι· καὶ ὄντως, ὁ ἀριθμὸς μ πρέπει νὰ εἶνε ἄρτιος (διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀρτίων εἶνε ἄρτια καὶ τῶν περιττῶν περιττά)· δύναται λοιπὸν νὰ τεθῇ $\mu=2\mu'$, τοῦ μ' ὄντος ἄλλου ἀκεραίου· τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται $4\mu'^2=2\nu^2$, ἤτοι

$$\nu^2=2\mu'^2\cdot$$

ὥστε καὶ ὁ ν εἶνε ἄρτιος· τοῦτο ὅμως εἶνε ἀδύνατον· διότι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι *οὐδεὶς ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οὓς ἔχομεν, ἔχει τετράγωνον τὸν 2.*

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ 10 οὐδενὸς ἀριθμοῦ (ἐξ ὅσων ἔχομεν) νε τετράγωνον, οὐδὲ κύβος, οὐδὲ δύναμις οἱασδήποτε τάξεως.

Ἀλλὰ καὶ ἡ μέτρησις τῶν γραμμῶν καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀριθμητικῆς ις τὴν γεωμετρίαν καὶ ἐν γένει ἡ καταμέτρησις τῶν συνεχῶν λεγομένων σῶν εἶνε ἀδύνατος (ὡς ἐν τῇ γεωμετρίᾳ ἀποδεικνύεται), ἐὰν μένωμεν ριωρισμένοι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

175. Τὰ ζητήματα ταῦτα καὶ τὰ τούτοις ὅμοια ἢ πρέπει νὰ θεωήσωμεν ἄλυτα καὶ νὰ περιορίσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν εἰς τὰ ἁπλούστερα ητήματα, τὰ διὰ τῶν τεσσάρων πράξεων λυόμενα, ἤ, ἵνα ἄρωμεν καὶ ὸ ἐμπόδιον τοῦτο τῆς προόδου τῆς ἀριθμητικῆς, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν ὸ ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων ἀριθμῶν αἰ τοιούτων, ὥστε νὰ λύωνται καὶ τὰ ῥηθέντα ζητήματα, νὰ διατηῶνται δέ, ὡς πάντοτε, οἱ νόμοι τῶν πράξεων ἀβλαβεῖς.

176. Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν νέων τούτων ἀριθμῶν ὁδηγεῖ ἡμᾶς ἡ παρατήρησις, ὅτι, ἐὰν ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν δεκαδικῶν μονάδων $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\ldots$ θέλωμεν ν' ἀποτελέσωμεν πάντας τοὺς ἀριμούς, τὰ πλεῖστα τῶν κλασμάτων, ἀπαιτοῦσιν, ἵνα ἀποτελεσθῶσιν, ἄπειον πλῆθος τοιούτων μονάδων· οὕτω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ γίνεται 0,4 αὶ τὸ $\frac{8}{25}$ γίνεται 0,32· ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{3}$ δὲν δύναται ἄλλως νὰ ἀποτεσθῇ ὑπὸ δεκαδικῶν μονάδων ἢ ὑπὸ τῶν ἑπομένων ἀπείρων τὸ πλῆθος ,33333.... ὡσαύτως τὸ $\frac{5}{33}$ ἀποτελεῖται μόνον ὑπὸ τῶν ἑπομένων ,151515151515.. ἐὰν αἱ ἄπειροι αὗται μονάδες νοηθῶσιν ὡς ἓν ὅλον οτελοῦσαι.

Τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία τὰ οὕτω προκύπτοντα ἐπαναλαμβάνονται πό τινος καὶ ἐφεξῆς) ἀπαύστως τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. λλ' ἂν ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες θεωρηθῶσιν, ὅτι συναποτεῶσιν ἀριθμόν, ὅταν τὰ ψηφία, δι' ὧν γράφονται, ἔχωσι τὴν εἰρημένην ξιν, διατὶ νὰ μὴ συμβαίνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν τὰ ψηφία, δι' ὧν γράνται αἱ μονάδες, εἶνε οἱαδήποτε;

Εὐνόητον ἀποβαίνει ἐκ τούτων, ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀριὸν τὸ πλῆθος οἱωνδήποτε δεκαδικῶν μονάδων, δι' οἱωνδήποτε ψηφίων ἂν γράφωνται αὗται.

Οἷον τὰ ἑξῆς πλήθη τῶν δεκαδικῶν μονάδων

0, 10 100 1000 10000.....
0, 2 4 8 16 32 64 128....
0, 51 511 5111 51111....
8, 52 502 5002 50002....
12, 389 3890 38900 389000....
4, 25 50 75 100 125 150....
0, 12 13 14 15 16 17 18 19 20....

δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀριθμοὶ ὡρισμένοι, διότι τὰ ψηφία αὐτῶν εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένα (ὁ νόμος, καθ' ὃν προχωροῦσι τὰ ψηφία ἑκάστου, εἶνε προφανής).

Ἀλλ' ἂν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων δεχώμεθα ὡς ἀριθμόν, οὐδὲν κωλύει νὰ δεχθῶμεν ὡς ἀριθμὸν καὶ πλῆθος ἄπειρον οἱωνδήποτε μονάδων ὁμοειδῶν· (θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν)· τοιουτοτρόπως φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁρισμός.

177. *Ἀριθμὸς* λέγεται τὸ σύνολον ὁμοειδῶν μονάδων, εἴτε πεπερασμένον εἶνε τὸ πλῆθος αὐτῶν εἴτε καὶ ἄπειρον, ἐὰν ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἂν προστεθῶσι, πάντοτε δίδωσιν ἄθροισμα μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς.

Ὁ περιορισμὸς οὗτος εἶνε ἀναγκαῖος διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων εἶνε ἄπειρον, διότι παντὸς ἀριθμοῦ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἄλλος μεγαλήτερος.

Ὁ ἀριθμὸς εἶνε ὡρισμένος, ὅταν εἶνε ὡρισμέναι αἱ συναποτελοῦσαι αὐτὸν μονάδες, π.χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

$$1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^{10}}+\frac{1}{10^{100}}+\frac{1}{10^{1000}}+\frac{1}{10^{10000}}+\ldots\ldots$$

εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα.

ΣΗΜ. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς συγκείμενος ἐκ δεκαδικῶν μονάδων· διότι ἑκάστη τῶν ἄλλων ἀποτελεῖται ὑπὸ πλήθους τινὸς δεκαδικῶν μονάδων.

Ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

178. *Μεγαλήτερος* λέγεται ἀριθμὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν ἔχῃ πάσας τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἄλλας προσέτι.

179. *Ἴσοι* λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν πᾶς ἀριθμός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,99999.... πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ πρώτου εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ δευτέρου· διότι ἔστω ὁ μικρότερος τῆς μονάδος ἀριθμὸς $\frac{538}{539}$· οὗτος εἶνε μικρότερος τοῦ $\frac{999}{1000}$· (διότι ὁ $\frac{999}{1000}$ διαφέρει τῆς μονάδος κατὰ ἓν χιλιοστὸν $\left(\frac{1}{1000}\right)$, ἐνῷ ὁ $\frac{538}{539}$ διαφέρει αὐτῆς κατὰ $\frac{1}{539}$ ἤτοι περισσότερον), ἄρα ὁ $\frac{538}{539}$ ὡς μικρότερος τοῦ 0,999 εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ 0,999999...

Ἀλλὰ καὶ πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 0,99999.... εἶνε καὶ τῆς μονάδος μικρότερος· διότι ὁσαδήποτε ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 0,99999.... καὶ ἂν λάβωμεν, πάντοτε εὑρίσκομεν ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος· ὥστε εἶνε 1=0,99999....

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶνε 0,1=0,09999....

0,01=0,009999.... κλπ.

. . . .

Ὅτι δὲ ὁ νέος οὗτος ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, εἶνε φανερόν.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

180. Διὰ νὰ εἶνε ἴσοι δύο ἀριθμοὶ ἐξ ἀκεραίων καὶ ἐκ δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενοι, πρέπει ἢ α') νὰ συμφωνῶσι κατὰ πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν, ἢ β') τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ' ἃ διαφέρουσι, νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1 καὶ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον πάντα τἀκόλουθα ψηφία νὰ εἶνε 9, τοῦ δὲ ἔχοντος τὸ μεγαλήτερον πάντα τἆλλα νὰ εἶνε 0· ἄλλως οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι

Διότι, ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο ἴσοι ἀριθμοὶ παρίστανται ὡς δεκαδικοὶ καὶ εἶνε οἱ ἑξῆς 2, 125.... καὶ 2, 124....

Ἐπειδὴ τὸ περισσεῦον ἓν χιλιοστὸν τοῦ πρώτου ἰσοῦται τῷ 0,000999.., ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἰσοῦται τῷ 2,124999... ηὐξημένῳ κατὰ τὰς μονάδας τῶν ἀνωτέρων τάξεων, ἐὰν ὑπάρχωσιν· ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ὑποτίθενται ἴσοι, βλέπομεν, ὅτι πάντα τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ δευτέρου ἀνάγκη νὰ εἶνε 9 καὶ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ ψηφία μηδεμιᾶς τῶν ἀνωτέρων τάξεων.

181. Ἐὰν τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ' ἃ διαφέρουσιν οἱ ἀριθμοί, ἔχωσι διαφορὰν μεγαλητέραν τοῦ 1, οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἀριθμοί· 2,126... καὶ 2,124...

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὰ ἑπόμενα ψηφία τοῦ δευτέρου, δὲν δύναται οὗτος νὰ εἶνε μεγαλήτερος τοῦ 2,1249999.... ἤτοι τοῦ 2,125· εἶνε ἄρα μικρότερος τοῦ πρώτου.

Διάκρισις τῶν ἀριθμῶν εἰς συμμέτρους καὶ εἰς ἀσυμμέτρους.

182. Ὁ νέος ὁρισμὸς τῶν ἀριθμῶν περιλαμβάνει μὲν πάντας τοὺς ἀκεραίους καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, εἰσάγει δὲ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς διαφόρους τούτων· τῷ ὄντι οἱ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ ἔχοντες ἀριθμοί, οἱ διὰ τοῦ νέου ὁρισμοῦ προσαρτηθέντες, δὲν δύνανται πρὸς οὐδένα τῶν ἀκεραίων οὐδὲ τῶν κλασματικῶν νὰ εἶνε ἴσοι· διότι οὗτοι τρεπόμενοι εἰς δεκαδικούς, ἢ ἔχουσιν ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἔχουσιν ἄπειρα, ἀλλὰ περιοδικά.

Πρὸς διάκρισιν καλοῦνται οἱ μὲν ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου συστήματος οἱ ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων συγκείμενοι, *σύμμετροι*, οἱ δὲ εἰσαχθέντες διάφοροι τούτων, οἱ μὴ δυνάμενοι ἄλλως νὰ ἀποτελεσθῶσιν ἢ ὑπὸ ἀπείρου πλήθους μονάδων, λέγονται *ἀσύμμετροι*· οὗτοι τρεπόμενοι εἰς δεκαδικοὺς ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Παρατήρησις.

Καὶ μετὰ τὴν προσάρτησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν οἱ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων πράξεων μένουσιν οἱ αὐτοί. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἄθροισμα καὶ διαφορὰ καὶ γινόμενον καὶ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν· καὶ ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων διατηροῦνται. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶνε καὶ τετράγωνον ἄλλου τινὸς καὶ κύβος ἄλλου· καὶ γενικῶς μυοστὴ δύναμις ἄλλου τινὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ· (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου)· ἤτοι ὑπάρχει πάντοτε θετικός τις ἀριθμὸς ἔχων μυοστὴν δύναμιν τὸν δοθέντα θετικὸν ἀριθμόν. Πρὸς τούτοις ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου)· ὥστε διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν λύονται πάντα τὰ ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ παρόντος κεφαλαίου μνημονευθέντα ἄλυτα ζητήματα. Ἀλλὰ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν παραλείπομεν ἐνταῦθα χάριν συντομίας (ἰδὲ Εἰσαγωγὴν ἀνωτέρας ἀλγέβρας).

ΣΗΜ. Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ συνδέονται συνήθως πρὸς τοὺς συμμέτρους διά τινων σχέσεων, ἐξ ὧν προκύπτουσιν, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἴδωμεν, ἰδιαίτεραι, συντομώτεραι μέθοδοι, καθ' ἃς ἐκτελοῦνται αἱ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων πράξεις. Δυνάμεθα ὅμως (ὅπερ καὶ γίνεται ἐν τῇ πράξει) νὰ παραλείψωμεν τὰ ἄπειρα ψηφία τῶν ἀσυμμέτρων ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς (π.χ. ἀπὸ τῶν ἑκατομμυριοστῶν καὶ ἐφεξῆς), ὅτε εὑρίσκομεν ἀριθμοὺς συμμέτρους· τὰ ἐξαγόμενα δέ, ἅτινα τότε λαμβάνομεν, προσεγγίζουσι πρὸς τἀληθῆ τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ περισσότερα ψηφία διατηροῦμεν.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

Ὁρισμοί.

183. Ἐάν τις ἀριθμὸς εἶνε μυοστὴ δύναμις ἄλλου, οὗτος λέγεται μυοστὴ *ῥίζα* τοῦ πρώτου. Ἐὰν δηλ. εἶνε $\alpha=\beta^{\mu}$, ὁ β λέγεται μυοστὴ ῥίζα τοῦ α.

Ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt[\mu]{\alpha}$ · ὥστε, ἐὰν εἶνε $\alpha=\beta^{\mu}$, θὰ εἶνε καὶ $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$, τουτέστιν ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες αὗται μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐκφράζουσι σχέσιν τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

184. Ἀξιοπαρατήρητοι εἶνε αἱ ταὐτότητες

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}=\alpha, \qquad \text{καὶ} \quad \sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}}=\alpha\cdot$$

αἵτινες ἕπονται ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μυοστῆς ῥίζης.

185. Ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας τάξεως λέγεται καὶ *τετραγωνικὴ* ῥίζα· ἡ δὲ ῥίζα τῆς τρίτης τάξεως λέγεται καὶ *κυβικὴ* ῥίζα. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παρίσταται συνήθως ἄνευ τοῦ δείκτου 2 ὡς ἑξῆς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha+\beta}$, κτλ.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ καλεῖται *ῥιζικόν* · ἡ δὲ ὑπ' αὐτὸ ὑπάρχουσα παράστασις λέγεται *ὑπόρριζον*.

186. Παράστασις ἔχουσα ῥιζικὸν λέγεται *ἄλογος*.

$$\text{ὡς} \quad \frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{\gamma} \qquad \text{ἢ} \quad \alpha\sqrt{\beta}$$

Αἱ δὲ μὴ περιέχουσαι ῥιζικὸν λέγονται *ῥηταί*.

Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως καὶ μίαν ἑκάστης περιττῆς.

Παραδείγματος χάριν ὁ 16 ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας, τὸν 4 καὶ τὸν —4· διότι εἶνε 4.4=16, ἀλλὰ καὶ (—4) (—4)=16.

Ὁμοίως ἔχει δύο τετάρτας ῥίζας, τὸν 2 καὶ τὸν—2· διότι εἶνε 2 2.2.2=16, ἀλλὰ καὶ (—2) (—2) (—2) (—2)=16.

Αἰτία τούτου εἶνε, ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἰς ἀρτίας δυνάμεις ὑψούμενοι δίδουσι θετικοὺς ἀριθμούς.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 ἔχει μίαν μόνην κυβικὴν ῥίζαν, τὸν 2· διότι εἶνε 2.2.2=8 ἀλλὰ (—2) (—2) (—2)=—8

ὥστε τὸ—2 δὲν εἶνε κυβικὴ ῥίζα τοῦ 8 ἀλλὰ τοῦ—8.

Αἰτία τούτου εἶνε, ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἰς περιττὰς δυνάμεις ὑψούμενοι δίδουσιν ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν ἑκάστης περιττῆς τάξεως ἀλλ' οὐδεμίαν ἀρτίας τάξεως.

Παραδείγματος χάριν ὁ -8 ἔχει μίαν κυβικὴν ῥίζαν, τὸν -2· διότι εἶνε

$$(-2)(-2)(-2)=-8, \qquad \text{ἀλλὰ} \quad 2.2.2=8.$$

Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ -16 δὲν ὑπάρχει· δηλαδὴ ὁ -16 δὲν εἶνε τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ, διότι πᾶν τετράγωνον εἶνε θετικόν· ὁμοίως καὶ πᾶσα δύναμις ἀρτίας τάξεως εἶνε θετική.

Ὅταν ἀριθμὸς ἔχῃ δύο ῥίζας μιᾶς τάξεως, αἱ ῥίζαι αὗται εἶνε ἀντίθετοι ἀριθμοί, ὅταν δὲ ἔχῃ μίαν μόνην, ἡ ῥίζα αὕτη εἶνε ὁμοειδὴς τῷ ἀριθμῷ.

Ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

187. *Αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶνε ἢ ἀκέραιοι πάλιν ἀριθμοὶ ἢ ἀσύμμετροι, οὐδέποτε δὲ κλάσματα.*

Καὶ ὄντως, ἔστω τοῦ ἀκεραίου Α μυοστὴ ῥίζα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπερ ὑποτεθείσθω ἀνάγωγον· τότε εἶνε $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}=A$.

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶνε ἐξ ὑποθέσεως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^μ καὶ β^μ εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ὁ β^μ τὸν α^μ καὶ νὰ δίδῃ πηλίκον ἀκέραιον Α. ὥστε αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων οὐδέποτε εἶνε κλάσματα.

188. *Ἡ μυοστὴ ῥίζα ἀκεραίου εἶνε ἀκέραιος, ἂν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται, εἶνε πολλαπλάσια τοῦ μ, καὶ τότε μόνον.*

Διότι ἂν εἶνε $\beta^\mu=\alpha$, ἤτοι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶνε ἀκέραιοι, ἂς ἀναλυθῇ ὁ β εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ ἔστω

$$\beta=\theta^\varkappa.\ \theta'^{\varkappa'}\ .\ .\ .\ .$$

τότε θὰ εἶνε $\beta^\mu=(\theta^\varkappa.\theta'^{\varkappa'}..)^\mu=\theta^{\varkappa\mu}.\theta'^{\varkappa'\mu}..$ (κατὰ τὸ ἐδ. 71)· ἐπειδὴ δὲ εἶνε καὶ $\beta^\mu=\alpha$ ἕπεται $\alpha=\theta^{\varkappa\mu}.\theta'^{\varkappa'\mu}.\ .\ .\ .\ .$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων ἀριθμῶν θ, θ'. . . . ἐξ ὧν γίνεται ὁ α, διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ μ.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εἶνε $\alpha=\theta^{\varkappa\mu}.\theta'^{\varkappa'\mu}.\ .\ .\ .$

ἡ μ ῥίζα τοῦ α θὰ εἶνε ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $\theta^\varkappa.\theta'^{\varkappa'}$. . . . . διότι οὗτος ὑψούμενος εἰς τὴν μ δύναμιν παράγει τὸν α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

189. Ἐν τῇ διαπλάσει τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν ὁδηγὸν εἴχομεν τὴν ἀρχὴν ὅτι, *ὅταν πρόκειται νὰ καταστήσωμέν τι γενικώτερον, πρέπει νὰ διατηρῶμεν τὰς ἀρχικὰς αὐτοῦ ἰδιότητας*. Καὶ νῦν, θέλοντες νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων ἐπὶ οἱωνδήποτε ἐκθετῶν, θέτομεν ὡς ὅρον τὴν διατήρησιν τῶν ἀρχικῶν αὐτῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας ἀποκαλοῦμεν *νόμους τῶν δυνάμεων*.

Ἐὰν ἡ ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$ (1) ἐκφραζομένη ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν δυνάμεων θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶνε οἱοιδήποτε σύμμετροι ἀριθμοί, ἀνάγκη νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως τὴν σημασίαν τῶν δυνάμεων, αἵτινες ἔχουσιν ἐκθέτην κλασματικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Δυνάμεις κλασματικὸν ἔχουσαι ἐκθέτην.

190. Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα (1), τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διατηρήσωμεν ἀληθῆ ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων, ὑποτεθῇ $\mu=\nu=\frac{1}{2}$, προκύπτει

$$\alpha^{\frac{1}{2}}.\ \alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ *δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α*, διότι ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν δίδει τὸν α.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν σημασίαν τοῦ $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ (τοῦ ρ ὄντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀκεραίου) σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ρ παραγόντων

$$\alpha^{\frac{1}{\rho}}\ \alpha^{\frac{1}{\rho}}\ \alpha^{\frac{1}{\rho}}\ \dots\ \alpha^{\frac{1}{\rho}}$$

ὅτε κατὰ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα, ἣν διατηροῦμεν, εὑρίσκομεν αὐτὸ ἴσον τῷ $\alpha^{\rho\frac{1}{\rho}}$, ἤτοι ἴσον τῷ α· ὥστε $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ *δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ρ ῥίζα τοῦ α*.

Κατὰ ταῦτα αἱ δύο παραστάσεις

$\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ καὶ $\sqrt[\rho]{\alpha}$ σημαίνουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα $\quad 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}, \qquad 8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2.$

Καὶ γενικῶς $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ (π καὶ ρ ὄντων οἱωνδήποτε θετικῶν ἀκεραίων) δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ρ ῥίζα τοῦ α^{π}· διότι πολλαπλασιαζόμενον ρ φορὰς ἐφ' ἑαυτὸ δίδει α^{π}, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\cdot\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\cdot\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\ldots\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\rho\cdot\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\pi}.$$

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ σημαίνει καὶ τὴν π δύναμιν τῆς ρ ῥίζης τοῦ α· διότι προκύπτει, ἂν ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ πολλαπλασιασθῇ π φορὰς ἐφ' ἑαυτήν, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\alpha^{\frac{1}{\rho}}\cdot\alpha^{\frac{1}{\rho}}\ldots\alpha^{\frac{1}{\rho}}=\alpha^{\frac{1}{\rho}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ π δύναμις τῆς ρ ῥίζης τοῦ α ἰσοῦται τῇ ρ ῥίζῃ τῆς π δυνάμεως τοῦ α· ἤτοι

$$\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}=\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\qquad(1)$$

$$\text{ἢ}\qquad\left(\alpha^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\pi}=\left(\alpha^{\pi}\right)^{\frac{1}{\rho}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.$$

ΣΗΜ. Ὅτι ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}$ ἰσοῦται τῇ ρ ῥίζῃ τοῦ α^{π}, ἤτοι τῇ $\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}$, δεικνύεται καὶ ἀμέσως ἐκ τούτου, ὅτι ἡ ρ δύναμις αὐτῆς εἶνε ἴση τῷ α^{π}.

Καὶ ὄντως ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}$ εἶνε γινόμενον π παραγόντων, ὧν ἕκαστος εἶνε ἴσος τῇ $\sqrt[\rho]{\alpha}$, ἑπομένως κατὰ τὴν τρίτην ἰδιότητα τῶν δυνάμεων (71) ἡ ρ δύναμις αὐτῆς εὑρίσκεται, ἂν ὑψωθῇ ἕκαστος παράγων αὐτῆς εἰς τὴν ρ δύναμιν· ὅτε γίνεται α· ὅθεν ἡ ρ δύναμις τοῦ γινομένου εἶνε ἐπίσης α^{π}·

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ὅταν ὁ ρ εἶνε ἄρτιος (ὅτε ἐξ ἀνάγκης θὰ εἶνε ὁ α θετικὸς ἀριθμός), τὸ μὲν δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) ἔχει πάντοτε δύο τιμὰς ἀντιθέτους, τὸ δὲ πρῶτον ἔχει ἀμφοτέρας μὲν τὰς τιμὰς ταύτας, ἂν ὁ π εἶνε περιττὸς $\left(\text{διότι τὸ γινόμενον } \left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}\right.$ εἶνε τότε ὁμοειδὲς τῇ $\left.\sqrt[\rho]{\alpha}\right)$, τὴν θετικὴν ὅμως μόνην, ἂν ὁ π εἶνε ἄρτιος

ὥστε κατὰ τοῦτο ἡ ἰσότης (1) δὲν εἶνε τελεία· π.χ. ἡ $\sqrt[4]{\alpha^2}$ ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἐν ᾧ ἡ $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ ἔχει μόνην τὴν θετικὴν ἐξ αὐτῶν.

191. Ὁ κλασματικὸς ἐκθέτης δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ ἀνάγωγος· καὶ ὄντως εἶνε ἡ δύναμις

$$\alpha^{\frac{\pi\nu}{\rho\nu}} \quad \text{ἴση τῇ} \quad \alpha^{\frac{\pi}{\rho}} \qquad (2)$$

διότι ἀμφότεραι ὑψούμεναι εἰς τὴν ρ.ν δύναμιν γίνονται ἴσαι τῷ $\alpha^{\pi.\nu}$· ὑψοῦται δὲ ἡ δευτέρα εἰς τὴν ρ.ν δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν ρ καὶ ἔπειτα ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ὑψωθῇ εἰς τὴν ν δύναμιν (71).

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ἐὰν ὁ κοινὸς παράγων εἶνε ἄρτιος καὶ ὁ ρ περιττός, ἡ μὲν πρώτη δύναμις ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἡ δὲ δευτέρα μίαν μόνον· ὥστε ἡ ἰσότης αὐτῶν δὲν εἶνε τελεία.

Διὰ νὰ εἶνε αἱ δύο ἰσότητες (1) καὶ (2) ἀληθεῖς ἄνευ ἐξαιρέσεως, θὰ ὑποθέτωμεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὸν ἀριθμὸν α πάντοτε θετικὸν καὶ ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτων τιμῶν πάσης ῥίζης ἀρτιοταγοῦς θὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν μόνον τὴν θετικήν, τότε αἱ παραστάσεις

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}, \quad \sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}, \quad \left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}$$

οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀκεραίων π καὶ ρ, παριστῶσιν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν πᾶσαι θετικὸν ἀριθμόν.

Τὰς δὲ ῥίζας τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὅταν *ὑπάρχωσιν*, ἀνάγομεν εἰς τὰς ὁμοταγεῖς ῥίζας τῶν θετικῶν· διότι π. χ. εἶνε

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2, \quad \sqrt[5]{-16} = -\sqrt[5]{16},$$

$$(-4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-4)^2} = 4^{\frac{2}{3}}$$

Ἐὰν τὴν ἰσότητα $\alpha^{\frac{\pi\nu}{\rho\nu}} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$

γράψωμεν διὰ τῶν ῥιζῶν, βλέπομεν, ὅτι εἶνε

$$\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}} = \sqrt[\rho\nu]{\alpha^{\pi\nu}}$$

τουτέστι *δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ρ τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην π τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*· τοῦτο δὲ οὐδόλως βλάπτει τὴν ῥίζαν.

Παραδείγματα $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$, $25^{\frac{2}{4}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} =$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$

Δυνάμεις άρνητικόν έχουσαι έκθέτην.

192. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ ὑποθέσωμεν $\nu = -\mu$, εὑρίσκομεν

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{-\mu} = \alpha^0 = 1.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ἂν ὁ α διαφέρῃ τοῦ 0,

$$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}},$$

ἀνάγκη ἄρα νὰ δοθῇ διὰ τὰς δυνάμεις ταύτας ὁ ἑπόμενος ὁρισμός.

Πᾶσα ἀρνητικὸν ἐκθέτην ἔχουσα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ (πλὴν 0) ἰσοῦται κλάσματι ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα 1, παρονομα δὲ τὴν ἀντίθετον ἐκθέτην ἔχουσαν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

$$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Γενικῶς εἶνε (π καὶ ρ ὄντων θετικῶν ἀκεραίων)

$$\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}} \left(\text{ἤτοι } \frac{1}{\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}} \right) = \sqrt[\rho]{\alpha^{-\pi}},$$

διότι ἀμφότερα ὑψούμενα εἰς τὴν ρ δύναμιν γίνονται $\alpha^{-\pi}$.

ΣΗΜ. Τῆς μονάδος 1 πᾶσα δύναμις εἶνε πάλιν 1.

Διότι π. χ. $1^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = \sqrt[3]{1} = 1.$

*Διατήρησις τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων.

193. Ὑπολείπεται ἔτι νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ εὑρεθέντες ὁρισμοὶ τῶν συμμέτρους ἐκθέτας ἐχουσῶν δυνάμεων εἶνε τοιοῦτοι, ὥστε διατηροῦνται καὶ ἐπ' αὐτῶν πᾶσαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων· τουτέστιν, ὅτι ληθεύουσιν αἱ τὰς ἰδιότητας ταύτας ἐκφράζουσαι ἰσότητες:

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu} \qquad (1)$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu} \qquad (2)$$

$$(\alpha.\beta)^{\mu}=\alpha^{\mu}.\beta^{\mu} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}, \qquad (4)$$

ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶνε κλασματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί), ἤτοι τῆς μορφῆς $\frac{\pi}{\rho}$ $(=\mu)$ καὶ $\frac{\varkappa}{\tau}$ $(=\nu)$.

1) Τὴν ἰσότητα τῶν δύο παραστάσεων

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\varkappa}{\tau}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^{\frac{\pi}{\rho}+\frac{\varkappa}{\tau}}$$

ἀποδεικνύομεν ὑψοῦντες ἑκατέραν εἰς τὴν δύναμιν ρ.τ.

Ἵνα τῷ ὄντι ὑψωθῇ ἡ πρώτη παράστασις εἰς τὴν δύναμιν ρ. τ, ἀρκεῖ (§ ...) νὰ ὑψωθῇ ἑκάτερος τῶν παραγόντων αὐτῆς εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ρ.τ.

Ἵνα δὲ ὑψωθῇ ὁ πρῶτος παράγων $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ εἰς τὴν δύναμιν ρτ, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν ρ (ὅτε γίνεται α^{π}) καὶ ἔπειτα εἰς τὴν τ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\pi\tau}$· ἵνα δὲ ὁ δεύτερος παράγων $\alpha^{\frac{\varkappa}{\tau}}$ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ρτ, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν τ (ὅτε γίνεται $\alpha^{\varkappa}$) καὶ ἔπειτα εἰς τὴν ρ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\varkappa\rho}$· ἑπομένως ἡ πρώτη παράστασις, ὑψωθεῖσα εἰς τὴν δύναμιν ρτ, γίνεται $\alpha^{\pi\tau}.\ \alpha^{\varkappa\rho}$ ἢ $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\rho}$.

Ἀλλὰ καὶ ἡ δευτέρα παράστασις $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}+\frac{\varkappa}{\tau}}$ ἢ $\alpha^{\frac{\pi\tau+\varkappa\rho}{\rho\tau}}$ ὑψωθεῖσα εἰς τὴν ρτ δύναμιν γίνεται $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\rho}$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἀμφότεραι αἱ συγκρινόμεναι παραστάσεις εἶνε ἴσαι μὲ τὴν ρ.τ. ῥίζαν τοῦ $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\rho}$· ἄρα εἶνε καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

2) Ἵνα δείξωμεν, ὅτι αἱ δύο παραστάσεις

$$\left(\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\right)^{\frac{\varkappa}{\tau}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^{\frac{\pi}{\rho}.\frac{\varkappa}{\tau}} \quad \text{εἶνε ἴσαι,}$$

ὑψοῦμεν πάλιν ἀμφοτέρας εἰς τὴν δύναμιν ρτ.

Καὶ ἡ μὲν δευτέρα ὑψουμένη ἀμέσως εἰς τὴν ρτ δύναμιν γίνεται α^{π}, δὲ πρώτη, ἵνα ὑψωθῇ εἰς τὴν ρτ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον ε τὴν δύναμιν τ, ὅτε γίνεται $\left(\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\right)^{\varkappa}$ ἢ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\ldots\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ ἤτοι $\alpha^{\frac{\pi\varkappa}{\rho}}$, ἔπειτα εἰς τὴν δύναμιν ρ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\pi\varkappa}$·
ὥστε ἀμφότεραι αἱ παραβαλλόμεναι παραστάσεις εἶνε ἴσαι μὲ τὴν ρτ ῥίζαν τοῦ $\alpha^{\pi\varkappa}$· ἄρα εἶνε καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ταύτῃ ὑπετέθη ὁ κ θετικὸς ἀριθμός· ἂν εἶνε ἀρνητικός, ἡ ἰσότης τῶν δύο παραστάσεων ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τ ἀντιστρόφων αὐτῶν.

3) Ἵνα δείξωμεν, ὅτι αἱ δύο παραστάσεις $(\alpha\beta)^{\frac{\pi}{\rho}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\beta^{\frac{\pi}{\rho}}$ ἴσαι, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν δύναμιν ρ· καὶ ἡ μὲν πρώτη γίν $(\alpha\beta)^{\pi}$ ἡ δὲ δευτέρα, ἐπειδὴ εἶνε γινόμενον, γίνεται $\alpha^{\pi}.\beta^{\pi}$, ἤτοι $(\alpha\beta)^{\pi}$· ἀμφότεραι αἱ παραστάσεις αὗται εἶνε ἴσαι τῇ ρ ῥίζῃ τοῦ $(\alpha\beta)^{\pi}$.

4) Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος τῶν δύο παραστάσεων $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right.$ καὶ $\frac{\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}}{\beta^{\frac{\pi}{\rho}}}$ ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν ρ δύναμιν· τότε ἡ μὲν πρώτη νεται $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\pi}$ ἢ $\frac{\alpha^{\pi}}{\beta^{\pi}}$, ἡ δὲ δευτέρα (κατὰ τὸ ἐδ. 71) γίνεται $\frac{\alpha^{\pi}}{\beta^{\pi}}$ ἐ συνάγεται, ὅτι αἱ συγκρινόμεναι παραστάσεις εἶνε ἴσαι.

ΣΗΜ. Ἂν ὁ ἀριθμὸς ρτ εἶνε ἄρτιος, ἑκάτερον τῶν μελῶν τῶν ἰσοτή (1) καὶ (2) ἔχει ἀνὰ δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἂν δὲ ὁ ρτ εἶνε περιτ ἑκάτερον τῶν μελῶν ἔχει μίαν μόνην τιμήν. Ὡσαύτως τῶν ἰσοτήτων καὶ (4) ἔχει ἑκάτερον τῶν μελῶν δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἂν ὁ ρ εἶνε τιος, μίαν δὲ μόνην, ἂν περιττός.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν ῥιζῶν.

Ἐπειδὴ γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν ων αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, ὑψοῦντες τὸ γινόμενον α. β. γ· ύναμιν $\frac{1}{\nu}$ εὑρίσκομεν $(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}$

$$\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[\nu]{\alpha}.\ \sqrt[\nu]{\beta}.\ \sqrt[\nu]{\gamma}.$$

ης αὕτη ἐκφράζει τὸ θεώρημα:

ιλλαπλασιάσωμεν ἰσοβαθμίους ῥίζας, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ιζα, καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.

είγματος χάριν εἶνε $\sqrt{2}.\ \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4.$

ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha^\nu\beta$ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$, εὑρίσκομεν

$$\left(\alpha^\nu.\beta\right)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha\beta^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^\nu.\beta} = \alpha.\sqrt[\nu]{\beta}.$$

, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ῥίζαν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλα- ιμεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ

είγματος χάριν εἶνε $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12}.$

ἡ ἰσότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

ιεθα νὰ ἐξαγάγωμεν παράγοντά τινα τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῶσιν εἰς τὴν ναμιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ, ἕπεται

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}.$$

ττιν ἵνα διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἄλλης ἰσοβαθμίου, ἀρκεῖ νὰ διαι- τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθ- ιν.

είγματος χάριν εἶνε $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2.$

ιντες τὴν νὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha}{\beta^\nu}$, (ἤτοι ὑψοῦντες αὐτὸ εἰς

τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$), εὑρίσκομεν

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta}.$$

Τουτέστιν, *ἵνα διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἡ αὐτὴ δὲ ἰσότης δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ.

Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν διαιρέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν εἶνε $\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{200}}{5}=\sqrt{\frac{200}{25}}=\sqrt{8}.$$

196. Ῥίζαι διαφόρων βαθμῶν τρέπονται εἰς ἰσοβαθμίους, ὅπως καὶ κλάσματα μὴ ὁμώνυμα εἰς ὁμώνυμα· διότι ἐπιτρέπεται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ἑκάστης ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν θέλωμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Κατὰ ταῦτα αἱ ῥίζαι $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[5]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$

γίνονται ἰσοβάθμιοι: $\sqrt[60]{\alpha^{10}}$, $\sqrt[60]{\beta^{12}}$, $\sqrt[60]{\gamma^{15}}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ῥιζῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς μίαν ῥίζαν.

Παρατηρήσεις.

1) Πᾶν γινόμενον, ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε ῥιζικὰ καὶ ἂν ἔχῃ, ἀνάγεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, εἰς μίαν ῥίζαν. Ἡ τοιαύτη ἀναγωγὴ εἶνε ὠφέλιμος, ὅταν πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον κατά τινα προσέγγισιν. Οὕτως ἀντὶ $10\sqrt{5}$ καλὸν εἶνε νὰ γράφωμεν τότε $\sqrt{500}$· διότι ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν τοῦ 500 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὑρίσκομεν 22, ἐν ᾧ ἐκ τοῦ γινομένου $10\sqrt{5}$, ἂν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα τοῦ 5 ὁμοίως, προκύπτει μόνον 20· συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι τὸ λάθος τὸ ἐπὶ τῆς ῥίζης $\sqrt{5}$ συμβαῖνον εἶνε μὲν μικρότερον τῆς μονάδος, ἀλλὰ δεκαπλασιαζόμενον ὑπερβαίνει αὐτήν. Ὁμοίως ἀντὶ $\sqrt{8}.\sqrt{3}$ γραπτέον $\sqrt{24}$, κτλ. Δυνατὸν δὲ καὶ νὰ συμβῇ, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν νὰ εὑρίσκηται ἀκριβῶς, ἀφοῦ τραπῇ εἰς μίαν ῥίζαν· οὕτω π. χ. εἶνε

$\sqrt{3}.\sqrt{27}=\sqrt{81}=9$· ὁμοίως $\sqrt{2}\sqrt{32}=\sqrt{64}=8$· τοῦτο δὲν θὰ ἐφαίνετο, ἂν ἑκάστη τῶν ῥιζῶν εὑρίσκετο κατὰ προσέγγισιν καὶ ἔπειτα ἐπολλαπλασιάζοντο.

2) Τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ν ῥίζης κλάσματος ἀνάγομεν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης ἀκεραίου, (ὅπερ ἁπλούστερον), ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ παρονομαστὴς τελεία ν δύναμις. Οὕτω π. χ. εἶνε

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}}=\sqrt[3]{\frac{2.5.5.}{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{50}}{5}$$

3) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ ῥιζικόν, δυνάμεθα νὰ μεταβιβάσωμεν αὐτὸ εἰς τὸν ἀριθμητήν, πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ ἁρμοδίαν τινὰ παράστασιν.

Ἔστω ἡ παράστασις $\dfrac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$.

ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\sqrt{\delta}$, γίνεται αὕτη

$$\frac{2\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta}}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{2\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\delta}}{\delta}.$$

Καὶ ὅταν ἡ παράστασις ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $\alpha+\sqrt{\beta}$, (ἔνθα α καὶ β εἶνε ῥηταὶ παραστάσεις), ἀπαλλάσσεται ὁ παρανομαστὴς ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς κλασματικῆς παραστάσεως ἐπὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$· διότι τότε γίνεται ὁ παρονομαστὴς $(\alpha+\sqrt{\beta}).(\alpha-\sqrt{\beta})=\alpha^2-(\sqrt{\beta})^2=\alpha^2-\beta$· ἤτοι ῥητός.

Ἡ μεταβίβασις αὕτη τῶν ῥιζῶν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὸν ἀριθμητὴν πρέπει νὰ γίνηται πάντοτε, ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν κλάσμα τι κατὰ προσέγγισιν· διότι συμφέρει πολὺ περισσότερον νὰ ἔχωμεν τὸν παρονομαστὴν ἀκριβῶς, τὸν δὲ ἀριθμητὴν μὲ προσέγγισιν ἢ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐναντίον. Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{5}{\sqrt{12}}$ καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὑρίσκομεν $\dfrac{5}{3}$· ἀλλ' ἂν γράψωμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς $\dfrac{5\sqrt{12}}{12}$ ἢ $\dfrac{\sqrt{300}}{12}$ καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν $\dfrac{17}{12}$, ὅπερ εἶνε πολὺ πλησιέστερον εἰς τὸ ἀληθές.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶνε

$$\sqrt{2}\,.\sqrt{8}=4,\qquad \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}=2,\qquad \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=5,$$

$$\sqrt[3]{25}\,\sqrt[6]{25}=5,\qquad \sqrt{12}\,\sqrt{27}=18,$$

$$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{40},\qquad 5\sqrt{8}=\sqrt{200},\qquad 3\sqrt{2}=\sqrt{18}.$$

2) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δυνάμεων

$$\alpha^{\frac{1}{2}},\quad \alpha^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[6]{\alpha^5}\qquad (\text{Ἀπ. } \alpha^2).$$

3) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῶν παραστάσεων

$$\sqrt{\alpha}:\sqrt[5]{\alpha^2}\qquad \left(\text{Ἀπ. } \sqrt[10]{\alpha}\right).$$

4) Εὑρεῖν τὸν κύβον τῆς παραστάσεως

$$\sqrt[5]{\alpha^7}\qquad \left(\text{Ἀπ. } \alpha^{\frac{21}{5}} \text{ ἢ } \alpha^4.\sqrt[5]{\alpha}\right).$$

5) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ τίθεται καὶ ὑπὸ τὴν ἑπομένην μορφὴν

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$$

διότι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ῥιζῶν εἶνε

$$(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha.\beta}.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγωνικῶν ῥιζῶν τρέπεται εἰς μίαν μόνην ῥίζαν, ἐὰν τὸ γινόμενον α.β τῶν ὑπορρίζων εἶνε τέλειον τετράγωνον. Οὕτως εὑρίσκεται

$$\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48},$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18},$$
$$\sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{80}.$$

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος βλέπομεν, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παραστάσεως τῆς μορφῆς $\gamma+\sqrt{\delta}$ δύναται ἐνίοτε νὰ τραπῇ εἰς ἄθροισμα δύο ῥιζῶν τετραγωνικῶν ἢ καὶ εἰς ὁμοίαν παράστασιν. Οὕτως εἶνε

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=1+\sqrt{2},$$
$$\sqrt{29+\sqrt{720}}=3+2\sqrt{5},$$
$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

6) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶνε

$$\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

ὅταν α καὶ β εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί· ὥστε ἡ τετρ. ῥίζα ἀθροίσματος δὲν εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν μερῶν του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Τετραγωνική ῥίζα τῶν μονωνύμων.

197. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου, τουτέστιν ἡ δύναμις $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ἐξάγεται κατὰ τοὺς νόμους τῶν δυνάμεων (193), ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἑκάστου παράγοντος.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος παράγων εἶνε δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἐξάγεται (193) διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ τοῦ 2.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\sqrt{49\alpha^2\beta^2\gamma^8}=(49)^{\frac{1}{2}}.(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.(\beta^2)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^8)^{\frac{1}{2}}=\pm 7\alpha\beta\gamma^4.$$

Κλασματικοῦ μονωνύμου ἡ ῥίζα ἐξάγεται κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους (193), ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\sqrt{\frac{25\alpha^2\beta^6\gamma^4}{36\delta^4}}=\left(\frac{25\alpha^2\beta^6\gamma^4}{36\delta^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(25)^{\frac{1}{2}}(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^6)^{\frac{1}{2}}(\gamma^4)^{\frac{1}{2}}}{(36)^{\frac{1}{2}}.(\delta^4)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{5\alpha\beta^3\gamma^2}{6\delta^2}.$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ ἐγράφη πρὸ τῶν ἐξαγομένων, διότι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ὡς καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ῥίζα, ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμὰς καὶ δύναται ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς.

Ἐὰν τινος τῶν παραγόντων δὲν ἐξάγηται ἡ ῥίζα, ἀφίνομεν ἐπ' αὐτοῦ σεσημειωμένην τὴν πρᾶξιν· ἢ, ἂν εἶνε δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς δύο οὕτως, ὥστε νὰ ἐξάγηται ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\sqrt{5\alpha^2\beta^6\gamma^8}=\sqrt{5}.\ \alpha\beta^3.\gamma^4$$

$$\sqrt{8\alpha^3\beta^4\gamma^6}=\sqrt{8}.\sqrt{\alpha^3}.\beta^2\gamma^3=\sqrt{2.4}\sqrt{\alpha^2.\alpha}.\beta^2\gamma^3=$$

$$=2\sqrt{2}.\ \alpha.\sqrt{\alpha}.\beta^2.\ \gamma^3=2\alpha\beta^2\gamma^3.\sqrt{2\alpha}.$$

Ὁμοίως $$\sqrt{\frac{4\alpha^2\beta^4\gamma^2}{\delta}}=\frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}.$$

‘Τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν πολυωνύμων.

198. Ἐξαγαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου σημαίνει εὑ
πολυώνυμον, οὗ τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τῷ δοθέντι πολυωνύμῳ.

Ἡ μέθοδος, δι' ἧς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν πολυωνύμ
(ὅταν ὑπάρχῃ), συνάγεται ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ τετραγώνου αὐτῶ

*Τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώ
τῶν ὅρων καὶ ἐκ τῶν διπλασίων τῶν γινομένων τῶν ὅρων ἀνὰ
λαμβανομένων.*

Ἔστω τυχὸν πολυώνυμον, οὗ τοὺς ὅρους παριστῶμεν πρὸς συντομ
ἕκαστον δι' ἑνὸς γράμματος

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\varkappa$$

τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\varkappa)\,(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\varkappa)$ ε
σκεται, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἐφ' ἑαυτὸν
ἐπὶ τοὺς ἄλλους πάντας καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἐν τῷ γινομένῳ θὰ εὑρίσκωντα
τετράγωνα τῶν ὅρων πάντων· ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήπ
ὅρων θὰ εὑρίσκηται διπλοῦν· διότι τὸ γινόμενον βα, ἵνα τοῦτο θεωρή
μεν, θὰ προκύψῃ πρῶτον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὅρου β ἐπὶ
πολυώνυμον καὶ δεύτερον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὅρου α ἐπὶ
πολυώνυμον· ὥστε ἐν τῇ προσθέσει τῶν ὁμοίων ὅρων θὰ προκύψῃ 2
ἐπειδὴ δὲ ἄλλο εἶδος ὅρων δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ γινομένῳ, συνάγετα
πρότασις.

Κατὰ ταῦτα τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου

$$4\chi^3-2\alpha\chi^2+5\alpha^2\chi-2\alpha^3$$

εἶνε $16\chi^6+4\alpha^2\chi^4+25\alpha^4\chi^2+4\alpha^6-$
$-16\alpha\chi^5+40\alpha^2\chi^4-16\alpha^3\chi^3-$
$-20\alpha^3\chi^3+8\alpha^4\chi^2-$
$-20\alpha^5\chi$

ἢ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$16\chi^6-16\alpha\chi^5+44\alpha^2\chi^4-36\alpha^3\chi^3+33\alpha^4\chi^2-20\alpha^5\chi+4\alpha^6.$$

Ὅταν πολυώνυμον εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γρ
ματος, ὑπάρχουσιν ἐν τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ τέσσαρες ὅροι μὴ δυνάμε
νὰ ἀναχθῶσι μετ' οὐδενὸς ἄλλου· εἶνε δὲ οὗτοι οἱ δύο πρῶτοι καὶ
δύο τελευταῖοι, ἐὰν τὸ τετράγωνον εἶνε καὶ αὐτὸ διατεταγμένον. Καὶ

τως, ἂν πολυώνυμόν τι διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἔστω τοῦ χ, καὶ παρασταθῶσι πρὸς συντομίαν οἱ ὅροι αὐτοῦ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν α, β, γ,.... $\varkappa$, λ, τὸ τετράγωνον εἶνε

$$(\alpha+\beta+\gamma+...+\lambda).(\alpha+\beta+\gamma+.....+\lambda)\cdot$$

ἐμάθομεν δὲ ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων, ὅτι οἱ ὅροι α^2 καὶ λ^2 (ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος) μετ' οὐδενὸς ἄλλου δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν· ἀλλὰ καὶ οἱ δύο ὅροι $2\alpha\beta$ καὶ $2\varkappa\lambda$ (τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δύο πρώτων καὶ τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δύο τελευταίων) μένουσιν ἀνάγωγοι· διότι τὸ μὲν $2\alpha\beta$ εἶνε γινόμενον δύο ὅρων τοῦ πολυωνύμου, τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ χ ἐχόντων, καὶ θὰ περιέχῃ διὰ τοῦτο τὸ γράμμα χ εἰς δύναμιν μεγαλητέραν ἢ τὰ λοιπὰ γινόμενα β^2, $2\beta\gamma$, $2\alpha\gamma$, κτλ. ὁ δὲ $2\varkappa\lambda$ εἶνε γινόμενον δύο ὅρων, τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις τοῦ χ ἐχόντων· καὶ ἑπομένως θὰ περιέχῃ τὸ χ εἰς δύναμιν μικροτέραν ἢ πάντα τὰ λοιπὰ γινόμενα τῶν ὅρων ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

199. Τούτων οὕτως ἐχόντων, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δοθέντος πολυωνύμου (ἐὰν ὑπάρχῃ) κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Ὑποθέσωμεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἔστω τοῦ χ· παραστήσωμεν δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ὁμοίως διατεταγμένην διὰ τοῦ πολυωνύμου

$$\alpha+\beta+\gamma+..+\varkappa,$$

αὐτὸ δὲ τὸ δοθὲν διὰ τοῦ $A+B+\Gamma+..+M$.

Κατὰ τὰ προειρημένα ὁ πρῶτος ὅρος A τοῦ δοθέντος πολυωνύμου (ἐὰν εἶνε τετράγωνον τοῦ $\alpha+\beta+..+\varkappa$) θὰ εἶνε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· ἐξάγοντες ἄρα τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς ῥίζης·

ἤτοι $$\alpha=\sqrt{A}.$$

Καὶ ὁ δεύτερος ὅρος B τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, εἶνε, ὡς ἐμάθομεν, ἴσος τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης· ἤτοι τῷ $2\alpha\beta$· ἐὰν ἄρα διαιρέσωμεν τὸν B διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, ἤτοι διὰ τοῦ 2α, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ῥίζης· ἤτοι

$$\beta=\frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν δύο πρώτων ὅρων, α καὶ β, τῆς ῥίζης,

ἐπειδὴ εἰξεύρομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\alpha+\beta$, ἤτοι τοὺς τρεῖς ὅρους $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ ὁ α^2 εἶνε αὐτὸς ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πολυωνύμου, διαγράφομεν αὐτὸν καὶ ἐκ τοῦ ὑπολειπομένου πολυωνύμου ἀφαιροῦμεν τοὺς δύο ὅρους $2\alpha\beta+\beta^2$, ἤτοι τὸ γινόμενον $\beta(2\alpha+\beta)$, ὅπερ εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὸν δεύτερον ὅρον εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ προκύπτον ἄθροισμα $2\alpha+\beta$ ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον β.

Τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου $(\alpha+\beta)^2$ ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου προκύπτον ὑπόλοιπον Π΄ πρέπει νὰ περιέχῃ, καθ' ἃ ἐμάθομεν, τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν εὑρεθέντων ὅρων α καὶ β ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου κτλ., ἤτοι τοὺς ὅρους

$$2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+\ldots,$$

ἀλλὰ μεταξὺ τῶν ὅρων τούτων ὁ πρῶτος $2\alpha\gamma$ περιέχει τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου· ἐπομένως ὁ ὅρος οὗτος τοῦ ὑπολοίπου δὲν ἠδυνήθη νὰ ἀναχθῇ μετ' οὐδενὸς τῶν ἑπομένων καὶ εἶνε διὰ τοῦτο ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου· ἐὰν ἄρα διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου Π΄ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τρίτου ὅρου γ, ἐπειδὴ εἰξεύρομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον Π πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta+\gamma)$, ἤτοι τὸ $(\alpha+\beta)^2+2\gamma.(\alpha+\beta)+\gamma^2$, ἀφαιροῦμεν τοὺς ὅρους τούτους ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς· τὸ μὲν τετράγωνον $(\alpha+\beta)^2$ ἀφῃρέσαμεν ἤδη (καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον τὸ Π΄), ὥστε μένει ἐκ τοῦ ὑπολοίπου Π΄ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $2(\alpha+\beta).\gamma+\gamma^2$· τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὸν εὑρισκόμενον τρίτον ὅρον γ εἰς τὸ διπλάσιον τῶν ἤδη εὑρεθέντων καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ ἄθροισμα $2\alpha+2\beta+\gamma$ ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον γ.

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, ὑπολείπεται ὑπόλοιπόν τι Π΄΄, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ῥίζης διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ διὰ τοῦ 2α.

Ἐξακολουθοῦντες οὕτως εὑρίσκομεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς ῥίζης· ἡ δὲ πρᾶξις περατοῦται, ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

$25\alpha^4 - 10\alpha^3\beta + 21\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + 4\beta^4$	$5\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2$
$-25\alpha^4$	$10\alpha^2$
$-10\alpha^3\beta + 21\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + 4\beta^4$	$10\alpha^2 - \alpha\beta$
$10\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2$	$-\alpha\beta$
$20\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + 4\beta^4$	$-10\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2$
$-20\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 - 4\beta^4$	$10\alpha^2 \quad 2\alpha\beta + 2\beta^2$
0	$+2\beta^2$
	$20\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + 4\beta^4$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου ἐλάβομεν αὐτὴν μετὰ τοῦ σημείου + ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὴν καὶ μετὰ τοῦ σημείου —· τότε θὰ εὑρίσκομεν τοὺς αὐτοὺς ὅρους ἐν τῇ ῥίζῃ, ἀλλὰ πάντας μετὰ σημείου ἀντιθέτου· ὑπάρχουσιν ἑπομένως δύο πολυώνυμα ἀντίθετα, ὧν τετράγωνον εἶνε τὸ δοθέν. Γνωστὸν δὲ καὶ ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι πᾶσα τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς

200. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου, διατάσσομεν αὐτὸ κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολυωνύμου, καὶ τὴν ῥίζαν ταύτην γράφομεν πρῶτον ὅρον τῆς ῥίζης τοῦ πολυωνύμου.

Διαγράφομεν τὸν πρῶτον ὅρον ἐκ τοῦ πολυωνύμου καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸ πηλίκον εἶνε ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης.

Γράφομεν τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν δεύτερον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον· τὸ δὲ προκύπτον γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου· ὅτε εὑρίσκομεν δεύτερόν τι ὑπόλοιπον.

Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· καὶ τὸ πηλίκον εἶνε ὁ τρίτος ὅρος τῆς ῥίζης τοῦ πολυωνύμου.

Γράφομεν τὸ διπλάσιον τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν τὸν εὑρεθέντα τρίτον ὅρον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπ' αὐτὸν τὸν τρίτον ὅρον· τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, ὅτε προκύπτει τρίτον τι ὑπόλοιπον, καὶ οὕτω καθεξῆς· λαμβάνει δὲ ἡ πρᾶξις πέρας, ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

ΣΗΜ. Α΄. Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνεται, ὅτι δοθὲν πολυώνυμ
δὲν εἶνε τετράγωνον ἄλλου κατὰ τὰς ἑπομένας περιπτώσεις.

α) Ἐὰν εἶνε διώνυμον· διότι παντὸς μὲν μονωνύμου τὸ τετράγω
εἶνε πάλιν μονώνυμον, παντὸς δὲ διωνύμου εἶνε τριώνυμον.

β΄) Ὅταν μετὰ τὴν διάταξιν πρὸς οἱονδήποτε γράμμα, ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος ὅρος δὲν εἶνε τέλεια τετράγωνα· τοῦτο συμβαίνει πάντοτε ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων τούτων (οἵτινες εἶνε ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ἐκθέτης τοῦ πολυωνύμου) δὲν εἶνε ἀμφότεραι ἄρτιοι.

γ΄) Ὅταν τινὸς τῶν ὑπολοίπων ὁ πρῶτος ὅρος δὲν εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης.

ΣΗΜ. Β΄. Ἐὰν εἰξεύρωμεν, ὅτι ἡ ῥίζα δοθέντος πολυωνύμου δὲν ἔχει περισσοτέρους τῶν τεσσάρων ὅρων, εὑρίσκομεν αὐτοὺς ἀμέσως· διότι τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸν τελευταῖον εὑρίσκομεν ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ πολυωνύμου (διατεταγμένου)· τὸν δὲ δεύτερον (ἐὰν ὑπάρχῃ) εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸν δὲ τρίτον (ἐὰν ὑπάρχῃ) διαιροῦντες τὸν προτελευταῖον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς ῥίζης. Συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ δοθέντος πολυωνύμου πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 6ον, διότι τότε ἡ ῥίζα αὐτοῦ δεν δύναται νὰ ἔχῃ ὅρους περισσοτέρους τῶν τεσσάρων, ἤτοι τοὺς ἔχοντας τὰς δυνάμεις χ^3, ... καὶ ὅρον μὴ ἔχοντα τὸν χ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ πολυώνυμον

$$\chi^6-4\chi^4+10\chi^3+4\chi^2-20\chi+25\cdot$$

αἱ ῥίζαι τῶν ἄκρων ὅρων εἶνε χ^3 καὶ ±5· (διότι δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ῥίζης πάντοτε θετικόν)· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ $2\chi^3$, βλέπομεν, ὅτι ἡ ῥίζα θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον -2χ· τὸν αὐτὸν δὲ ὅρον εὑρίσκομεν καὶ διαιροῦντες τὸν προτελευταῖον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ 10· ὅθεν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος πολυωνύμου (ἐὰν τοῦτο εἶνε τέλειον τετράγωνον) δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους ὅρους ἢ τοὺς ἑξῆς

$$\chi^3-2\chi+5\varepsilon, \qquad \text{ἔνθα } \varepsilon \text{ εἶνε ἢ } 1 \text{ ἢ } -1.$$

Ὑψοῦντες τὸ τριώνυμον τοῦτο εἰς τὸ τετράγωνον βλέπομεν, ὅτι (ἐὰν ὑποτεθῇ $\varepsilon=+1$) ὄντως εἶνε ῥίζα τοῦ δοθέντος πολυωνύμου.

Ἔστω δεύτερον τὸ πολυώνυμον

$$\chi^6-8\chi^5+4\chi^4-10\chi^3+15\chi^2-8\chi+1$$

τὰ εἰρημένα ἡ ῥίζα, ἂν ὑπάρχῃ, ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν ὅρων

$\chi^3 - 4\chi^2 - 4\chi\varepsilon + \varepsilon$, ἔνθα ε εἶνε ἢ 1, ἢ -1.

'πειδὴ ὅμως τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου τούτου εἶνε διάφορον δοθέντος πολυωνύμου, (εἴτε $\varepsilon = +1$, εἴτε $\varepsilon = -1$ ὑποθέσωμεν), ει, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον οὐδενὸς πολυωνύμου εἶνε τετράγωνον.

ΙΜ. Γ'. Ἐνίοτε ἀναλύεται τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἰς δύο παράγοντας, ὁ εἷς εἶνε τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου.

ιοῦτον εἶνε τὸ πολυώνυμον

$$2\chi^5 - 12\chi^4 + 22\chi^3 - 12\chi^2 + 2\chi,$$

γράφεται ὡς ἑξῆς

$$2\chi(\chi^4 - 6\chi^3 + 11\chi^2 - 6\chi + 1)$$

ἢ

$$2\chi(\chi^2 - 3\chi + 1)^2.$$

πομένως ἡ ῥίζα αὐτοῦ δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἕπεται

$$(\chi^2 - 3\chi + 1)\sqrt{2\chi}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

201. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις· εἶνε δὲ αὗται, ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προερχομένη, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς ἀλλαχθῇ.*

Λέγω δὲ *μίαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς δύο ἄλλας*, ὅταν πᾶσα λύσις αὐτῆς εἶνε λύσις καὶ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἄλλων· καὶ τἀνάπαλιν πᾶσα λύσις τῆς ἑτέρας τῶν δύο τούτων εἶνε λύσις καὶ τῆς πρώτης.

Ἔστω τυχοῦσα ἐξίσωσις $\alpha=\beta$, τῆς ὁποίας τὰ μέλη παριστῶμεν πρὸς συντομίαν ἕκαστον δι' ἑνὸς γράμματος· λέγω, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$ εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $\alpha=\beta$ καὶ $\alpha=-\beta$.

Τουτέστι πᾶσα λύσις τῆς πρώτης θὰ εἶνε λύσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο δευτέρων· καὶ πᾶσα λύσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο δευτέρων θὰ εἶνε λύσις καὶ τῆς πρώτης.

Διότι, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$, ἤτοι ἂν τὰ μέλη αὐτῆς α^2 καὶ β^2 γίνωσιν ἴσοι ἀριθμοί, ἐπειδὴ τῶν ἴσων ἀριθμῶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶνε ἢ ἴσαι ἢ ἀντίθετοι, θὰ εἶνε ἢ $\alpha=\beta$, ἢ $\alpha=-\beta$· ἤτοι θὰ ἀληθεύῃ καὶ μία ἐκ τῶν εἰρημένων δύο ἐξισώσεων· ἐὰν δὲ πάλιν ἀληθεύσῃ ἡ μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\alpha=\beta$, ἢ $\alpha=-\beta$, ἤτοι ἂν α καὶ β γίνωσιν ἴσοι ἢ ἀντίθετοι ἀριθμοί, τὰ τετράγωνα αὐτῶν α^2 καὶ β^2 θὰ γίνωσιν ἴσα· καὶ ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$.

Τὸ αὐτὸ θεώρημα δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ.

Ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ληφθῇ δὲ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν μελῶν καὶ μετὰ τοῦ + καὶ μετὰ τοῦ —, αἱ οὕτω προκύπτουσαι δύο ἐξισώσεις εἶνε ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δεδομένην.

Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις $\alpha=\beta$ εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὰς δύο

$$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{\alpha}=-\sqrt{\beta},$$

διότι προκύπτει ἐξ ἑκατέρας αὐτῶν, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τετραγωνισθῶσιν.

Γενικὴ μορφὴ πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

202. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἕνα ἔχουσα ἄγνωστον, δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma\cdot \qquad (1)$$

γίνεται δὲ τοῦτο, ἀφοῦ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταί, ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι πράξεις, χωρισθῶσιν οἱ γνωστοὶ ὅροι ἀπὸ τῶν λοιπῶν καὶ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα ὅρον πάντες οἱ περιέχοντες τὸ χ^2, ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ περιέχοντες τὸ χ· τοῦτ' ἔστιν, ἀφοῦ ἐφαρμοσθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως αἱ πράξεις τοῦ ἐδαφ. 105.

Ὁ συντελεστὴς α δὲν δύναται νὰ εἶνε 0· διότι τότε ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ πρώτου βαθμοῦ· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται καὶ εἰς τὴν μορφὴν

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=\frac{\gamma}{\alpha}\cdot \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πηλίκα $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε γνωστοὶ ἀριθμοὶ ἢ γνωσταὶ παραστάσεις, ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μὲν πρῶτον διὰ τοῦ π, τὸ δὲ δεύτερον διὰ τοῦ κ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς ἕπεται

$$\chi^2+\pi\chi=\kappa. \qquad (3)$$

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς π εἶνε 0, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ

$$\chi^2=\kappa.$$

Ἐὰν δὲ ὁ γνωστὸς ὅρος κ εἶνε 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\chi^2+\pi\chi=0.$$

Τὰς δύο ταύτας μερικὰς ἐξισώσεις θὰ θεωρήσωμεν πρὸ τῆς γενικῆς.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^2=\kappa$.

203. Διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ζητεῖται ἀριθμός, οὗ τὸ τετράγωνον νὰ εἶνε ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ κ· καὶ ἂν μὲν ὁ κ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, οὐδενὸς ἀριθμοῦ, ἐξ ὅσων ἔχομεν, εἶνε τετράγωνον (σελ. 126), καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις οὐδεμίαν ἔχει λύσιν ἐν τῷ παρόντι τῶν ἀριθμῶν συστήματι· ἂν δὲ ὁ κ εἶνε θετικὸς ἀριθμός, ἐμάθομεν, ὅτι εἶνε τετράγωνον δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν, οἵτινες παρίστανται γενικῶς διὰ τῶν συμβόλων $\sqrt{\kappa}$ καὶ $-\sqrt{\kappa}$· ὥστε ἵνα λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ χ ἴσος τῷ ἑτέρῳ τῶν ἀριθμῶν τούτων· ἤτοι

$$\chi=+\sqrt{\kappa}, \quad \text{ἢ} \quad \chi=-\sqrt{\kappa}.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ ἀμέσως ἐκ τῆς δοθεί-

σης, ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν αὐτῆς.

204. Ἵνα ἡ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\chi^2=\kappa$$

καταστῇ πάντοτε δυνατή, εἶνε ἀνάγκη νὰ πλάσωμεν καὶ παραδε[illegible] νέον τινὰ ἀριθμὸν καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ν[illegible] —1. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ὅντινα παριστῶμεν διὰ τοῦ i, θεω[illegible] ὡς νέαν μονάδα καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀ[illegible] μετ' αὐτῆς δὲ καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς —i καὶ πάντα τὰ πολ[illegible] σια καὶ τὰ πολλοστὰ ἀμφοτέρων. Οὕτω προκύπτει σύστημα [illegible] ρον, τοῦ ὁποίου οἱ ἀριθμοὶ γίνονται πάντες ἐκ τῶν τεσσάρων [illegible] δων 1, —1, i καὶ —i καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν. Λέγονται δὲ νέαι μονάδες i καὶ —i *φανταστικαί*, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀποτελ[illegible] ἀριθμοί, *φανταστικοί*· αἱ δὲ παλαιαὶ 1 καὶ —1 πρὸς διάκρισιν λ[illegible] *πραγματικαί* καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοί, *πραγματικοί*. Οἱ δὲ ἐκ [illegible] στικῶν καὶ ἐκ πραγματικῶν συγκροτούμενοι λέγονται *μιγάδ*[illegible] 4+2i, —3+4i κτλ. *Ἀποδεικνύεται δὲ ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθη*[illegible] *ὅτι καὶ ἐν τῷ γενικωτέρῳ τούτῳ συστήματι διατηροῦνται* [illegible] *ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων (ἑπομένως καὶ σύμπας* [illegible] *λογισμός) καὶ ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις μ βαθμοῦ ἔχει μ ῥίζας* [illegible] *ὅτι εἶνε ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ περισσότερον, χωρὶς νὰ* [illegible] *χουσαι αἱ ῥηθεῖσαι ἰδιότητες.*

205. Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν πᾶσα ἐ[illegible] τῆς μορφῆς $\chi^2=\kappa$ λύεται, καὶ ὅταν εἶνε ἀρνητικὸς [illegible] ὑπάρχουσι καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι [illegible] φανταστικαὶ μονάδες i καὶ —i εἶνε αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τοῦ —1 [illegible] παραδείγματος χάριν ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2=-5$$

δι' ἧς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ —5 [illegible] τῶν μελῶν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν [illegible]

$$\chi=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{\ldots}\ [illegible]$$

ὥστε αἱ δύο ἀριθμοὶ [illegible] καὶ [illegible]

Παραδείγματα.

1ον Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2-[illegible]=[illegible]-[illegible]$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $5\chi^2=80$, ὅθεν $\chi^2=16$, καὶ ἐπομένως ἔχομεν τὰς δύο λύσεις

$$ἢ \quad \chi=+\sqrt{16}=4, \quad ἢ \quad \chi=-\sqrt{16}=-4.$$

$2^{ον}$) $$\frac{\chi^2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{\chi^2}{6}+\frac{3}{8}+\chi^2.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $116\chi^2=35$, ὅθεν $\chi^2=\frac{35}{116}$

καὶ ἐπομένως ἔχομεν τὰς λύσεις

$$ἢ \quad \chi=+\sqrt{\frac{35}{116}}, \quad ἢ \ \chi=-\sqrt{\frac{35}{116}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\sqrt{\frac{35}{116}}=\sqrt{\frac{35}{4.29}}=\sqrt{\frac{35.29}{4.29^2}}=\frac{1}{58}\sqrt{1015},$$

ἕπεται, ὅτι ἢ $\chi=+\frac{1}{58}\sqrt{1015}$, ἢ $\chi=-\frac{1}{58}\sqrt{1015}$.

$3^{ον}$) $$(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)=2\alpha+1.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται $\chi^2=\alpha^2+2\alpha+1$, ἤτοι

$$\chi^2=(\alpha+1)^2.$$

ὅθεν ἕπονται αἱ λύσεις

$$\chi=\alpha+1, \quad ἢ \ \chi=-\alpha-1.$$

$4^{ον}$) $$4\chi^2-8=12\chi^2+24.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται $8\chi^2=-32$, ἢ $\chi^2=-4$·

ὅθεν ἕπονται αἱ φανταστικαὶ λύσεις

$$ἢ \ \chi=+\sqrt{-4}=2i, \quad ἢ \ \chi=-\sqrt{-4}=-2i.$$

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=0$.

206. Ἵνα λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, γράφομεν αὐτὴν ὡς ἕπεται

$$\chi(\chi+\pi)=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ γινόμενον δύο παραγόντων τότε μόνον εἶνε 0, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶνε 0, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶνε

$$ἢ \ \chi=0, \quad ἢ \ \chi+\pi=0·$$

Ἔχομεν ἄρα δύο λύσεις ἢ $\chi=0$, ἢ $\chi=-\pi$.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2-8\chi=0$$

γράφοντες αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi(\chi-8)=0$ βλέπομεν, ὅτι ἔχει τὰς λύσεις

$$ἢ \ \chi=0, \quad ἢ \ \chi=8.$$

Λύσις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$.

207. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ χ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ χ ἐπὶ τὸν γνω ἀριθμὸν $\frac{\pi}{2}$ (διότι τὸ $\pi\chi$ εἶνε ἴσον πρὸς τὸ $\frac{\pi}{2}.2\chi$)· ἀποτελεῖ ἄρα δύο πρώτους ὅρους τοῦ τετραγώνου $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2$· ἵνα δὲ ἀποτελέσῃ ὅλον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ προστεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ τρίτος ὅρος τοῦ τετρα νου, ὅστις εἶνε ὁ $\frac{\pi^2}{4}$. Διὰ τῆς προσθέσεως τούτου εἰς ἀμφότερα μέλη τῆς ἐξισώσεως λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\varkappa+\frac{\pi^2}{4}$$

ἢ

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\varkappa+\frac{\pi^2}{4}.$$

ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, λαμβάν τὰς δύο ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτὴν ἐξισώσεις

$$\chi+\frac{\pi}{2}=\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}, \qquad \chi+\frac{\pi}{2}=-\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}},$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς δύο λύσεις

ἢ $$\chi=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

ἢ $$\chi=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}.$$

Τὰς δύο ταύτας λύσεις περιλαμβάνομεν εἰς ἕνα μόνον τύπον, γράφ τες αὐτὰς ὡς ἕπεται

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}.$$

208. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ χ εἶνε γενικὸς τύπος, δι' οὗ δυνάμ νὰ εὕρωμεν τοὺς λύοντας τὴν ἐξίσωσιν ἀριθμοὺς χωρὶς νὰ ἐπαναλά μεν τοὺς προηγηθέντας συλλογισμούς, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶν συντελεσταὶ π καὶ κ.

Δύναται δὲ νὰ ἑρμηνευθῇ ὁ τύπος ὡς ἕπεται.

Ἐκ πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀνηγμένης εἰς μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$ *ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται, ἐὰν ληφθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ πρώτης δυνάμεως αὐτοῦ μετὰ τοῦ ἐναντίου σημείου, προστεθῇ δὲ*

αὐτὸ ἢ ἀφαιρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γνωστοῦ ὅρου ηὐξημένου κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ.

Αἱ λύσεις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως λέγονται καὶ *ῥίζαι* αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου (1) βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο μὲν πραγματικὰς λύσεις ἢ ῥίζας, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\kappa + \frac{\pi^2}{4}$ εἶνε θετικός, μίαν δὲ μόνον (πραγματικήν), ἐὰν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἶνε 0, καὶ δύο μιγάδας, ἐὰν ἀρνητικός.

209. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (1) εὑρίσκονται καὶ αἱ λύσεις τῶν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων $\chi^2 = \kappa$ καὶ $\chi^2 + \pi\chi = 0$· (διότι καὶ αἱ ἐξισώσεις αὗται ὑπάγονται εἰς τὴν γενικήν, ἧς τινος εἶνε μερικαὶ μόνον περιπτώσεις). Ἐὰν τῷ ὄντι ὑποθέσωμεν $\kappa = 0$, ἡ μὲν γενικὴ ἐξίσωσις καταντᾷ $\chi^2 + \pi\chi = 0$, ὁ δὲ γενικὸς τύπος δίδει

$$\chi = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4}}, \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\cdot$$

ὅθεν αἱ λύσεις $\chi = 0$ καὶ $\chi = -\pi$.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\pi = 0$, ἡ μὲν γενικὴ ἐξίσωσις καταντᾷ $\chi^2 = \kappa$, ὁ δὲ γενικὸς τύπος δίδει

$$\chi = \pm\sqrt{\kappa}.$$

ΣΗΜ. Ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(\chi - \alpha)^2 = \beta,$$

αἱ ῥίζαι αὐτῆς εὑρίσκονται ἀμέσως διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετρ. ῥίζης ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ εἶνε

$$\chi = \alpha \pm \sqrt{\beta}.$$

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 5\chi = -6$.

Ἐφαρμόζοντες εἰς αὐτὴν τὸν εὑρεθέντα τύπον εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

ἤτοι

$$\chi = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$

ἑπομένως αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε

$$\chi = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

καὶ

$$\chi = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

$2^{ον}$) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+6\chi=8$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τύπον

$$\chi=-3\pm\sqrt{9+8}=-3\pm\sqrt{17}.$$

Ἑπομένως αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε

$$\chi=-3+\sqrt{17}$$

καὶ

$$\chi=-3-\sqrt{17}.$$

$3^{ον}$) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+7\chi=1$.

Ἐκ ταύτης ἕπεται κατὰ τὸν τύπον

$$\chi=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+1}=-\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{53}.$$

ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε

$$\chi=\frac{-7+\sqrt{53}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-7-\sqrt{53}}{2}.$$

$4^{ον}$) $\chi^2-7\alpha\chi=-12\alpha^2$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{7\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{49\alpha^2}{4}-12\alpha^2}=\frac{7\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}}$$

ἤτοι

$$\chi=\frac{7\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}.$$

ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε

$$\chi=4\alpha \quad \text{καὶ} \quad \chi=3\alpha.$$

$5^{ον}$) $\chi^2-(2\alpha+5\beta)\chi+10\alpha\beta=0$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν γενικὸν τύπον εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2\alpha+5\beta}{2}\right)^2-10\alpha\beta}.$$

Ἡ ὑπόρριζος παράστασις εἶνε

$$\frac{4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2}{4}, \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{2\alpha-5\beta}{2}\right)^2,$$

ὅθεν ἕπεται

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}\pm\frac{2\alpha-5\beta}{2}.$$

καὶ αἱ ῥίζαι ἑπομένως εἶνε

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}+\frac{2\alpha-5\beta}{2}=2\alpha$$

καὶ

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}-\frac{2\alpha-5\beta}{2}=5\beta.$$

6ον) $\chi^2-8\chi+25=0.$

Ἐφαρμόζοντες τὸν γενικὸν τύπον εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν

$$\chi=4\pm\sqrt{16-25}=4\pm\sqrt{-9}=4\pm\sqrt{9(-1)}\cdot$$

ἐξ οὗ ἕπονται αἱ μιγάδες ῥίζαι

$$\chi=4+3i \text{ καὶ } \chi=4-3i.$$

Εὔκολον δὲ εἶνε νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

* 210. Ἵνα εὕρωμεν τύπον παρέχοντα ἀμέσως τὰς ῥίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἀνηγμένης εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,$$

διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ α, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0, \quad \text{ἢ} \quad \chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot$$

ταύτης δὲ αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ π τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἀντὶ τοῦ κ τὸ $-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot$ οὕτω προκύπτει

$$\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

ἢ

$$\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν κλάσματος, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τῶν ὅρων καὶ γράφομεν κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 2α· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \tag{2}$$

Ὁ τύπος οὗτος παρέχει ἀμέσως τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,$$

χωρὶς νὰ εἶνε ἀνάγκη νὰ ἄγηται εἰς τὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\kappa.$

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $10\chi^2+\chi-3=0.$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τύπον (2)

$$\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.10.(-3)}}{20}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{20}=\frac{-1\pm11}{20}.$$

Ἑπομένως αἱ ῥίζαι εἶνε

$$\chi=\frac{-1+11}{20}=\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-1-11}{20}=-\frac{3}{5}.$$

2ον) $$8\chi^2+13\chi+12=0.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\chi=\frac{-13\pm\sqrt{169-4.8.12}}{16}=\frac{-13\pm\sqrt{-215}}{16}$$

καὶ αἱ ῥίζαι εἶνε

$$\chi=\frac{-13+i\sqrt{215}}{16} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-13-i\sqrt{215}}{16}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις.

1) $$\frac{\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2.$$

2) $$24\chi^2+29\chi+7=0.$$

3) $$\chi^2-2\alpha\chi=\beta^2-\alpha^2.$$

4) $$(\alpha+\beta)^2(\chi^2-\chi)+\alpha\beta=0.$$

5) $$(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\chi(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2-\beta^2=0.$$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$.

211. *Τῶν δύο ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$, τὸ μὲν ἄθρ σμα ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου μ ἐναντίου σημείου, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται τῷ γνωστῷ ὅρῳ ὡσαύτ μετ' ἐναντίου σημείου εἰλημμένῳ.*

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὰς ῥίζας διὰ ρ′ καὶ ρ″, ἔχομεν

$$\rho'=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}$$

$$\rho''=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}\cdot$$

καὶ προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\rho'+\rho''=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2.\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες δ' αὐτὰς εὑρίσκομεν

$$\rho'.\rho''=\left\{\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\right\}.\left\{\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\right\}=$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\varkappa+\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}-\varkappa-\frac{\pi^2}{4}=-\varkappa.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ ἰδιότητες αὗται μένουσι, καὶ ὅταν

μόνη ῥίζα ὑπάρχῃ, ἐὰν θεωρηθῇ αὕτη ὡς διπλῆ· διότι τότε τὰ ρ' καὶ ρ'' γίνονται ἴσα.

212. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τῶν ῥιζῶν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ ἑπόμενα ζητήματα:

1) *Εὑρεῖν τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως* $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$, *πρὶν ἢ λυθῇ αὕτη.*

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς

$$\varkappa+\frac{\pi^2}{4}$$

εἶναι ἀρνητικός, αἱ ῥίζαι εἶνε μιγάδες ἀριθμοί· θεωρήσωμεν λοιπὸν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε θετικός, ὅτε αἱ ῥίζαι εἶνε πραγματικαί. Τότε δυνατὸν νὰ εἶνε

α') π θετικὸν καὶ κ θετικόν.

Ἐπειδὴ τῶν ῥιζῶν τὸ γινόμενον εἶνε ἀρνητικὸν (—κ), ἕπεται, ὅτι εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ὡσαύτως ἀρνητικὸν (—π), ἕπεται, ὅτι μεγαλητέρα εἶνε ἡ ἀρνητική.

β') π θετικόν, ἀλλὰ κ ἀρνητικόν.

Ἐπειδὴ τῶν ῥιζῶν τὸ γινόμενον εἶνε θετικόν, αἱ ῥίζαι εἶνε ὁμοειδεῖς, ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ἀρνητικόν, ἕπεται, ὅτι ἀμφότεραι εἶνε ἀρνητικαί.

γ') π ἀρνητικόν, ἀλλὰ κ θετικόν.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε ἀρνητικόν, αἱ ῥίζαι εἶνε ἑτεροειδεῖς· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε θετικόν, μεγαλητέρα εἶνε ἡ θετική.

δ') π ἀρνητικὸν καὶ κ ἀρνητικόν.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε θετικόν, αἱ ῥίζαι εἶνε ὁμοειδεῖς, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε θετικόν, ἕπεται, ὅτι ἀμφότεραι εἶνε θετικαί.

Ἐὰν εἶνε $\varkappa=0$, μία τῶν ῥιζῶν εἶνε 0, ἡ δὲ ἄλλη εἶνε ὁ ἀντίθετος τοῦ π ἀριθμὸς (ἰδ. 206). Ἐὰν δὲ εἶνε $\pi=0$, αἱ δύο ῥίζαι εἶνε ἀντίθετοι (ἰδ. 203). Ἐὰν δὲ τέλος εἶνε $\pi=0$ καὶ $\varkappa=0$, ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶνε 0.

Ὅτι δὲ τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δύνανται νὰ εὑρεθῶσι καὶ ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (1), εἶνε φανερόν.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi=3$ ἔχει μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικὴν ῥίζαν, μεγαλητέραν δὲ τὴν θετικήν.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις $\chi^2 - 8\chi = -7$ ἔχει δύο ἀρνητικάς.

2) *Πῶς μεταβάλλονται αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, ὅταν οἱ μὲν ἀριθμοὶ β καὶ γ μένωσιν ἀμετάβλητοι, ὁ δὲ α ἐλαττῶται ἀπαύστως καὶ πλησιάζῃ πρὸς τὸ 0;*

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς τὴν $\beta\chi + \gamma = 0$, ἕπεται, ὅτι ἡ μία ἐκ τῶν ῥιζῶν αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $-\frac{\gamma}{\beta}$, ὅστις πληροῖ τὴν $\beta\chi + \gamma = 0$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶνε $-\frac{\beta}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι ἡ ἄλλη ῥίζα διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta}$ τόσῳ ὀλιγώτερον, ὅσῳ μικρότερον εἶνε τὸ α.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη ῥίζα καταντᾷ μεγαλητέρα παντὸς ἀριθμοῦ (τοῦ σημείου αὐτῆς μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν), ὅταν τὸ α γίνῃ ἱκανῶς μικρόν.

Ἀνάλυσις παντὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

213. Ἔστω τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ καὶ ἂς παρασταθῶσι διὰ ρ' καὶ ρ'' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, ἥτις προκύπτει, ὅταν τὸ τριώνυμον τοῦτο τεθῇ ἴσον τῷ 0· ἤτοι τῆς $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, ἢ τῆς $\chi^2 + \beta\chi = -\gamma$· τότε, ὡς ἐμάθομεν, εἶνε

$$\rho' + \rho'' = -\beta \quad \text{καὶ} \quad \rho'\rho'' = \gamma\cdot$$

ἑπομένως τὸ τριώνυμον $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\chi^2 - (\rho' + \rho'')\chi + \rho'\rho''$$

τοῦτο δὲ εἶνε γινόμενον τῶν παραγόντων $(\chi - \rho')(\chi - \rho'')$· ὅθεν ἕπεται

$$\chi^2 + \beta\chi + \gamma = (\chi - \rho')(\chi - \rho''). \qquad (1)$$

τοῦτ' ἔστι, *πᾶν τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων· εὑρίσκονται δὲ οἱ παράγοντες οὗτοι, ἂν ἀπὸ τοῦ γράμματος χ ἀφαιρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ χ, δι' ἃς τὸ τριώνυμον μηδενίζεται.*

Ἐὰν αἱ δύο ῥίζαι ρ', ρ'' εἶνε ἴσαι (ἤτοι ἂν εἷς καὶ μόνος ἀριθμὸς μηδενίζῃ τὸ τριώνυμον), βλέπομεν ἐκ τῆς ἰσότητος (1), ὅτι τὸ τριώνυμον εἶνε τέλειον τετράγωνον.

Ἐὰν τὸ τριώνυμον εἶνε τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ α καὶ ἐφαρμόζομεν τὰ προηγούμενα εἰς τὸ πηλίκον· ὅτε τοῦτο ἀνα-

λύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$. ἑπομένως πρὸ τῆς διαιρέσεως τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶνε ἴσον τῷ $\alpha(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$.

Κατὰ ταῦτα τὸ τριώνυμον $\chi^2-5\chi+6$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi-2)(\chi-3)$. διότι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-5\chi+6=0 \quad \text{εἶνε 2 καὶ 3.}$$

Καὶ τὸ τριώνυμον $\chi^2+7\chi-8$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi-1)(\chi+8)$· διότι οἱ μηδενίζοντες αὐτὸ ἀριθμοὶ εἶνε οἱ -8 καὶ $+1$.

Καὶ τὸ τριώνυμον $5\chi^2+9\chi-2$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ

$$5(\chi+2).\left(\chi-\frac{1}{5}\right), \quad \text{ἢ τῷ} \quad (\chi+2)(5\chi-1)\cdot$$

διότι οἱ μηδενίζοντες αὐτὸ ἀριθμοὶ εἶνε -2 καὶ $\frac{1}{5}$.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐξηγεῖ, διὰ τί ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο ῥίζας. Καὶ ὄντως γινόμενον δύο παραγόντων, οἷον τὸ $(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$, μηδενίζεται κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, δηλονότι μηδενιζομένου ἢ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου παράγοντος. Ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν τῷ 0 πρῶτον τὸν ἕνα παράγοντα καὶ ἔπειτα τὸν ἄλλον, θὰ λάβωμεν τὰς δύο ῥίζας τοῦ πολυωνύμου $\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν ἔχουσαν ῥίζας δύο ὡς ἔτυχε δεδομένους ἀριθμούς, ὡς τοὺς λ καὶ ρ· πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $(\chi-\lambda)(\chi-\rho)$ καὶ ἐξισοῦμεν αὐτὸ μὲ τὸ 0· ἤτοι θέτομεν $(\chi-\lambda)(\chi-\rho)=0$.

Ὅτι δὲ οὐδεμία ἄλλη δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχει τὰς δοθείσας ῥίζας, εἶνε φανερόν.

*Τὴν ἀνάλυσιν παντὸς τριωνύμου $\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

Συμπληροῦντες τὸ τετράγωνον, εἰς ὃ ἀνήκουσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι (§. 207) γράφομεν αὐτὸ ὡς ἕπεται

$$\left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)^2+\gamma-\frac{1}{2}\beta^2,$$

ἔπειτα διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

1) Ἐὰν $\gamma-\frac{1}{4}\beta^2$ εἶνε θετικόν, παριστῶντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ διὰ τοῦ τ, θὰ ἔχωμεν τὸ πολυώνυμον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)^2+\tau^2\cdot \qquad (1)$$

$$ἢ \quad \left(\chi+\frac{1}{2}\beta+\tau i\right)\left(\chi+\frac{1}{2}\beta-\tau i\right).$$

2) Ἐὰν εἶνε $\gamma-\frac{1}{4}\beta^2$ ἀρνητικόν, ὁ ἀντίθετος ἀριθμὸς $\frac{1}{4}\beta^2-\gamma$ θὰ εἶνε θετικὸς καὶ παριστῶντες τὴν τετραγ. αὐτοῦ ῥίζαν διὰ τ, θὰ ἔχωμεν τὸ τριώνυμον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)^2-\tau^2 \qquad (2)$$

$$ἢ \quad \left(\chi+\frac{1}{2}\beta+\tau\right)\left(\chi+\frac{1}{2}\beta-\tau\right).$$

3) Ἐὰν τέλος εἶνε $\gamma-\frac{1}{4}\beta^2=0$, τὸ τριώνυμον καταντᾷ

$$(3) \qquad \left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)^2 \quad ἢ \quad \left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)\left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)$$

ὥστε καὶ κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις, τὸ τριώνυμον ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων πρωτοβαθμίων (ὡς πρὸς τὸ χ).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐὰν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί, λ καὶ μ, τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὸ τριώνυμον $\chi^2+\beta\chi+\gamma$ δίδωσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ, αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ μία ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο ἀριθμῶν λ καὶ μ.

Διότι τὸ τριώνυμον τότε τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (2)

$$\left(\chi+\frac{1}{2}\beta\right)^2-\tau^2,$$

διότι εἰς τὰς ἄλλας δύο μορφὰς (2) καὶ (3) τὸ τριώνυμον εἶνε ἢ τετράγωνον τέλειον ἢ ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ διὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ δώσῃ ἀρνητικὸν ἐξαγόμενον διὰ πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ· αἱ ῥίζαι ἄρα θὰ εἶνε πραγματικαὶ $\left(\text{αἱ } -\frac{1}{2}\beta+\tau \text{ καὶ } -\frac{1}{2}\beta-\tau\right)$ καὶ ἄνισοι, καὶ ἂν παραστήσωμεν αὐτὰς διὰ ρ_1 καὶ ρ_2 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ τριώνυμον καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\chi-\rho_1)\ (\chi-\rho_2)$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ χ εἰς αὐτὸ πρῶτον μὲν ὑπὸ τοῦ λ, ἔπειτα δὲ ὑπὸ τοῦ μ εὑρίσκομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα

$$(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2) \quad \text{καὶ} \quad (\mu-\rho_1)(\mu-\rho_2)$$

ἅτινα ἐξ ὑποθέσεως εἶνε ἑτεροειδῆ· ἑπομένως τὸ πηλίκον αὐτῶν

$$\frac{\lambda-\rho_1}{\mu-\rho_1}\cdot\frac{\lambda-\rho_2}{\mu-\rho_2}$$

εἶνε ἀρνητικόν, ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν πηλίκων, θὰ εἶνε ἀρνητικόν· ἔστω τὸ πρῶτον· τότε οἱ ἀριθμοὶ $\lambda-\rho_1$ καὶ $\mu-\rho_1$ θὰ εἶνε ἑτεροειδεῖς· ἤτοι ἡ ῥίζα ρ_1 θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ λ καὶ μ.

Ἐξισώσεις ἔχουσαι ῥιζικά.

214. Ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ τετραγωνικήν τινα ῥίζαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος, κατορθοῦμεν, ὥστε αὕτη μόνη νὰ ἀποτελῇ τὸ ἕτερον τῶν μελῶν καὶ ὑψοῦμεν ἔπειτα ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε ἡ ῥίζα ἐξαφανίζεται. Ἀναμνηστέον ὅμως, ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις, τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν, ὅταν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ληφθῇ μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου. Λέγονται δὲ αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις *συζυγεῖς ἀλλήλων*.

Παραδείγματα.

1ον) $\chi+\sqrt{\chi}=20$

γράφομεν $\sqrt{\chi}=20-\chi$.

ὅθεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη,

$$\chi=400+\chi^2-40\chi$$

ἢ $\chi^2-41\chi=-400$

καὶ λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=16$, ἢ $\chi=25$· τῶν λύσεων τούτων μόνον ἡ πρώτη ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-\sqrt{\chi}=20$.

2ον) $\chi+\sqrt{\chi^2-5}=5$

γράφομεν $\sqrt{\chi^2-5}=5-\chi$·

ὅθεν $\chi^2-5=25-10\chi+\chi^2$

ἢ $10\chi=30$

καὶ $\chi=3$.

Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἑπομένως ἡ συζυγὴς αὐτῆς $\chi-\sqrt{\chi^2-5}=5$ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν.

3ον) $\chi-\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=1$

γράφομεν $\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=\chi-1$

ὅθεν $2\chi^2-8\chi+9=\chi^2-2\chi+1$

ἢ $\chi^2-6\chi+8=0$.

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε $\chi=2$ ἢ $\chi=4$, ἁρμόζουσι δὲ ἀμφότεραι εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἑπομένως ἡ συζυγὴς αὐτῆς

$$\chi+\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=1$$

οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

4ον) $$\chi+\sqrt{\chi^2-10\chi+1}=5$$

γράφομεν $$\sqrt{\chi^2-10\chi+1}=5-\chi$$

ὅθεν $$\chi^2-10\chi+1=25+\chi^2-10\chi$$

ἢ $$0=24.$$

ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ ἡ συζυγὴς αὐτῆς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

Καὶ περισσότερα ῥιζικὰ (δευτέρου βαθμοῦ) ἐξαφανίζονται διὰ τῆς ἀλληπαλλήλου ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

5ον) $$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9$$

ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\chi+\chi-9+2.\sqrt{\chi^2-9\chi}=81$$

ἤτοι $$2\chi-90=-2\sqrt{\chi^2-9\chi}$$

ἢ $$\chi-45=-\sqrt{\chi^2-9\chi} \qquad (1)$$

ὑψοῦντες δὲ καὶ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$\chi^2-90\chi+2025=\chi^2-9\chi$$

ὅθεν $$81\chi=2025, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi=25.$$

Ἡ ἐξίσωσις $81\chi=2025$ εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1) καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-45=\sqrt{\chi^2-9\chi}$· τούτων δὲ πάλιν ἡ μὲν (1) εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις

$$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9$$
$$-\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9.$$

ἡ δὲ συζυγὴς τῇ (1) εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὰς

$$\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9$$
$$-\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9$$

ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἄνευ ῥιζικῶν ἐξίσωσις $81\chi=2025$ εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὰς τέσσαρας ταύτας ἐξισώσεις (αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς δοθείσης λαμβανομένης ἑκάστης ῥίζης μετὰ τοῦ θετικοῦ ἢ μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου καθ' ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς συνδυασμούς).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις $\chi=25$ ἁρμόζει (ὡς εὐκόλως βλέπει τις) εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, συνάγεται, ὅτι αἱ λοιπαὶ τρεῖς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

ΣΗΜ. Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι ῥιζικὰ λύονται ἐνίοτε εὐκολώτερον διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ ἀγνώστου. Οὕτως ἡ πρώτη, ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi}=\omega$, ἀνάγεται εἰς τὴν $\omega^2+\omega=20$· ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν ἢ $\omega=4$, ἢ $\omega=5$· ἄρα $\chi=16$ ἢ $\chi=25$

Ἡ δὲ πέμπτη λύεται, ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi}=\omega$, καὶ $\sqrt{\chi-9}=\varphi$· διότι ἀνάγεται τότε εἰς τὸ σύστημα

$$\omega+\varphi=9 \text{ καὶ } \omega^2-\varphi^2=(\omega+\varphi)(\omega-\varphi)=9.$$

ὅθεν $$\omega+\varphi=9 \text{ καὶ } \omega-\varphi=1\cdot$$

ἄρα $$\omega=5,\ \varphi=4 \text{ καὶ ἑπομένως } \chi=25.$$

Ἡ ἀλλαγὴ αὕτη ὠφελεῖ μάλιστα, ὅταν ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν δὲν ὑπάρχῃ ἢ ἡ πρώτη δύναμις τοῦ ἀγνώστου.

Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

215. Οὕτω καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, αἱ ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου περιέχουσαι, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2=\gamma. \qquad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2=\omega$, ἕπεται καὶ $\chi^4=\omega^2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha\omega^2+\beta\omega=\gamma$, ἤτοι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον ω.

Εὑρεθεισῶν δὲ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ω ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τοῦ χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2=\omega$.

Ἔστωσαν ω' καὶ ω'' αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ω· τότε ἔχομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $\chi^2=\omega'$, ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{\omega'}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\chi^2=\omega''$, ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{\omega''}$· ὥστε εὑρίσκονται τέσσαρες ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1)

$$+\sqrt{\omega'},\ -\sqrt{\omega'},\ +\sqrt{\omega''},\ -\sqrt{\omega''}.$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον λύοντες τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^4-13\chi^2+36=0$$

εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας $+2,\ -2,\ +3.\ -3.$

Προβλήματα.

1ον) *Ἔμπορος πωλήσας πρᾶγμά τι ἀντὶ 16 δραχμῶν ἐζημιώθη τόσον τοῖς ἑκατόν, ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτό. Ζητεῖται ἀντὶ πόσων δραχμῶν εἶχεν ἀγοράσει τὸ πρᾶγμα.*

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἡ ζημία θὰ εἶνε $\chi-16$. Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα ἐζημιώθη τὸν τόκον τῶν χ δραχμῶν

πρὸς χ τοῖς ἑκατὸν (δι' ἓν ἔτος), ἤτοι $\frac{\chi^2}{100}$. Ὅθεν ἔσεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{\chi^2}{100}=\chi-16\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν λύοντες

$$\text{ἢ } \chi=80, \quad \text{ἢ } \chi=20\cdot$$

ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται πληροῦσι πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

29. *Ἠγόρασέ τις ὑφάσματα ἀντὶ 600 δραχμῶν. Εἰ δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἐλάμβανεν 20 πήχεις περισσότερον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως θὰ ἦτο κατὰ 5 δραχμὰς μικροτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;*

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων· ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως $\frac{600}{\chi}$· ἂν δὲ οἱ πήχεις ἦσαν χ—20, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς θὰ ἦτο $\frac{600}{\chi-20}$· ἄρα ἔσεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{600}{\chi}-\frac{600}{\chi-20}=5$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὰς λύσεις

$$\text{ἢ } \chi=[illegible] \quad \text{ἢ } \chi=-[illegible]$$

ἐκ τούτων ἡ πρώτη εἶναι παραδεκτὴ ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

30. *Ἐκ δύο κρουνῶν ὁ εἷς πληροῖ [illegible] ἡμέρας [illegible] ἄλλου. Ἐὰν δὲ [illegible] ὁ πρῶτος [illegible] ὅσας ὁ δεύτερος ἡμέρας [illegible] ὁ δεύτερος [illegible] ὅσας ὁ πρῶτος [illegible]. Πόσας ἡμέρας [illegible] ἕκαστος τῶν κρουνῶν*

[illegible] χ [illegible] ἡμέρας χ—[illegible] [illegible]

χ—[illegible] ἡμέρας [illegible]

εἶναι [illegible] ἡμέρας [illegible]

[illegible] ἡμέρας [illegible]

[illegible] χ—[illegible] ἡμέρας [illegible]

Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{90(\chi-3)}{\chi}+\frac{60\chi}{\chi-3}=147\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶνε ὁ χ θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ μεγαλήτερος τοῦ 3.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=15$, ἢ $\chi=18$· ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται πληροῦσι πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ἑπομένως, ἢ ὁ πρῶτος εἰργάσθη 15 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος 12, ἢ ὁ πρῶτος 18 καὶ ὁ δεύτερος 15.

4ον) *Ἔμπορος πωλήσας 8 πήχεις ὑφάσματος, ἔλαβε τόσας δραχμάς, ὅσους πήχεις ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ, ἵνα λάβῃ 50 δραχμάς· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν;*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔλαβε διὰ τοὺς 8 πήχεις, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶνε $\frac{\chi}{8}$· καὶ ἵνα λάβῃ 50 δραχμάς, ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ πήχεις $50:\frac{\chi}{8}$, ἤτοι $\frac{400}{\chi}$, εἶνε δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\chi=\frac{400}{\chi}, \text{ ἢ } \chi^2=400\cdot$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν λύοντες

$$\text{ἢ } \chi=20, \quad \text{ἢ } \chi=-20\cdot$$

φανερὸν δέ, ὅτι μόνον ἡ πρώτη λύσις εἶνε παραδεκτή.

5ον) *Ἐάν τις ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, ὁ κύβος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 721· τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος;*

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ εἶνε

$$(\chi+1)^3-\chi^3=721$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $(\chi+1)^3=\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$ (σελ. 35), ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος γίνεται $3\chi^2+3\chi+1=721$

$$\text{ἢ } \quad 3\chi^2+3\chi=720$$

$$\text{ὅθεν καὶ } \chi^2+\chi=240\cdot$$

λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν τὰς δύο λύσεις

$$\text{ἢ } \chi=15, \quad \text{ἢ } \chi=-16.$$

6ον) *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὰ τετράγωνα αὐτῶν νὰ διαφέρωσι κατὰ 120.*

Παριστῶντες τὰ ἄγνωστα μέρη διὰ χ καὶ ψ, θὰ ἔχωμεν

$$χ+ψ = 20$$
$$χ^2-ψ^2=120$$

ἐπειδὴ δὲ $χ^2-ψ^2$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $(χ+ψ)(χ-ψ)$, ἤτοι μὲ $20(χ-ψ)$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται $χ-ψ=6$, καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος γίνονται

$$χ+ψ=20$$
$$χ-ψ=6.$$

ἐξ ὧν προκύπτει ἡ λύσις $χ=13.\quad ψ=7.$

79. *Δύο ταχυδρόμοι ὁμαλῶς κινούμενοι ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν πορευόμενος ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Συνέβη δὲ ὁ μὲν πρῶτος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β ἐννέα ὥρας μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὴν Α δεκα ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον.*

Α Γ Β

Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἐκκινήσαντος καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β· ἔστω πρὸς τούτοις Γ τὸ σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΑΒ, εἰς ὃ ἐγένετο ἡ συνάντησις τῶν ταχυδρόμων. Ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ εἰς 9 ὥρας μὲ ταχύτητα χ· ἄρα εἶναι $ΓΒ=9χ$.

Ὁ δεύτερος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΑ εἰς 16 ὥρας μὲ ταχύτητα ψ· ἄρα εἶναι $ΓΑ=16ψ$.

Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως ἐξεκίνησαν καὶ συγχρόνως ἔφθασαν εἰς Γ, ἕπεται, ὅτι ὁ χρόνος, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ πρῶτος τὸ διάστημα ΑΓ, ὅστις εἶναι $\frac{ΑΓ}{χ}$ ἤτοι $\frac{16ψ}{χ}$, εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ δεύτερος τὸ διάστημα ΒΓ, ὅστις δὲ εἶναι $\frac{ΒΓ}{ψ}$ ἢ $\frac{9χ}{ψ}$, ὥστε ἔχομεν

$$\frac{16ψ}{χ}=\frac{9χ}{ψ}, \text{ ἤτοι } 16ψ^2=9χ^2$$

ἐξ ἧς κα. $$\frac{χ^2}{ψ^2}=\frac{16}{9}.$$

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\frac{χ}{ψ}=\frac{4}{3}.$$

τοῦτ' ἔστιν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶναι πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὅπως 4 πρὸς τὸν 3.

80. *Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ;*

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi+\psi=\alpha \qquad \chi\psi=\gamma. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ψ ληφθῇ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν, ἀπαλείφεται ὁ ψ καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi(\alpha-\chi)=\gamma$$

ἤτοι

$$\chi^2-\alpha\chi=-\gamma \qquad (2)$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}.$$

Ἂν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶνε ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε α· ἂν δὲ πάλιν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶνε ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$. ἑπομένως οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶνε οἱ

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \qquad (3)$$

τοῦτ' ἔστιν εἶνε αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

ΣΗΜ. Ὅτι αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχουσιν ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ, (ἑπομένως λύουσι τὸ πρόβλημα) ἦτο ἤδη γνωστὸν (211)· ὅτι ὅμως μόνον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λύουσι τὸ πρόβλημα, τοῦτο ἐδείχθη νῦν διὰ τῆς ἀμέσου λύσεως τοῦ προβλήματος.

Διερεύνησις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε πραγματικοί, ἐὰν τὸ $\alpha^2-4\gamma$ δὲν εἶνε ἀρνητικόν. Καὶ ἂν μὲν τὸ γ εἶνε ἀρνητικὸν (τοῦτ' ἔστιν οἱ ἀριθμοὶ ἑτεροειδεῖς) τὸ $\alpha^2-4\gamma$ εἶνε πάντοτε θετικόν· ἂν δὲ τὸ γ εἶνε θετικὸν (τοῦτ' ἔστιν οἱ ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς), δὲν πρέπει νὰ εἶνε ὁ 4γ μεγαλήτερος τοῦ α^2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ *γινόμενον δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν*, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, *ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν* (α) *μερίσωμεν ὁπωσδήποτε εἰς δύο ὁμοειδῆ μέρη, τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν μερῶν τούτων εἶνε ἴσον τῷ τετάρτῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Εὑρίσκεται δὲ τὸ μέγιστον τοῦτο γινόμενον, ὅταν μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς εἰς ἴσα μέρη*· διότι, ἐὰν ὑποτεθῇ $\gamma=\frac{\alpha^2}{4}$, οἱ τύποι (3) δίδουσι τὰ δύο μέρη $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2}$.

$$\chi+\psi=20$$
$$\chi^2-\psi^2=120\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ $\chi^2-\psi^2$ εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $(\chi+\psi)(\chi-\psi)$, ἤτοι μὲ $20(\chi-\psi)$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται $\chi-\psi=6$, καὶ αἱ ἐξισώσεις ' προβλήματος γίνονται

$$\chi+\psi=20$$
$$\chi-\psi=\ 6,$$

ἐξ ὧν προκύπτει ἡ λύσις $\chi=13,\quad \psi=7.$

7ον) *Δύο ταχυδρόμοι ὁμαλῶς κινούμενοι ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν πορευόμενος ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, ὁ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Συνέβη δὲ ὁ μὲν πρῶτος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πό Β ἐννέα ὥρας μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὴν Α δεκ ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον*

Α Γ Β

Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἐκκινήσαντος καὶ ψ ἡ χύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β· ἔστω πρὸς τούτοις Γ τὸ σημεῖον τῆς ἑ ΑΒ, εἰς ὃ ἐγένετο ἡ συνάντησις τῶν ταχυδρόμων. Ὁ πρῶτος ταχυδρ διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ εἰς 9 ὥρας μὲ ταχύτητα χ· ἄρα εἶνε ΓΒ=9

Ὁ δεύτερος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΑ εἰς 16 ὥρας μὲ ταχύτητα ψ· εἶνε $\Gamma A=16\psi$.

Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως ἐξεκίνησαν καὶ συγχρόνως ἔφθασαν εἰς Γ, ἕπεται, ὅτι ὁ χρόνος, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ πρῶτος τὸ διάστημα (ὅστις εἶνε $\frac{A\Gamma}{\chi}$ ἤτοι $\frac{16\psi}{\chi}$) εἶνε ἴσος μὲ τὸν χρόνον, ἐν ᾧ διήνυσ δεύτερος τὸ διάστημα ΒΓ (οὗτος δὲ εἶνε $\frac{B\Gamma}{\psi}$ ἢ $\frac{9\chi}{\psi}$), ὥστε ἔχ

$$\frac{16\psi}{\chi}=\frac{9\chi}{\psi},\ \text{ἤτοι}\ 16\psi^2=9\chi^2$$

ἐξ ἧς καὶ $$\frac{\chi^2}{\psi^2}=\frac{16}{9}.$$

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομ

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{4}{3},$$

τοῦτ' ἔστιν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶνε πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, ὅπως 4 πρὸς τὸν 3.

8ον) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐ α καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν γ.*

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi+\psi=\alpha \qquad \chi\psi=\gamma. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ψ ληφθῇ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν, ἀπαλείφεται ὁ ψ καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi(\alpha-\chi)=\gamma$$

ἤτοι

$$\chi^2-\alpha\chi=-\gamma \qquad (2)$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}.$$

Ἂν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶνε ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε α· ἂν δὲ πάλιν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶνε ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$. ἑπομένως οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶνε οἱ

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \qquad (3)$$

τοῦτ' ἔστιν εἶνε αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

ΣΗΜ. Ὅτι αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχουσιν ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ, (ἑπομένως λύουσι τὸ πρόβλημα) ἦτο ἤδη γνωστὸν (211)· ὅτι ὁμοίως μόνον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λύουσι τὸ πρόβλημα, τοῦτο ἐδείχθη νῦν διὰ τῆς ἀμέσου λύσεως τοῦ προβλήματος.

Διερεύνησις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε πραγματικοί, ἐὰν τὸ $\alpha^2-4\gamma$ δὲν εἶνε ἀρνητικόν. Καὶ ἂν μὲν τὸ γ εἶνε ἀρνητικὸν (τοῦτ' ἔστιν οἱ ἀριθμοὶ ἑτεροειδεῖς) τὸ $\alpha^2-4\gamma$ εἶνε πάντοτε θετικόν· ἂν δὲ τὸ γ εἶνε θετικὸν (τοῦτ' ἔστιν οἱ ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς), δὲν πρέπει νὰ εἶνε ὁ γ μεγαλήτερος τοῦ α^2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *τὸ γινόμενον δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν*, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, *ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν* (α) *μερίσωμεν ὁπωσδήποτε εἰς δύο ὁμοειδῆ μέρη, τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν μερῶν τούτων εἶνε ἴσον τῷ τετάρτῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Εὑρίσκεται δὲ τὸ μέγιστον τοῦτο γινόμενον, ὅταν μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς εἰς ἴσα μέρη*· διότι, ἐὰν ὑποτεθῇ $\gamma=\frac{\alpha^2}{4}$, οἱ τύποι (3) δίδουσι τὰ δύο μέρη $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2}$.

Καὶ γενικῶς. *Ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν μερίσωμεν εἰς ὁσαδήποτε εἰδῆ μέρη, τὸ γινόμενον τῶν μερῶν τούτων γίνεται μέγιστον ἐ(ὰν τὰ) μέρη γίνωσιν ἴσα.*

Διότι, ἂν δύο μέρη δὲν εἶνε ἴσα, ἔστωσαν λόγου χάριν 5 (καὶ 7), καθιστῶντες αὐτὰ ἴσα χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ἄθροισμά των, ἤτοι θέτοντες ἀντ' αὐτῶν τὰ 6, 6, εὑρίσκομεν γινόμενον 36, ὃ μεῖζον τοῦ 35. Ἄρα καὶ τὸ γινόμενον πάντων τῶν μερῶν θὰ γίνῃ μεῖζον.

9ον) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ γινομένου γ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν β.*

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi^2+\psi^2=\beta$$
$$\chi\psi=\gamma.$$

Ἐὰν ἡ δευτέρα διπλασιασθεῖσα προστεθῇ εἰς τὴν πρώτην κατὰ (μέλη,) προκύπτει $(\chi+\psi)^2=\beta+2\gamma$,
ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ, ἕπεται

$$(\chi-\psi)^2=\beta-2\gamma.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$\chi+\psi=\pm\sqrt{\beta+2\gamma},\quad \chi-\psi=\pm\sqrt{\beta-2\gamma}.$$

Καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ὑποτεθῇ θετι(κόν, εὑ)ρίσκομεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{2}\sqrt{\beta+2\gamma}+\frac{1}{2}\sqrt{\beta-2\gamma} \text{ καὶ } \frac{1}{2}\sqrt{\beta+2\gamma}-\frac{1}{2}\sqrt{\beta-2\gamma}$$

ἂν δὲ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὑποτεθῇ ἀρνητικόν, εὑρίσκονται οἱ ἀ(ντίθετοι) τούτων ἀριθμοί· φαίνεται δὲ καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήμα(τος) ὅτι, ἂν ἀληθεύωσιν αὗται διὰ δύο ἀριθμούς, ἀληθεύουσι καὶ διὰ (τοὺς ἀν)τιθέτους αὐτῶν.

Διερεύνησις. Ἀμφότεραι αἱ λύσεις θὰ εἶνε πραγματικαί, ἂν (οἱ ἀρι)θμοὶ β+2γ καὶ β−2γ εἶνε θετικοί, ἤτοι ἂν εἶνε β θετικὸν κα(ὶ 2γ) (θετικῶς λαμβανόμενος) δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν β.

10ον) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τῆς διαφορᾶς (αὐτῶν) α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν β.*

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi-\psi=\alpha$$
$$\chi^2+\psi^2=\beta.$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$\chi^2+\psi^2-2\chi\psi=\alpha^2$$

Ἐξ ἧς ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$2\chi\psi=\alpha^2-\beta, \quad \text{ἢ} \quad \chi\psi=\frac{\alpha^2-\beta}{2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ νῦν ἔχομεν $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\chi\psi=\frac{\alpha^2-\beta}{2}$, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ 8ον.

Δύναται δὲ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (1)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ἡ τιμὴ αὐτοῦ ἐκ τῆς πρώτης καὶ νὰ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν.

Οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶνε

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2}. \qquad (2)$$

Διερευνήσεις. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶνε πραγματικοί, ἂν εἶνε 2β θετικὸν καὶ μεγαλήτερον ἢ τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ α^2· εἰ δὲ μή, εἶνε μιγάδες.

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι, *ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶνε τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο μερῶν εὑρίσκεται, ἐὰν τὰ δύο μέρη εἶνε ἴσα.*

* 11ον) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων αὐτῶν κ.*

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi^3+\psi^3=\kappa. \qquad (1)$$

Ἵνα λύσωμεν ταύτας, ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸν κύβον· ὅτε εὑρίσκομεν

$$\chi^3+\psi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3.$$

Ἐξ ἧς ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, ἔχομεν

$$3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3-\kappa$$
$$\text{ἢ} \quad 3\chi\psi(\chi+\psi)=\alpha^3-\kappa$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ α ἔχομεν

$$3\alpha\chi\psi=\alpha^3-\kappa$$
$$\text{ἢ} \quad \chi\psi=\frac{\alpha^3-\kappa}{3\alpha}.$$

Ἔχομεν ἄρα τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν· ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ 8ον.

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa-\alpha^3}{3\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa-\alpha^3}{3\alpha}}.$$

Διερεύνησις. Γράφοντες τὴν ὑπόρριζον ποσότητα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{4\kappa}{3\alpha}-\frac{\alpha^2}{3}$$

βλέπομεν, ὅτι, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε πραγματικοί, ἀνάγκη τὸ α καὶ τὸ κ νὰ εἶνε ὁμόσημα καὶ νὰ εἶνε 4κ οὐχὶ μικρότερον τοῦ α³. Ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι, *ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶνε τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ κύβου τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν γίνεται, ὅταν τὰ δύο μέρη εἶνε ἴσα.*

*12ον *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν τ.*

Πρὸς τοῦτο εἶνε ἀνάγκη νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi-\psi=\alpha$$
$$\chi^4+\psi^4=\tau$$

λύεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Τετραγωνίζοντες τὴν πρώτην λαμβάνομεν

$$\chi^2+\psi^2-2\chi\psi=\alpha^2 \qquad (1)$$

τετραγωνίζοντες δὲ καὶ ταύτην εὑρίσκομεν

$$\chi^4+\psi^4+6\chi^2\psi^2-4\chi^3\psi-4\chi\psi^3=\alpha^4,$$

ἐξ ἧς ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν εὑρίσκομεν

$$6\chi^2\psi^2-4\chi\psi(\chi^2+\psi^2)=\alpha^4-\tau.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\chi^2+\psi^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\alpha^2+2\chi\psi$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), εὑρίσκομεν

$$\chi^2\psi^2-2\alpha^2\chi\psi=\frac{\tau-\alpha^4}{2}. \qquad (3)$$

περιέχει δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἕνα μόνον ἄγνωστον, τουτέστι τὸ γινόμενον χψ· ὅθεν λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον χψ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν· ἔχοντες δὲ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ 8ον.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) εὑρίσκονται αἱ ἑπόμεναι δύο τιμαὶ τοῦ χψ

$$\alpha^2-\sqrt{\frac{\alpha^4-\tau}{2}} \qquad \alpha^2+\sqrt{\frac{\alpha^4-\tau}{2}}$$

Καὶ ἂν μὲν λάβωμεν τὴν πρώτην ὡς γινόμενον τῶν δύο ζητουμένων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς δύο ἀριθμούς.

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\tau+8\alpha^4}}$$

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\tau+8\alpha^4}}$$

Ἂν δὲ τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν τοὺς ἐκ τούτων προκύπτοντας, ὅταν τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{8\tau+8\alpha^4}$ ληφθῇ μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου· ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο ζεῦγος εἶνε μιγάδες ἀριθμοί.

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη λύσις ἀποτελεῖται ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐὰν ἡ $\sqrt{8\tau+8\alpha^4}$ δὲν εἶνε μικροτέρα τοῦ $3\alpha^2$, ἤτοι, ἂν ὁ ἀριθμὸς $8\tau+8\alpha^4$ δὲν εἶνε μικρότερος τοῦ $9\alpha^4$· ἤτοι ἂν ὁ τ εἶνε θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ ὀγδόου τοῦ α^4· ἐξ ὧν συνάγεται, ὅτι, *ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν μερῶν εἶνε τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ὄγδοον τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ.*

*13ον) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πέμπτων δυνάμεων αὐτῶν π.*

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi+\psi=\alpha$$

$$\chi^5+\psi^5=\pi. \qquad (1)$$

Ἵνα λύσωμεν αὐτάς, ὑψοῦμεν τὴν πρώτην εἰς τὸν κύβον, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\chi^3+\psi^3+3\chi\psi(\chi+\psi)=\alpha^3 \cdot \qquad (2)$$

Ἔπειτα τὴν αὐτὴν πρώτην ὑψοῦμεν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν (ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, πολλαπλασιάζομεν τὴν (2) ἐπὶ τὴν πρώτην τετραγωνισθεῖσαν), ὅτε εὑρίσκομεν

$$\chi^5+\psi^5+5\chi\psi(\chi^3+\psi^3)+10\chi^2\psi^2(\chi+\psi)=\alpha^5.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\chi^5+\psi^5$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του π, τὸ δὲ ἄθροισμα $\chi^3+\psi^3$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\alpha^3-3\chi\psi(\chi+\psi)$ καὶ τέλος τὸ $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του α, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\chi\psi)^2-\alpha^2(\chi\psi)=\frac{\pi-\alpha^5}{5\alpha}. \qquad (3)$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ χψ εἶνε ἴσον πρὸς τὸν ἕτερον τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{\alpha^2}{2}-\sqrt{\frac{4\pi+\alpha^5}{20\alpha}}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha^2}{2}+\sqrt{\frac{4\pi+\alpha^5}{20\alpha}},$$

Καὶ ἂν μὲν λάβωμεν τὸν πρῶτον ὡς γινόμενον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2+2\sqrt{\frac{4\pi+\alpha^5}{5\alpha}}} \qquad (4)$$

ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν δεύτερον, εὑρίσκομεν τοὺς ἐκ τούτων προκύπτοντας, ὅταν ἡ ἐντὸς τῆς ἄλλης ῥίζα ληφθῇ μετὰ τοῦ σημείου —· ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο ζεῦγος εἶνε μιγάδες ἀριθμοί.

Διερεύνησις Οἱ δύο ἀριθμοὶ (4), οἱ τὴν πρώτην λύσιν ἀποτελοῦντες, θὰ εἶνε πραγματικοί, ἂν τὸ ὑπόρριζον $\frac{4\pi+\alpha^5}{5\alpha}$ εἶνε θετικὸν καὶ ἡ ῥίζα οὐχὶ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τοῦ α^2· τουτέστιν ἂν εἶνε

$$2\sqrt{\frac{4\pi+\alpha^5}{5\alpha}} \geqq \alpha^2, \quad \text{ἤτοι} \quad 4.\frac{4\pi+\alpha^5}{5\alpha} \geqq \alpha^4.$$

ὅθεν ἕπεται $$\frac{16\pi}{5\alpha}+\frac{4\alpha^4}{5} \geqq \alpha^4, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\pi}{\alpha} \geqq \frac{\alpha^4}{16},$$

τουτέστιν, ἵνα τὸ πρόβλημα ἐπιδέχηται πραγματικήν τινα λύσιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε π καὶ α ὁμοειδῆ καὶ ὁ π νὰ εἶνε τοὐλάχιστον ἴσος πρὸς τὸ δέκατον ἕκτον τοῦ α^5. Θὰ ἀποτελῆται δὲ ἡ λύσις ἐξ ὁμοειδῶν ἀριθμῶν, ἂν τὸ γινόμενον χψ εἶνε θετικόν, τουτέστιν ἂν εἶνε

$$\frac{\alpha^4}{4} > \frac{4\pi+\alpha^5}{20}, \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha^4 > \frac{\pi}{\alpha}.$$

ἤτοι ἂν ὁ π δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ α.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων προβλημάτων βλέπομεν, ὅτι καὶ ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ δύνανται ἐνίοτε νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Προβλήματα γεωμετρικά.

Ἐν τῇ γεωμετρίᾳ ἐμάθομεν ἤδη, ὅτι πᾶσα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπό τινος ἀριθμοῦ καὶ τἀνάπαλιν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς παριστᾷ γραμμήν, ὅταν ὁρισθῇ ἡ γραμμή, ἣν παριστᾷ ἡ μονάς. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν ἐπὶ γεωμετρικῶν προβλημάτων.

14ον) *Διαιρέσαι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τουτέστιν εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ εἶνε μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.*

A M B

Ἔστω α ὁ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν AB παριστῶν ἀριθμὸς καὶ χ ὁ παριστῶν τὸ ἄγνωστον μέρος αὐτῆς AM, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε μέσον ἀνάλογον· τότε τὸ λοιπὸν μέρος MB θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha-\chi$. Θὰ εἶνε δὲ

$$\alpha:\chi=\chi:\alpha-\chi, \text{ ἤτοι } (\alpha-\chi)\alpha=\chi^2.$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶνε καὶ χ θετικὸν καὶ μικρότερον τοῦ α.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$· ἐκ δὲ τούτων τῶν τιμῶν μόνη ἡ πρώτη, ἡ $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$, πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου μέρους AM.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ προταθῇ καὶ γενικώτερον ὡς ἑξῆς·

Ἐπὶ εὐθείας ἀπεράντου δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B, ὧν ἡ ἀπόστασις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α· ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τῆς εὐθείας τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ A ἀπόστασις αὐτοῦ νὰ εἶνε μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ B καὶ τῆς AB.

M A M B M

Τὸ ζητούμενον σημεῖον M δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον, ἢ μεταξὺ τοῦ A καὶ B, ἢ ὄπισθεν τοῦ A, ἢ πέραν τοῦ B. Τὸ πρόβλημα ἄρα διαιρεῖται εἰς τρία· καὶ αἱ τρεῖς αὐτοῦ περιπτώσεις δίδουσι τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις· (χ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν AM).

Ἡ πρώτη	$\chi^2=\alpha(\alpha-\chi)$	περιορ. $0<\chi<\alpha$.
Ἡ δευτέρα	$\chi^2=\alpha(\alpha+\chi)$	περιορ. χ θετικόν.
Ἡ τρίτη	$\chi^2=\alpha(\chi-\alpha)$	περιορ. $\chi>\alpha$.

Αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς μίαν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ οἱ μετροῦντες τὰς ἀπὸ τοῦ A ἀποστάσεις λαμβάνωνται θετικοὶ μὲν διὰ τὰ ἔμπροσθεν τοῦ A σημεῖα, ἀρνητικοὶ δὲ διὰ τὰ ὄπισθεν· διότι τότε ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει πρέπει νὰ γραφῇ ἀντὶ τοῦ χ ὁ $-\chi$· τοῦτο δὲ τρέπει αὐτὴν εἰς τὴν πρώτην· ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἀρνητικὴ λύσις τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε θετικὴ λύσις τῆς δευτέρας, καὶ ἑπομένως δίδει σημεῖόν τι ὄπισθεν τοῦ A κείμενον καὶ πληροῦν τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Ἡ τρίτη ἐξίσωσις οὐδεμίαν λύσιν πραγματικὴν ἔχει· ὥστε οὐδὲν σημεῖον τοιοῦτον ὑπάρχει πέραν τοῦ B.

15ον) *Δίδονται ἐπ' εὐθείας τέσσαρα σημεῖα, τὰ A, B, Γ, Δ, καὶ ζη-*

τεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τεσσάρων σημείων νὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν τουτέστι νὰ εἶνε ΑΜ:ΒΜ=ΓΜ:ΔΜ.

Α Β Γ Δ

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον, ἢ ὄπισθεν τοῦ Α, ἢ μεταξὺ Α καὶ Β, ἢ μεταξὺ Β καὶ Γ, ἢ μεταξὺ Γ καὶ Δ, ἢ τέλος πέραν τοῦ Δ· τὸ πρόβλημα ἄρα διαιρεῖται εἰς πέντε, καὶ ἂν οἱ θετικοὶ ἀριθμοί, οἱ τὰς ἀποστάσεις ΑΜ, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ μετροῦντες, παρασταθῶσι κατὰ σειρὰν διὰ χ, β, γ, δ, αἱ ῥηθεῖσαι πέντε ὑποθέσεις δίδουσι τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις

ἡ 1η $\chi(\beta+\gamma-\delta)+\beta.\gamma=0$ περ. $\chi>0$,

ἡ 2α $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma=0$, περ. $0<\chi<\beta$,

ἡ 3η $\chi(\beta+\gamma-\delta)-\beta\gamma=0$, περ. $\beta<\chi<\gamma$,

ἡ 4η $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma=0$, περ. $\gamma<\chi<\delta$,

ἡ 5η $\chi(\beta+\gamma-\delta)-\beta\gamma=0$, περ. $\chi>\delta$.

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη περίπτωσις ἐπιδέχεται λύσιν, ἂν εἶνε $\delta>\beta+\gamma$· διότι τότε ἡ τιμὴ τοῦ χ ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως λαμβανομένη εἶνε θετική· ἀλλ' ἂν εἶνε $\delta<\beta+\gamma$, ἢ $\delta=\beta+\gamma$, ἡ πρώτη περίπτωσις εἶνε ἀδύνατος.

Ἡ τρίτη περίπτωσις εἶνε πάντοτε ἀδύνατος· διότι ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρισκομένη τιμὴ τοῦ χ δὲν εἶνε μικροτέρα τοῦ γ.

Ἡ πέμπτη περίπτωσις ἐπιδέχεται λύσιν, μόνον ἂν εἶνε $\delta<\beta+\gamma$· διότι τότε ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ καὶ ὑπερβαίνει τὸν δ.

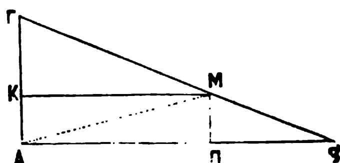
Ἡ δευτέρα καὶ ἡ τετάρτη ἐπιδέχονται ἀνὰ μίαν λύσιν πάντοτε· διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ῥίζας, ὧν ἡ μὲν κεῖται μεταξὺ 0 καὶ β, ἡ δὲ μεταξὺ γ καὶ δ· βεβαιούμεθα δὲ περὶ τούτου· ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ β ἀντικαθιστῶντες τὸ χ ἐν τῷ πολυωνύμῳ $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma$ παρέχουσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ· ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ γ καὶ δ (σελ. 156 Παρατηρ.)

Ὥστε ἐν συνόλῳ τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τρεῖς λύσεις, ἂν δ καὶ β+γ εἶνε ἄνισα, εἰ δὲ μή, δύο· εὑρίσκεται δὲ τὸ ἓν ἐκ τῶν τριῶν σημείων τόσῳ μακρύτερα ἐπὶ τῆς εὐθείας, ὅσῳ ὀλιγώτερον διαφέρουσι τὰ β+γ καὶ δ.

Παρατήρησις. Ἐνίοτε πρόβλημά τι, ἵνα λυθῇ, διαιρεῖται εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων παρέχει ἰδίαν ἐξίσωσιν· (τοιαῦτα ἦσαν τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα)· ἑκάστη τῶν περιπτώσεων τούτων θεωρεῖται τότε καὶ ἐξετάζεται ὡς ἴδιον πρόβλημα.

Δυνατὸν δὲ δύο περιπτώσεις τοῦ προβλήματος νὰ ἀποκλείωσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ἀληθευούσης τῆς ἑτέρας ἐξ αὐτῶν νὰ εἶνε ἡ ἑτέρα ἀδύνατος καὶ τἀνάπαλιν, τὸ ἀδύνατον τῆς ἑτέρας νὰ δεικνύῃ τὴν ἀλήθειαν τῆς ἄλλης. Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται ἔν τινι προβλήματι νὰ ὁρισθῇ ἐν ἐπιπέδῳ ἡ θέσις εὐθείας τινὸς ἀγνώστου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κειμένην, δύνανται νὰ γίνωσι δύο ὑποθέσεις ἀποκλείουσαι ἀλλήλας, ἢ ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τέμνει που τὴν δοθεῖσαν, ἢ ὅτι εἶνε παράλληλοι· φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι, ἂν ἡ ἐξίσωσις, τὴν ὁποίαν ἡ πρώτη ὑπόθεσις παρέχει, ἀληθεύῃ, ἡ δευτέρα ὑπόθεσις εἶνε ἀδύνατος· ἂν δὲ ἡ ληφθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ἀδύνατος, ἡ δευτέρα ὑπόθεσις ἀληθεύει.

16ον) *Εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον περίμετρον ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τοῦ τριγώνου πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἰς τὸ Α.*



Ἕκαστον σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ εἶνε κορυφὴ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου, ὅπερ εὑρίσκομεν ἄγοντες ἐξ αὐτοῦ τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α· διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κορυφὴν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Ἔστωσαν β καὶ γ οἱ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ παριστῶντες ἀριθμοί, χ δὲ καὶ ψ οἱ παριστῶντες τὰς ἀποστάσεις τοῦ ζητουμένου σημείου Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ.

Ἐν πρώτοις θὰ εἶνε $2\chi+2\psi=\beta+\gamma.$

Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΑΜ, διαιρεῖ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον ἔχει βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΜΠ, τὸ δὲ δεύτερον ἔχει βάσιν ΑΓ καὶ ὕψος ΜΚ. Ἐκφράζοντες δέ, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἀποτελοῦσι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τριγώνου, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\beta\chi+\gamma\psi=\beta\gamma. \qquad (2)$$

περιορ. $0<\chi<\gamma$ καὶ $0<\psi<\beta.$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ὑποθέτοντες β ἄνισον τῷ γ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1}{2}\gamma \quad \text{καὶ} \quad \psi=\frac{1}{2}\beta\cdot$$

τοῦτ' ἔστιν ἡ κορυφὴ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης,

Ἐὰν ὅμως εἶνε $\beta=\gamma$, ἤτοι ἂν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶνε καὶ ἰσοσκελές, αἱ δύο ἐξισώσεις καταντῶσι μία μόνη καὶ τὸ σύστημα ἀποβαίνει ἀόριστον· ὥστε πᾶν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης εἶνε κορυφὴ ὀρθογωνίου πληροῦντος τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

17ον) *Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αὐξάνεται μὲν ἡ πλευρὰ ΑΓ κατά τινα εὐθεῖαν ΓΓ', ἐλαττοῦται δὲ ἡ ΑΒ κατὰ τὴν ἴσην ΒΒ'· ζητεῖται, ἂν ἀχθῇ ἡ Β'Γ', εἰς ποῖον σημεῖον θὰ τέμνῃ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.*

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΜΠ καὶ ΜΚ ἐκ τοῦ Μ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἂς νοηθῶσιν αἱ εὐθεῖαι τοῦ σχήματος πᾶσαι μεμετρημέναι καὶ ὑπ' ἀριθμῶν παριστώμεναι. Ἡ τομὴ Μ θὰ εἶνε γνωστή, ὅταν εὑρεθῶσιν οἱ τὰς ἀποστάσεις ΜΠ καὶ ΚΜ μετροῦντες ἀριθμοί, οἵτινες ἔστωσαν ψ καὶ χ· πρὸς τούτοις ἂς παριστᾷ τὰς εὐθείας ΒΒ' καὶ ΓΓ' ὁ ε, καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου οἱ ἀριθμοὶ α (τὴν ΒΓ), β (τὴν ΑΓ) καὶ γ (τὴν ΑΒ). Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΜ, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο, τὰ ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ· ὡσαύτως διαιρεῖ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἰς δύο, τὰ ΑΜΒ' καὶ ΑΜΓ'. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι

$$\beta\chi+\gamma\psi=\beta\gamma \qquad (1)$$

καὶ

$$(\beta+\varepsilon)\chi+(\gamma-\varepsilon)\psi=(\beta+\varepsilon)(\gamma-\varepsilon).$$

Ἐξ ὧν ἕπεται τὸ σύστημα

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\beta\chi+\gamma\psi=\beta.\gamma \\ &\varepsilon(\chi-\psi)=\varepsilon(\gamma-\beta-\varepsilon) \end{aligned} \qquad \text{περιορ.} \quad \begin{aligned} &0<\chi<\gamma \\ &0<\psi<\beta. \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου, ἂν ὑποτεθῇ ε διάφορον τοῦ 0, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος ε ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως

$$\chi=\frac{\gamma^2-\varepsilon\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad \psi=\frac{\beta^2+\varepsilon\beta}{\beta+\gamma}. \qquad (3)$$

Ἐὰν ὁ ε ἐλαττούμενος καταντήσῃ 0, αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1), ἢ καὶ τοῦ (2), γίνονται μία μόνη καὶ τὸ σύστημα καταντᾷ ἀόριστον· ἀλλὰ τότε καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσι καὶ ἔχουσι κοινὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ πρόβλημα καταντᾷ ἀόριστον.

Δυνατὸν ὅμως νὰ ζητηθῇ, πρὸς ποῖον σημεῖον τῆς ΒΓ πλησιάζει ἡ τομὴ **Μ**, ὅταν ἡ Β'Γ' πλησιάζῃ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τοῦτο εὑρίσκεται ἐκ τῶν τιμῶν (3) εὐκόλως· διότι, ὅσῳ τὸ ε πλησιάζει πρὸς τὸ 0, τόσῳ

μαι τῶν χ καὶ ψ πλησιάζουσι νὰ γίνωσι

$$\chi=\frac{\gamma^2}{\beta+\gamma}, \qquad \psi=\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}.$$

ι καὶ ἡ τομὴ πλησιάζει πρὸς τὸ σημεῖον, οὗ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν καὶ ΑΓ μετροῦνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ὁ σημεῖον τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς ἄλλας πλευράς· ὥστε δύναται καὶ γεωμετρικῶς νὰ εὑρεθῇ.

8ον) *Ἐκ τοῦ στομίου φρέατος ἀφέθη λίθος εἰς αὐτό· ἠκούσθη δὲ ὁ ιος τοῦ λίθου (κτυπήσαντος τὸν πυθμένα) μετὰ παρέλευσιν θ δευον λεπτῶν ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς πτώσεως. Ζητεῖται τὸ βάθος τοῦ ατος.*

Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τοὺς ἑποους νόμους τῆς φυσικῆς.

1) Ἐὰν σῶμα, ἀπό τινος ὕψους ἀφεθέν, πίπτῃ ἐπὶ χ δεύτερα λεπτά, διανυσθὲν ὑπ' αὐτοῦ διάστημα εἶνε

$$\frac{1}{2}\gamma\chi^2, \text{ ἔνθα } \gamma=9,\ 8088 \text{ μέτρα·}$$

οῦ ἀέρος ἀντίστασις δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

2) Ὁ ἦχος διαδίδεται μεθ' ὁμαλῆς κινήσεως διανύων ἐν τῷ ἀέρι 340 ίπου μέτρα καθ' ἕκαστον δεύτερον λεπτόν. Τὴν ταχύτητα ταύτην τοῦ υ θὰ παραστήσωμεν χάριν συντομίας διὰ τοῦ τ.

Ἔστω νῦν φ τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἰς μέτρα· φανερὸν εἶνε, ὅτι ὁ μεθεὶς χρόνος θ συνίσταται ἐκ δύο μερῶν, ἐκ τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως λίθου μέχρι τοῦ πυθμένος καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, ὃν ἐχρειάσθη ὁ ἦχος, φθάσῃ ἐκ τοῦ πυθμένος μέχρι τοῦ στομίου.

Καὶ ὁ μὲν χρόνος τῆς πτώσεως τοῦ λίθου ἐκ τοῦ ὕψους φ εὑρίσκεται ιὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκ τοῦ τύπου

$$\varphi=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\chi^2. \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \chi=+\sqrt{\frac{2\varphi}{\gamma}}.$$

ὁ χρόνος τῆς ἀναβάσεως τοῦ ἤχου, ἂν παρασταθῇ διὰ χ' θὰ εἶνε

$$\varphi=\tau.\chi'$$

τι φ εἶνε τὸ διανυσθὲν ὑπ' αὐτοῦ διάστημα· ἐπομένως εἶνε

$$\chi'=\frac{\varphi}{\tau}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\text{(1)} \qquad \frac{\varphi}{\tau}+\sqrt{\frac{2\varphi}{\gamma}}=\theta.$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἀπαλλασσομένη τῆς τετραγ. ῥίζης (214) γίνεται

$$\varphi^2-2\tau\left(\theta+\frac{\tau}{\gamma}\right)\varphi=-\theta^2\tau^2.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἔχει δύο ῥίζας ἀμφοτέρας θετικὰς (212).

εἶνε δὲ αὗται $\varphi=\tau\left(\theta+\frac{\tau}{\gamma}\right)\pm\tau\sqrt{\frac{\tau}{\gamma}\left(\frac{\tau}{\gamma}+2\theta\right)}$.

Ἡ μία ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ φ εἶνε προφανῶς μεγαλητέρα τοῦ τ… μένως καθιστᾷ τὸ $\frac{\varphi}{\tau}$ μεγαλήτερον τοῦ θ καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶνε… τῆς ἐξισώσεως (1), ἀλλὰ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς· ἡ δὲ ἄλλη εἶνε μικ… τοῦ τθ· διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο ῥιζῶν (211) εἶνε τθ. τθ· ἐπ… δὲν δύνανται ἀμφότεραι νὰ εἶνε μεγαλήτεραι τοῦ τθ· ἡ δευτέρα λύσις εἶνε τῆς ἐξισώσεως (1)· διότι δι' αὐτὴν εἶνε τὸ $\theta-\frac{\tau}{\varphi}$ θ… ἐπομένως αὕτη λύει τὸ πρόβλημα.

19ον) *Ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ δύο φωτεινῶν ση… A καὶ B εὑρεῖν σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν.*

A B

Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸ… μενον φυσικὸν νόμον.

Τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται ἐπιφάνειά τις, εἶνε ἀντιστ… ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τοῦ φα… σημείου.

Κατὰ τὸν νόμον τοῦτον, ἂν παραστήσωμεν διὰ μ τὸ ποσὸν τ… τός, ὅπερ δέχεται ἐπιφάνειά τις ἐκ φωτεινοῦ σημείου, ὅταν εὑρί… εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς μέτρου ἀπ' αὐτοῦ, καὶ διὰ ω τὸ ποσὸν τοῦ… ὅπερ δέχεται ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια, ὅταν εὑρίσκηται εἰς ἀπόστασιν χ μ… θὰ εἶνε

$$\omega:\mu=1:\chi^2,\qquad \text{ἤτοι}\quad \omega=\frac{\mu}{\chi^2}.$$

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον ἢ ὄπισθ… Α, ἢ μεταξὺ Α καὶ Β, ἢ πέραν τοῦ Β. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ… ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α, καὶ διὰ τοῦ α^2 τὸ ποσὸν τοῦ φωτ… δέχεται ἐκ τοῦ Α τὸ τὴν ἀπόστασιν 1 ἀπέχον ἀπ' αὐτοῦ σημεῖ… διὰ β^2 τὸ ὅμοιον ποσὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Β, πρὸς δὲ τούτοι…

ἡν ἀπόστασιν AB, εὑρίσκομεν κατὰ τὰς τρεῖς εἰρημένας ὑποθέσεις, ἐξισοῦντες τὰ ποσὰ τοῦ φωτός, τὰ ὁποῖα δέχεται τὸ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον σημεῖον·

1ʸ) $$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta+\chi)^2} \qquad \chi>0$$

2ᵃ καὶ 3ʸ) $$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-\chi)^2} \qquad \chi>0$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς μίαν, ἂν αἱ ἀποστάσεις τῶν ὄπισθεν τοῦ A κειμένων σημείων παριστῶνται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, διότι τότε ἐν τῇ πρώτῃ πρέπει νὰ τεθῇ $-\chi$ ἀντὶ τοῦ χ· (διότι ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκείνῃ τὸ χ σημαίνει τὴν θετικὴν ἀπόστασιν AM, αὕτη δὲ εἶνε νῦν $-\chi$)· ἀλλὰ τότε τρέπεται ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἰς τὴν δευτέραν· ἑπομένως ὡς ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ ληφθῇ ἡ ἑπομένη

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-\chi)^2} \qquad (1)$$

καὶ ἂν μὲν εἶνε $\chi<0$, τὸ σημεῖον κεῖται ὄπισθεν τοῦ A· ἂν δὲ $0<\chi<\delta$, μεταξὺ A καὶ B· ἂν δὲ $\chi>\delta$, τὸ σημεῖον κεῖται πέραν τοῦ B.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον· ἐπειδὴ ὅμως ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἶνε τέλεια τετράγωνα, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτῶν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰς πρὸς αὐτὴν ἰσοδυνάμους δύο ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha}{\chi}=+\frac{\beta}{\delta-\chi}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\alpha}{\chi}=-\frac{\beta}{\delta-\chi}.$$

ἐξ ὧν εὐκολώτατα λαμβάνομεν τὰς λύσεις

$$\chi=\delta.\frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \qquad \text{ἢ} \qquad \chi=\delta.\frac{\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη τῶν λύσεων τούτων εἶνε πάντοτε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ δ· διότι τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ ὁ δ πολλαπλασιάζεται, εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος· ἑπομένως ὑπάρχει πάντοτε μεταξὺ τῶν φωτεινῶν σημείων A καὶ B σημεῖόν τι ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν· τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε τὸ μέσον τῆς AB, ἂν τὰ φῶτα εἶνε ἴσα τὴν δύναμιν, ἤτοι ἂν εἶνε $\alpha=\beta$· εἰ δὲ μή, εἶνε πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον· καὶ τῷ ὄντι, ἂν εἶνε $\alpha>\beta$, εἶνε καὶ $2\alpha>\alpha+\beta$· καὶ διὰ τοῦτο τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζεται ὁ δ, εἶνε μεγαλήτερον τοῦ $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ἤτοι τοῦ $\frac{1}{2}$, ὥστε $\chi>\frac{1}{2}\delta$· ἂν δὲ εἶνε $\alpha<\beta$, θὰ εἶνε καὶ

$2\alpha < \alpha + \beta$· καὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$· ὥστε θὰ εἶνε $\chi < \frac{1}{2}\delta$.

Ἡ δευτέρα λύσις ὑπάρχει, μόνον ὅταν τὰ φῶτα εἶνε ἄνισα τὴν δύναμιν· (διότι, ἂν ὑποτεθῇ $\alpha = \beta$, ἡ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἐλήφθη, γίνεται $\alpha\delta = 0$ καὶ ὁ ἄγνωστος δὲν ὁρίζεται). Καὶ ἂν μὲν ὑποτεθῇ $\beta > \alpha$, ἡ λύσις εἶνε ἀρνητική, ἤτοι ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὄπισθεν τοῦ Α· ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha > \beta$, ἡ λύσις εἶνε θετικὴ καὶ μεγαλητέρα τοῦ δ· διότι τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ ὁ δ πολλαπλασιάζεται, ὑπερβαίνει τὴν μονάδα· ἑπομένως ὑπάρχει τότε σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πέραν τοῦ Β· ὥστε ἐν συνόλῳ ὑπάρχει (πλὴν τοῦ μεταξὺ τῶν δύο φώτων κειμένου σημείου) καὶ δεύτερον σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον· κεῖται δὲ καὶ τοῦτο πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἀσθενεστέρου φωτός.

Ἐὰν τὰ φῶτα, ἄνισα ὄντα τὴν δύναμιν, τείνωσι νὰ καταστῶσιν ἴσα, ἡ δευτέρα λύσις δίδει τιμὴν τοῦ χ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανομένην καὶ δυναμένην νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν, τοῦτ' ἔστι τὸ σημεῖον, τὸ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον, τὸ ἐκτὸς τῆς ΑΒ ὑπάρχον, ἀπομακρύνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀπὸ τῶν φωτεινῶν σημείων καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τούτων δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶσαν δοθεῖσαν ἀπόστασιν· ἀπέχει δὲ ἀπ' αὐτῶν τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ ὀλιγώτερον διαφέρουσι τὰ φῶτα ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν φώτων, ἔστω τὸ Β, γίνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀσθενέστερον, ἀμφότερα τὰ ἐξ ἴσου φωτιζόμενα σημεῖα πλησιάζουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο Β. Διότι, ὅσῳ μικρότερον γίνεται τὸ β, τόσῳ πλησιάζουσιν αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἀμφότεραι πρὸς τὸ δ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ δύο δοθέντων α καὶ β, ἵνα τὰ τετράγωνα αὐτῶν γίνωσιν ἴσα;

(Ἀπ. ὁ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$· ἀλλ' ἐὰν εἶνε $\alpha = \beta$, πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ προτεινόμενον).

2) Δοθέντων δύο ὀρθογωνίων ζητεῖται νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῶν κατά τινα (τὴν αὐτὴν πᾶσαι) γραμμήν, ὥστε νὰ γίνωσιν ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν.

('Εὰν τὰ ὀρθογώνια εἶνε ἰσοπερίμετρα ἀλλ' ἄνισα, τὸ προτεινόμενον νὰ ἀδύνατον· ἐὰν δὲ εἶνε ἴσα, ἀόριστον).

3) Δοθέντων δύο τριγώνων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ πρώτου κατά τινα γραμμὴν καὶ αἱ τοῦ δευτέρου κατ' ἄλλην, ὥστε νὰ γίνωσιν ὅμοια.

Τὸ πρόβλημα εἶνε ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

4) Δοθέντος ὀρθογωνίου νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ κατά τινα γραμμὴν, ὥστε τὸ ἐμβαδόν του νὰ γίνῃ τὸ ἥμισυ ἢ πρότερον.

('Απ. 'Εὰν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ἔχωσι μήκη α, β, τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, καθ' ἣν πρέπει νὰ ἐλαττωθῶσιν, εἶνε $\chi=\frac{\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$).

5) Κλάσματος ὑψοῦνται ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προκύπτει νέον κλάσμα· ζητεῖται, τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τῶν ὅρων τοῦ νέου κλάσματος, ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ ἀρχικῷ.

6) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἐλαττούμενος κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, γίνεται ἴσος τῷ 1406. ('Απ. 1444).

7) 1320 δραχμαὶ διενεμήθησαν εἰς τινας ἀνθρώπους· ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν κατὰ ἕνα ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 10 δραχμὰς περισσοτέρας· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι; ('Απ. 12).

8) 'Επληρώθησαν 96 δραχμαὶ εἰς 14 ἐργάτας, ἄνδρας καὶ γυναῖκας· ἔλαβε δὲ ἕκαστος ἀνὴρ τόσας δραχμάς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας δραχμάς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; ('Απ. 6 καὶ 8).

9) Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ λόγος αὐτῆς εἶνε 2, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων 260.

10) Δύο ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς α ὥρας· ἐὰν ὅμως ἑκάτερος ἐξετέλει διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, θὰ ἐχρειάζοντο β ὧραι πρὸς ἀποπεράτωσιν αὐτοῦ. Ζητεῖται, εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος ἤθελεν ἐκτελέσει μόνος τὸ ἔργον.

11) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

12) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα 12, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς νὰ διαφέρῃ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μονάδα.

('Απ. 'Εὰν τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου εἶνε μεγαλήτερον, ἡ λύσις

εἶνε 5 καὶ 7 ἢ —29 καὶ 41· ἐὰν δὲ μικρότερον, ἡ λύσις εἶνε $-12\pm\sqrt{287}$ καὶ $24\mp\sqrt{287}$).

13) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις εἴτε διὰ 7, εἴτε διὰ 9 διαιρεθῇ, νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα πολλαπλασιαζόμενα νὰ δίδωσι τὸν ἀριθμὸν 28.

14) Τίς ἀριθμὸς ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων γινομένου δὲν βλάπτει αὐτό; καὶ τίς ἐν γινομένῳ τριῶν παραγόντων ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα;

15) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$(\chi+\psi)(\chi^2+\psi^2)=\alpha$$
$$(\chi-\psi)(\chi^2-\psi^2)=\beta.$$

16) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi-\sqrt{\chi}}{\chi+\sqrt{\chi}}=\frac{5}{6}.$$

17) Πότε ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$\frac{A'\chi^2+B'\chi+\Gamma'}{A\chi^2+B\chi+\Gamma}$$

εἶνε ἡ αὐτὴ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ;

$\left(\text{Ἀπ. Ὅταν εἶνε } \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)$.

*18) Σφαῖρα κοίλη ἐκ χυτοῦ σιδήρου, ἔχει βάρος α χιλιογράμμων· τεθεῖσα δὲ ἐν τῷ ὕδατι ἐπιπλέει μένοντος τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς ἐκτὸς τοῦ ὕδατος· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ πάχος αὐτῆς.

19) Ἁμαξοστοιχία τις ἀπεμακρύνετο ἀπό τινος φρουρίου κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ ταχύτητα 45 σταδίων καθ' ὥραν, ὅτε οἱ ἐν αὐτῇ εὑρισκόμενοι εἶδον τὴν λάμψιν ἐκπυρσοκροτήσεως καὶ μετὰ 15″ ἤκουσαν τὸν κρότον αὐτῆς. Πόσον ἀπεῖχον ἀπὸ τοῦ φρουρίου τὴν στιγμήν, καθ' ἣν εἶδον τὴν λάμψιν;

$\left(\text{Ἀπ. } 4912\frac{1}{2} \text{ μέτρα}\right)$.

20) Οἱ ἐν τῇ αὐτῇ ἁμαξοστοιχίᾳ εὑρισκόμενοι ἤκουσαν δύο κανονιοβολισμοὺς ἐκ τοῦ φρουρίου τὸν ἕνα 5 πρῶτα λεπτὰ μετὰ τὸν ἄλλον. Ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας ἦτο 10 στάδια καθ' ὥραν. Ζητεῖται ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἐκπυρσοκροτήσεων μεσολαβήσας χρόνος.

$\left(\text{Ἀπ. } 4', 45''\frac{5}{17}\right)$.

Τέλος παραθέτομεν καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα ἐκ τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

21) Εὑρεῖν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2+\psi^2=\omega^2. \quad (1)$$

Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ λύσιν τινὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀποτελοῦντες, ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, καὶ τὰ πηλίκα αὐτῶν διαιρουμένων διὰ δ, ἐπαληθεύουσι τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι λύσεις, ὧν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, πρῶτοι ὄντες πρὸς ἀλλήλους, ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν, εἷς ἐκ τῶν χ καὶ ψ εἶνε ἄρτιος, οἱ δὲ δύο ἄλλοι εἶνε περιττοὶ (ὅτι καὶ οἱ τρεῖς δὲν δύνανται νὰ εἶνε περιττοί, εἶνε φανερόν)· διότι, ἂν ἦσαν δύο ἄρτιοι καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου θὰ ἦτο ἄρτιον· ἄρα καὶ ὁ τρίτος ἄρτιος· καὶ θὰ εἶχον οἱ τρεῖς κοινὸν διαιρέτην τὸν 2· ἀλλ' ὁ ω πρέπει νὰ εἶνε περιττός· διότι ἂν ἦτο ἄρτιος, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ω^2, ἢ $\chi^2+\psi^2$, θὰ διῃρεῖτο διὰ 4· τὸ ἄθροισμα ὅμως $\chi^2+\psi^2$, τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ διαιρεῖται μόνον διὰ 2 καὶ οὐχὶ διὰ 4· διότι ἂν ὁ εἷς εἶνε $2\mu+1$ καὶ ὁ ἄλλος $2\nu+1$, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε

$$4(\mu^2+\nu^2+\mu+\nu)+2\cdot$$

ὥστε ὁ ω εἶνε περιττός.

Ἔστω ἄρτιος ὁ χ· καὶ ἂς τεθῇ $\chi=2\chi'$· τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$4\chi'^2=\omega^2-\psi^2.$$

ἢ

$$\chi'^2=\frac{1}{2}(\omega+\psi).\frac{1}{2}(\omega-\psi). \quad (2)$$

Οἱ δύο ἀκέραιοι $\frac{1}{2}(\omega+\psi)$ καὶ $\frac{1}{2}(\omega-\psi)$ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην· διότι ἂν ἀριθμός τις πρῶτος διῄρει αὐτούς, θὰ διῄρει καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ω καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ψ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν χ'^2· ἑπομένως καὶ αὐτὸν τὸν χ'· ὥστε θὰ εἶχον οἱ τρεῖς χ, ψ, ω κοινὸν διαιρέτην· ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους τότε μόνον εἶνε τετράγωνον, ὅταν ἑκάτερος αὐτῶν εἶνε τετράγωνος, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶνε

$$\frac{1}{2}(\omega+\psi)=\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{2}(\omega-\psi)=\beta^2.$$

Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τεθῶσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), προκύπτει $\chi'=\alpha\beta$· ὅθεν ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ζητούμεναι λύσεις περιέχονται εἰς τοὺς τύπους

[illegible]

3 [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

Η [illegible] 3. [illegible] 5 [illegible] τῶν [illegible] 3. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] αὐτοῦ [illegible]

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

Α΄) ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

216. Σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λέγεται, ὅτι ἀποτελεῖ *πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ κατὰ διαφοράν*· τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ

5, 7, 9, 11, 13, 15,..

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Τοιοῦτοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ

19, 16, 13, 10, 7,..

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ τοῦ ἀριθμοῦ —3.

Οἱ πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι* τῆς προόδου, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἕκαστον παράγει τὸν ἑπόμενον, λέγεται ***λόγος*** τῆς προόδου.

Ἡ πρόοδος λέγεται *αὔξουσα*, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν αὐξανόμενοι· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ὁ λόγος αὐτῆς εἶνε θετικὸς ἀριθμός· τοιαύτη ἡ πρόοδος 3, 7, 11, 15,.. *Φθίνουσα* δὲ λέγεται ἡ πρόοδος, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν ἐλαττούμενοι· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ὁ λόγος εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός· τοιαύτη ἡ πρόοδος 21, 16, 11, 6,...

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν τῇ προόδῳ.

217. *Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ αὐξηθέντι κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.*

Διότι, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ διὰ τοῦ τ ὁ νος, διὰ δὲ τοῦ ω ὁ λόγος, θὰ εἶνε

πρῶτος ὅρος	α
δεύτερος	$\alpha+\omega$
τρίτος	$\alpha+2\omega$
τέταρτος	$\alpha+3\omega$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

2. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν προηγουμένως ἀποδειχθεῖσαν ἰδιότητα τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἀθροίσματα εἶνε πάντα ἴσα ἀλλήλοις, εἶνε δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀθροισμάτων τούτων ν (ὅσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου), ἕπεται

$$2K=(\alpha+\tau)\nu$$

ἐξ οὗ καὶ
$$K=\frac{\nu(\alpha+\tau)}{2}. \qquad (2)$$

τοῦτ' ἔστι

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐκφράζων ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἐὰν π. χ. ζητῆται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000, θὰ εἶναι $\nu=1000$, $\alpha=1$ καὶ $\tau=1000$, ἄρα $K=1001.500=500500$.

219. Δυνατὸν νὰ δοθῶσιν, ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου καὶ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, νὰ ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων· τότε εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸν τελευταῖον ὅρον ἐκ τοῦ τύπου (1) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2).

ΣΗΜ. Οἱ πέντε ἀριθμοὶ α, τ, ν, ω καὶ K, οἵτινες θεωροῦνται ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ, συνδέονται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega, \qquad K=\frac{\nu(\alpha+\tau)}{2}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, δοθέντων τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, οἱ λοιποὶ δύο πρέπει νὰ προσδιορίζωνται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων, ἐν αἷς περιέχονται ὡς ἄγνωστοι.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ πέντε πραγμάτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ δύο κατὰ δέκα διαφόρους τρόπους, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων δέκα διάφορα προβλήματα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν. (Ἀπ. $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$).

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς. (Ἀπ. ν^2).

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ν.

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$

τεθῇ κατὰ σειρὰν $x=1, 2, 3, \ldots \nu$, καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες, εὑρίσκεται ἡ ἰσότης

$$(\nu+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+3+\ldots+\nu)+\nu$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $$1+2+3+\ldots+\nu=\frac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται

$$(\nu+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+\frac{3}{2}\nu(\nu+1)+\nu$$

ἐξ ἧς $$3(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)=(\nu+1)^3-\frac{3}{2}\nu(\nu+1)-\nu-1$$

καὶ $$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1.\ 2.\ 3.}$$

4 Ἀποδεῖξαι ὅτι εἶνε

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3=(1+2+3+4+\ldots+\nu)^2.$$

5 Θέλων τις νὰ ἀνορύξῃ φρέαρ, συνεφώνησε μετὰ τοῦ ἐργάτου ἑξῆς· Διὰ τὴν πρώτην ὀργυιὰν τοῦ βάθους νὰ πληρώσῃ 5 δραχμάς, τὴν δευτέραν 10, διὰ τὴν τρίτην 15· καὶ οὕτω καθεξῆς διὰ ἑκάστην ἑπομένην ὀργυιὰν 5 δραχμὰς περισσότερον. Τὸ ὕδωρ εὑρέθη εἰς βάθος ὀργυιῶν. Πόσον θὰ πληρώσῃ; Ἀπ. 55[illegible]

6) Δύο ἀριθμητικῶν προόδων δοθεισῶν, εὑρεῖν τοὺς κοινοὺς αὐτῶν ὅρους.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθησαν αἱ ἑξῆς πρόοδοι:

10 13 16....λόγος 3
8 15 22....λόγος 7.

Ὁ τυχὼν ὅρος τῆς πρώτης ὁ ἔχων τὴν τάξιν τ εἶνε $10+3(\tau-1)$, ὁ δὲ τυχὼν ὅρος τῆς δευτέρας, ὁ ἔχων τὴν τάξιν υ, θὰ εἶνε

$$8+7(\upsilon-1)$$

ὅταν δὲ οἱ ὅροι οὗτοι εἶνε ἴσοι, οἱ ἀκέραιοι τ καὶ υ συνδέονται διὰ ἰσότητος $$10+3(\tau-1)=8+7(\upsilon-1)$$

ἢ $$3\tau-7\upsilon=-6.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀκεραίας λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος [illegible] δίδονται δὲ αὗται ὑπὸ τῶν ἑξῆς τύπων

$$\tau=-2+7\omega$$
$$\upsilon=3\omega$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν ὑποθέτοντες $\omega=1,\ 2,\ 3\ldots$

$$\tau=5,\quad 12,\quad 19,\quad 26,\quad 33,\quad 40\ldots$$
$$\upsilon=3,\quad 6,\quad 9,\quad 12,\quad 15,\quad 18\ldots$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶνε ἴσοι ὁ 5ος ὅρος τῆς α' καὶ ὁ 3ος τῆς β', ὁ 12ος τῆς α' καὶ ὁ 6ος τῆς β', ὁ 19ος τῆς α' καὶ ὁ 9ος τῆς β', καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ περισσοτέρων ἀριθμητικῶν προόδων τοὺς κοινοὺς ὅρους.

Β'.) ΠΡΟΟΔΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ

220. Σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λέγεται, ὅτι ἀποτελεῖ πρόοδον *γεωμετρικὴν* ἢ *κατὰ πηλίκον*· τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64\ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

Τοιοῦτοι καὶ οἱ ἀριθμοί

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32}\ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{2}$.

Οἱ πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι* τῆς προόδου, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων ἕκαστον ὅρον παράγει τὸν ἑπόμενον, λέγεται *λόγος* τῆς προόδου.

Ἡ πρόοδος εἶνε *αὔξουσα*, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν αὐξανόμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα· *φθίνουσα* δέ, ἐὰν οἱ ὅροι προβαίνωσιν ἐλαττούμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος.

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

221. *Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων.*

Διότι, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου καὶ διὰ τοῦ τ ὁ νός, διὰ δὲ τοῦ ω ὁ λόγος, θὰ εἶνε

πρῶτος ὅρος	α
δεύτερος	$\alpha\omega$
τρίτος	$\alpha\omega^2$
τέταρτος	$\alpha\omega^3$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὥστε ὁ ὅρος τ ὁ τὴν νὴν τάξιν κατέχων καὶ τοῦ ὁποίου προηγοῦνται ν—1 ἄλλοι ὅροι, θὰ εἶνε

(1) $$\tau=\alpha.\omega^{\nu-1}.$$

Ἐφαρμογαί.

Εὑρεῖν τὸν $20^{ὸν}$ ὅρον τῆς προόδου

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \ldots \quad \text{λόγος } 2.$$

Ἐπειδὴ τοῦ εἰκοστοῦ ὅρου προηγοῦνται 19 ἄλλοι, ὁ ὅρος οὗτος ἰσ
ται τῷ $1.(2)^{19}$, ἤτοι τῷ 524288.

Εὑρεῖν τὸν $30^{ὸν}$ ὅρον τῆς προόδου

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \ldots \quad \text{λόγος } \frac{1}{2}.$$

Ἐπειδὴ προηγοῦνται αὐτοῦ 29 ὅροι, θὰ εἶνε ἴσος τῷ

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)^{29}, \text{ ἤτοι τῷ } \frac{1}{2^{29}}, \text{ ἢ } \frac{1}{536870912}.$$

Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

222. Ἂς ἀποτελῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \ldots \quad \rho \quad \sigma \quad \tau$$

γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἂς παρασταθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ το
ἤτοι ἔστω $\quad K=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau \quad$ (α

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸν λ
τῆς προόδου ω, εὑρίσκομεν

$$K\omega=\alpha\omega+\beta\omega+\gamma\omega+\ldots+\rho\omega+\sigma\omega+\tau\omega.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\alpha\omega=\beta$, $\beta\omega=\gamma, \ldots \rho\omega=\sigma$, $\sigma\omega=\tau$, ἡ δευτέρα ἰσ
δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$K\omega=\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau+\tau\omega.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν δύο ἴσων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα (α), εὑρίσκομεν

$$K\omega-K=\tau\omega-\alpha$$

ἢ

$$K(\omega-1)=\tau\omega-\alpha$$

καί, ἂν ω διαφέρῃ τῆς μονάδος 1,

$$K=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1},$$

τουτέστι· *τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης γεωμετρικῆς προόδου εὑρί
ται, ἂν ὁ τελευταῖος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον καὶ ἀπὸ τοῦ γ
μένου ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεθῇ διὰ τοῦ
γου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.*

Ἐπειδὴ ὁ τύπος (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$K=\tau+\frac{\tau-\alpha}{\omega-1}$$

συνάγομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσ

ται τῷ τελευταίῳ ὅρῳ ηὐξημένῳ κατὰ τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὴν διαφορὰν τῶν ἄκρων διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ λόγου ἀπὸ τῆς μονάδος.

Ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶνε ἴσος τῇ μονάδι 1, ἡ ἐξίσωσις (β) δὲν δίδει τὸ ἄθροισμα Κ· διότι γίνεται $0=0$· ἀλλὰ τότε τὸ ἄθροισμα Κ εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς προόδου· διότι πάντες οἱ ὅροι εἶνε ἴσοι· ὥστε ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶνε ν, θὰ εἶνε $Κ=ν.α.$

Δυνατὸν νὰ δοθῶσιν, ὁ πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, νὰ ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων· τότε εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τελευταῖον ὅρον ἐκ τοῦ τύπου (1) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2), ὅτε εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$Κ=\frac{α(ω^ν-1)}{ω-1}. \qquad (3)$$

ΣΗΜ. Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν· τῷόντι κατὰ τὰ δεδομένα οἱ προσθετέοι ὅροι εἶνε

$$α+αω+αω^2+..+αω^{ν-1}$$

ἢ

$$α(1+ω+ω^2+..+ω^{ν-1}),$$

ἀλλὰ τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ἄθροισμα εὑρίσκεται ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$\frac{ω^ν-1}{ω-1}.$$

ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ

$$\frac{α(ω^ν-1)}{ω-1}.$$

Θεωρήματα περὶ τῶν φθινουσῶν γεωμετρικῶν προόδων, αἵτινες ἔχουσιν ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

223. *Ἐὰν ἐκ τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου*

$$α \quad αω \quad αω^2 \quad αω^3 \ldots \qquad (ω<1)$$

ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε (εἴτε κατὰ σειρὰν εἴτε καὶ μή), *τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων εἶνε πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος.*

Ἂς ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ὅροι καὶ ἐκ τῶν ληφθέντων ἔστω ὁ τὴν μεγίστην τάξιν κατέχων ὁ $αω^μ$· τότε πάντες οἱ ληφθέντες εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν ὅρων $α \quad αω \quad αω^2 \quad αω^3 \ldots. \ αω^μ$

καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἑξῆς

$$α+αω+αω^2+αω^3+..+αω^μ$$

τοῦτο δέ, ἐὰν διὰ τοῦ τ παρασταθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος, εἶνε

$$\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1} \text{ ἢ } \frac{\alpha-\tau\omega}{1-\omega} \text{ ἢ } \frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\tau\omega}{1-\omega},$$

ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶνε μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$· ὥστε, ὁσουςδήπ
ὅρους τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἂν προσθέσωμεν, πάντ
εὑρίσκομεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

224. *Δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, εὑρίσκεται ὅρος φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου μικρότερος αὐτοῦ (ὡς καὶ πάντες ἑπόμενοι).*

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ε· ἂν πάντες οἱ ὅροι τῆς προόδου ἦσαν μεί λήτεροι τοῦ ε, θὰ ἦτο δυνατόν, λαμβάνοντες ἱκανοὺς τὸ πλῆθος προσθέτοντες, νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα ὑπερβαῖνον πάντα ἀριθμόν· διότι ὁ ε πολλάκις ἐπαναλαμβανόμενος γίνεται μείζων παντὸς ἀριθμοῦ· ἀ τοῦτο δὲν συμβαίνει· ἑπομένως ὑπάρχει τις ὅρος μικρότερος τοῦ δοθέν ἀριθμοῦ καὶ πάντες δὲ οἱ ἑπόμενοι αὐτοῦ εἶνε ὡσαύτως μικρότεροι δοθέντος ἀριθμοῦ.

225. *Ἐὰν λαμβάνωμεν τοὺς ὅρους τῆς φθινούσης προόδου κ σειρὰν ἀπ' ἀρχῆς καὶ προσθέτωμεν, ὅσον περισσοτέρους ὅρους λαμ νομεν, τόσον προσεγγίζομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν* $\frac{\alpha}{1-\omega}$· *καί, δοθέντος ἀ θμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τόσους ὅρους προόδου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων νὰ διαφέρῃ τοῦ* $\frac{}{1-}$ *διαφορὰν μικροτέραν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.*

Καὶ ὄντως, τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς φθινούσης προό
α β γ.... (ἂν ὁ λόγος αὐτῆς παρασταθῇ διὰ τοῦ ω)

εἶνε $$\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\omega\tau}{1-\omega}$$

καὶ διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ κατὰ $\frac{\omega\tau}{1-\omega}$· ἀλλ' ἡ διαφορὰ
τη εἶνε γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν ὁ μὲν εἷς $\frac{\omega}{1-\omega}$ μένει μόνιμ
ὁ δὲ ἕτερος εἶνε ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος, ὅστις κατὰ
ἀποδειχθέντα γίνεται μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ἑπομέν

καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\omega}{1-\omega}$, τοῦτ' ἔστιν ἡ θεωρουμένη διαφορά, γίνεται μικρότερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες, ὅτι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{1-\omega}$,

ἤτοι *τὸν πρῶτον ὅρον διαιρεθέντα διὰ τῆς μονάδος ἠλαττωμένης κατὰ τὸν λόγον.*

Ἐφαρμογαί.

1) Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots\dots$$

ἰσοῦται τῷ $$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$ ἤτοι τῷ 2.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{A^2}+\frac{1}{A^3}+\dots\dots\dots \qquad A>1$$

εἶνε $$\frac{1}{A-1}.$$

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν δυνάμεων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta>\alpha)$

ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3+\dots\dots$ $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)$.

4) Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου· διότι ἔστω τὸ κλάσμα

$$0{,}52525252\dots\dots$$

τοῦτο εἶνε $$\frac{52}{100}+\frac{52}{100^2}+\frac{52}{100^3}+\dots$$

καὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τούτων τῶν κλασμάτων εἶνε κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\frac{\frac{52}{100}}{1-\frac{1}{100}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{52}{99},$$

ὅπερ καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς εἶνε γνωστόν.

5) Εἰς δοθὲν τετράγωνον ἐγγράφομεν ἄλλο τετράγωνον συνάπτοντες

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

τὰ τὸ διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}\tau'$ (διότι τ' εἶνε ἡ ταχύτης του)· ὥστε μετὰ

σιν χρόνου $\frac{\alpha}{\tau}$ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κινητῶν θὰ εἶνε $\alpha.\frac{\tau'}{\tau}$· ἀνάγ-

ιν τὸ Α νὰ διανύσῃ καὶ τὸ διάστημα τοῦτο (ἵνα φθάσῃ τὸ Β)· καὶ

ῦτο χρειάζεται δεύτερον χρονικὸν διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau}$.

τῷ δευτέρῳ τούτῳ χρονικῷ διαστήματι τὸ κινητὸν Β θὰ προχω-

τὰ τὴν ἀπόστασιν $\frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau}\tau'$· ἤτοι $\alpha\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$· τόση λοιπὸν θὰ

πόστασις τῶν δύο κινητῶν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρονικοῦ

ατος· ἀνάγκη ἄρα τὸ Α νὰ διανύσῃ καὶ τὴν ἀπόστασιν ταύτην καὶ

ῦτο χρειάζεται τρίτον χρονικὸν διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}.\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$.

ιολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τὸ Α φθάσῃ τὸ

ζεται ἄπειρα τὸ πλῆθος χρονικὰ διαστήματα, τὰ ἑξῆς

$$\frac{\alpha}{\tau},\ \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right),\ \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2,\ \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^3,\ldots$$

πει ὅμως ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν (*), ὅτι τὸ Α οὐδέποτε

ῃ τὸ Β· διότι τὰ ἀπειροπληθῆ ταῦτα χρονικὰ διαστήματα συνα-

σι χρονικόν τι διάστημα πεπερασμένον. Καὶ ὄντως τὰ χρονικὰ

ιαστήματα εἶνε ὅροι μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου· ἄρα

λον αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸν χρόνον

$$\frac{\frac{\alpha}{\tau}}{1-\frac{\tau'}{\tau}}\quad \text{ἤτοι}\quad \frac{\alpha}{\tau-\tau'}\quad \text{(παράβαλε ἐδ. 147)}$$

λος τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν θὰ εἶνε 0.

ὰν τις διπλασιάζῃ κατ' ἔτος τὴν περιουσίαν του καὶ ἀρχίσῃ ἀπὸ

ν, πόσα λεπτὰ θὰ ἔχῃ μετὰ 40 ἔτη;

('Απ. 2^{40} λεπτά, ἤτοι 10 995 116 277 δρ., 76).

(*) Οὕτως συνεπέραινον οἱ ἀρχαῖοι σοφισταὶ καὶ ἀπεδείκνυον, ὅτι ὁ ὠκύπους Ἀχιλ- ἠδύνατο νὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὐδὲ ἂν ἓν μόνον βῆμα ὑπελείπετο αὐτῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

[illegible]

Ἄς ὑποθέσωμεν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας θέματα, ὁ μὲν εἰς τὸ 3, ὁ δὲ ἄλλος τὸ 8· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχῃ θέμα ἢ τὸ 11 ἢ τὸ 12.

Διότι ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει 4 ψηφία (ἀκέραια), ὁ δὲ δεύτερος 9· ἄρα τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχῃ ψηφία ἢ 12 ἢ 13 καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔχῃ θέμα ἢ τὸ 11 (ἂν ἔχῃ 12 ψηφία) ἢ τὸ 12 (ἂν ἔχῃ 13 ψηφία).

Παραδείγματα.

θεμ (185)=2	θεμ (87)=1
θεμ (3974)=3	θεμ (542)=2
θεμ. γινομένου 735190=3	θεμ. γινομένου 47154=4

229. *Τὸ θέμα παντὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖ τὰς δεκάδας εἰς τὸ θέμα τῆς δεκάτης δυνάμεως αὐτοῦ.*

Ἔστω ἀριθμός τις α ἔχων θέμα 3· λέγω, ὅτι τὸ θέμα τοῦ α^{10} θὰ ἔχῃ 3 δεκάδας, ἤτοι θὰ εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν

30 31 32 33 34 35 36 37 38 39.

Διότι τὸ θέμα τοῦ γινομένου α.α, ἤτοι τοῦ α^2, θὰ εἶνε ἢ 6 ἢ 6+1, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

θεμ $(\alpha^2)=6+\varepsilon_1$ ἔνθα ε_1 εἶνε ἢ 0 ἢ 1.

Καὶ τὸ θέμα τοῦ γινομένου $\alpha^2.\alpha$, ἤτοι τοῦ α^3, θὰ εἶνε ἢ $9+\varepsilon_1$ ἢ $9+\varepsilon_1+1$· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

θεμ $(\alpha^3)=9+\varepsilon_1+\varepsilon_2$ ἔνθα ε_2 εἶνε ἢ 0 ἢ 1.

Καὶ τὸ θέμα τοῦ γινομένου $\alpha^3.\alpha$, ἤτοι τοῦ α^4, θὰ εἶνε ἢ $12+\varepsilon_1+\varepsilon_2$ ἢ $12+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1$· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

θεμ $(\alpha^4)=12+\varepsilon_1+_2+\varepsilon_3$ ἔνθα ε_3 εἶνε ἢ 0 ἢ 1.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι εἶνε

θεμ $(\alpha^{10})=3.10+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_9$

ἔνθα ἕκαστον τῶν ε_1, ε_2, ... ε_9 εἶνε ἢ 0 ἢ 1.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ θέμα τοῦ α^{10} δὲν εἶνε μικρότερον τοῦ 30 οὐδὲ μεγαλήτερον τοῦ 39· ἄρα θὰ εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν

30, 31, 32,.......39.

Ἐκ τούτου συνάγεται τὸ ἑξῆς.

Ἔστω ἀριθμός τις θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ὁ α· ἐὰν ὑψώσωμεν αὐτὸν κατὰ σειρὰν εἰς τὰς δυνάμεις

α^1 α^{10} α^{100} α^{1000} α^{10000} .....

ἑκάστη ἐκ τούτων εἶνε δεκάτη δύναμις τῆς προηγουμένης αὐτῇ (ἐδ. 71)· ἑπομένως τὸ θέμα ἑκάστης ἐξ αὐτῶν θὰ ἀποτελῇ τὰς δεκάδας εἰς τὸ θέμα τῆς ἑπομένης.

Παραδείγματος χάριν εἶνε θέμα τοῦ (11) $= 1$
θέμα τοῦ $11^{10} = 10$
θέμα τοῦ $11^{100} = 104$
θέμα τοῦ $11^{1000} = 1041$

Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων.

230. *Λογάριθμος* ἀριθμοῦ τινος α λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἰ ἀκέραιον μὲν μέρος τὸ θέμα τοῦ α, δέκατα δὲ ἐν συνόλῳ τὸ θέμα $α^{10}$, ἑκατοστὰ δὲ τὸ θέμα τοῦ $α^{100}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· τοῦτ' ἔστι ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἐν συνόλῳ τόσας μονάδας ἑκάστης δεκαδικῆς τάξι ὅσας ἔχει τὸ θέμα τῆς ὁμωνύμου δυνάμεως τοῦ α.

Παραδείγματος χάριν ὁ λογάριθμος τοῦ 11

ἔχει 1	ἀκέραιον, ἢ εἶνε	1,...	διότι θεμ (11) $=1$
ἔχει 10	δέκατα, ἤτοι εἶνε	1,0 ..	διότι θεμ $(11^{10}) =10$
ἔχει 104	ἑκατοστά, ἤτοι εἶνε	1,04...	διότι θεμ $(11^{100}) =104$
ἔχει 1041	χιλιοστά, ἤτοι εἶνε	1,041...	διότι θεμ $(11^{1000})=1041$

. . . .

Ὁ λογάριθμος τοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου λογ α· εἶνι ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμός, διότι πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ εἶνε ὡρισμ

231. *Τῆς μονάδος 1 λογάριθμος εἶνε τὸ 0, καὶ τοῦ 10 ἡ μονι*

Ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις τοῦ 1 εἶνε πάντοτε 1 καὶ ἔχει διὰ τοῦτο θ 0, ἕπεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶνε 0, ἤτοι λογ $1=0$.

Ἐπειδὴ δὲ πάλιν εἶνε θέμα τοῦ 10 $=1$
θέμα τοῦ $10^{10} =10$
θέμα τοῦ $10^{100}=100$

. . . .

ἕπεται λογ $10=1,000 ...... =1$.

Παραδείγματα.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ψηφίων τοῦ λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ δὲν ἀνάγκη νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ μόνον τὸ π θος τῶν ψηφίων αὐτῶν· τοῦτο δὲ εἶνε ἁπλούστερον, ὡς δεικνύουσι ἑπόμενα παραδείγματα. (Οἱ ἐν παρενθέσει κλειόμενοι ἀριθμοὶ σημ νουσι πλῆθος μηδενικῶν, ὡς 11(2) σημαίνει 1100, 13(5) σημα 1300000, κτλ.

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 2 παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε $2^{10}=1024$·
ὥστε 2^{10} περιέχεται μεταξὺ 10^{3} καὶ 11(2)

Ἑπομένως $2^{20}=(2^{10})^2$	περιέχεται	μεταξὺ	10^6	καὶ	13(5)
$2^{40}=(2^{20})^2$	»	»	10^{12}	»	17(11)
$2^{80}=(2^{40})^2$	»	»	10^{24}	»	29(23)
$2^{100}=2^{80}.2^{20}$	»	»	10^{30}	»	38(29).

Ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι ἡ ἑκατοστὴ δύναμις τοῦ 2 ἔχει 31 ψηφία·
ε εἶνε λογ. 2=0,30......

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 3 παρατηροῦμεν ὡσαύτως, ὅτι

3^{10}	περιέχεται	μεταξὺ	59(3)	καὶ	6(4)
3^{20}	»	»	34(8)	»	36(8)
3^{40}	»	»	11(18)	»	13(18)
3^{80}	»	»	12(37)	»	17(37)
3^{100}	»	»	40(46)	»	52(46)

ι ἡ ἑκατοστὴ δύναμις τοῦ 3 ἔχει 48 ψηφία καὶ ἑπομένως εἶνε
λογ. 3=0,47..

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 7 παρατηροῦμεν ὁμοίως, ὅτι

	7^5	περιέχεται	μεταξὺ	168(2)	καὶ	169(2)
ὥστε	7^{10}	»	»	28(7)	»	29(7)
	7^{20}	»	»	78(15)	»	85(15)
	7^{40}	»	»	60(32)	»	73(32)
	7^{80}	»	»	36(66)	»	54(66)
	7^{100}	»	»	28(83)	»	46(83)·

ε ἡ ἑκατοστὴ δύναμις τοῦ 7 ἔχει 85 ψηφία· καὶ ἑπομένως εἶνε
λογ. 7=0,84...

Ἐὰν θέλωμεν περισσότερα ψηφία τοῦ λογαρίθμου, ἀνάγκη νὰ διατη-
ιεν ἐν τοῖς πολλαπλασιασμοῖς περισσότερα σημαντικὰ ψηφία.

Ἐὰν π. χ. πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 2 μέχρι τῶν χιλιο-
ὶν, ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς $2^{10}=1024$

2^{20}	περιέχεται	μεταξὺ	1048(3)	καὶ	105(4)
2^{40}	»	»	1099(9)	»	112(10)
2^{80}	»	»	1207(21)	»	124(22)
2^{100}	»	»	1264(27)	»	131(28)
2^{200}	»	»	1597(57)	»	172(58)
2^{400}	»	»	255(118)	»	296(118)
2^{800}	»	»	65(239)	»	88(239)
2^{1000}	»	»	10(300)	»	16(300)

ε ἡ χιλιοστὴ δύναμις τοῦ 2 ἔχει 302 ψηφία, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε
λογ. 2=0,301.....

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

232. Οἱ λογάριθμοι ἔχουσι τὴν ἑπομένην ἀρχικὴν ἰδιότητα.

Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Τοῦτ' ἔστιν εἶνε λογ. (αβ)=(λογ.α)+(λογ.β).

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὰ εἰς τοὺς λογαρίθμους τούτους περιεχόμενα χιλιοστά· κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἕκαστος τῶν τριῶν τούτων λογαρίθμων ἔχει τόσα χιλιοστά, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ θέμα τῆς χιλιοστῆς δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ, οὗτινος εἶνε λογάριθμος· ἑπομένως εἶνε (ἐὰν πρὸς συντομίαν τεθῇ τ=1000)

$$\text{λογ. } \alpha = \frac{\text{θεμ. } (\alpha^{\tau})}{1000} + \varepsilon$$

$$\text{λογ. } \beta = \frac{\text{θεμ. } (\beta^{\tau})}{1000} + \eta$$

$$\text{λογ. } (\alpha\beta) = \frac{\text{θεμ. } (\alpha\beta)^{\tau}}{1000} + \theta$$

ἔνθα ἕκαστος τῶν τριῶν ἀριθμῶν ε, η, θ, εἶνε μικρότερος ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε θεμ. $(\alpha\beta)^{\tau}$=θεμ.$(\alpha^{\tau}\beta^{\tau})$=θεμ.$(\alpha^{\tau})$+θεμ.$(\beta^{\tau})$+ι (ἔνθα ι=ἢ 0, ἢ 1), ἡ τελευταία ἰσότης γίνεται

$$\text{λογ. } (\alpha\beta) = \frac{\text{θεμ. } (\alpha^{\tau})}{1000} + \frac{\text{θεμ. } (\beta^{\tau})}{1000} + \theta + \frac{\iota}{1000}$$

ἀθροίζοντες δὲ τὰς δύο πρώτας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{λογ. } (\alpha) + \text{λογ. } (\beta) = \frac{\text{θεμ. } (\alpha^{\tau})}{1000} + \frac{\text{θεμ. } (\beta^{\tau})}{1000} + \varepsilon + \eta.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἂν τὸ ἄθροισμα λογ. α+λογ. β διαφέρῃ ἀπὸ τοῦ λογ. (αβ), ἡ διαφορὰ θὰ εἶνε μικροτέρα τῶν δύο χιλιοστῶν.

Ὁμοίως θεωροῦντες τὰ εἰς τοὺς τρεῖς λογαρίθμους περιεχόμενα ἑκατομμυριοστά, δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶνε μικροτέρα τῶν δύο ἑκατομμυριοστῶν.

Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν παραβαλλομένων ἀριθμῶν εἶνε μικροτέρα δύο μονάδων οἱασδήποτε δεκαδικῆς τάξεως, συμπεραίνομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι οὐδεμίαν ἔχουσι διαφοράν, ἤτοι εἶνε ἴσοι.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐκτείνεται ἐπὶ ὁσωνδήποτε παραγόντων.

Καὶ ὄντως εἶνε α.β.γ=(αβ).γ

ὅθεν λογ. (αβγ)=λογ. (αβ)+λογ. γ=λογ. α+λογ. β+λογ. γ.

Ομοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἐπὶ περισσοτέρων.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$λογ\ 100 = λογ\ 10^2 = 2$$

$$λογ\ 1000 = λογ\ 10^3 = 3$$

$$\text{καὶ γενικῶς } λογ\ 10^ρ = ρ.$$

233. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ταύτης ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων ὁρμώμενοι δυνάμεθα νὰ ἐκτείνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἐπὶ πάντων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν τῷ ὄντι θέλωμεν νὰ ἔχωσι πάντες οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ λογάριθμον, νὰ διατηρῆται δὲ ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν λογαρίθμων, ἀνάγκη νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως τοὺς λογαρίθμους τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν.

Ἔστω α θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος· τότε $\frac{1}{α}$ εἶνε ἀριθμὸς μεγαλήτερος τῆς μονάδος· ἔχομεν δὲ κατὰ τὴν παραδεδεγμένην γενικὴν ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων

$$λογ\left(α.\frac{1}{α}\right) = λογ\ α + λογ\frac{1}{α} = λογ.\ 1 = 0,$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$λογ\ α = -λογ\left(\frac{1}{α}\right)$$

τοῦτ' ἔστιν *ὁ λογάριθμος παντὸς ἀριθμοῦ α θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῆς μονάδος εἶνε ἀνάγκη νὰ ὁρισθῇ ὡς ἀντίθετος τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀντιστρόφου ἀριθμοῦ* $\frac{1}{α}$.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$λογ\ \frac{1}{10} = -λογ\ 10 = -1$$

$$λογ\ \frac{1}{100} = -λογ\ 100 = -2$$

$$λογ\ \frac{1}{10^ρ} = -λογ\ (10^ρ) = -ρ.$$

234. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰδιότητος ἕπονται νῦν αἱ ἑξῆς.

Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν.

Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ $\frac{α}{β}$ τὸ πηλίκον αὐτῶν.

Τότε εἶνε $\frac{α}{β}.β = α,$

ὅθεν $$λογ\left(\frac{α}{β}\right)+λογ\ β=λογ\ α$$

καὶ $$λογ\left(\frac{α}{β}\right)=λογ\ α-λογ\ β.$$

Ὁ λογάριθμος πάσης δυνάμεως (σύμμετρον ἐχούσης ἐκθέτην) ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν ἐκθέτην.

Ἡ βάσις ὑποτίθεται θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἡ δύναμις ἐπίσης.

Ἔστω πρότερον ὁ ἐκθέτης μ ἀκέραιος καὶ θετικός· τότε εἶνε

$$α^{μ}=α.α.α\ .\ .\ .\ α, \qquad \text{ὅθεν καὶ}$$

$$λογ\ (α^{μ})=(λογ\ α)+(λογ\ α)+(λογ\ α)+\ldots+(λογ\ α)=μ.\ (λογ\ α).$$

Ἔστω δεύτερον ὁ ἐκθέτης $\frac{μ}{ν}$ κλασματικὸς καὶ θετικός.

Ἡ δύναμις $α^{\frac{μ}{ν}}$ πολλαπλασιασθεῖσα ν φορὰς ἐφ' ἑαυτὴν γίνεται $α^{μ}$, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$α^{\frac{μ}{ν}}.\ α^{\frac{μ}{ν}}\ldots.α^{\frac{μ}{ν}}=α^{ν.\frac{μ}{ν}}=α^{μ}.$$

ἄρα εἶνε $$λογ\ α^{\frac{μ}{ν}}+λογ\ α^{\frac{μ}{ν}}+\ldots+λογ\ α^{\frac{μ}{ν}}=μ.\ λογ\ α$$

$$ἢ \quad ν.\ λογ\left(α^{\frac{μ}{ν}}\right)=μ\ λογ\ α$$

$$\text{καὶ}\ λογ\left(α^{\frac{μ}{ν}}\right)=\frac{μ}{ν}.\ (λογ\ α).$$

Ἔστω τέλος ὁ ἐκθέτης ἀρνητικὸς — φ.

Ἡ δύναμις $α^{-φ}$ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὴν $α^{φ}$ γίνεται 1

ἤτοι $$α^{-φ}.α^{φ}=1.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται $λογ\ (α^{-φ})+λογ\ (α^{φ})=0,$

ὅθεν $$λογ\ (α^{-φ})=-λογ\ (α^{φ})=-φ(λογ\ α).$$

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἔχομεν γενικῶς

$$λογ(α^{x})=x.\ λογ\ α,$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ συμμέτρου ἀριθμοῦ x.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. *Ὁ λογάριθμος πάσης δυνάμεως τοῦ 10 ἰσοῦται τῷ ἐκθέτῃ αὐτῆς.*

Καὶ ὄντως εἶνε $λογ\ (10^{x})=x.\ λογ\ 10=x.$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. *Ὁ λογάριθμος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦ-*

ται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ· καὶ γενικῶς ὁ λογάριθμος πάσης ῥίζης εἶνε ἴσος πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.

Καὶ ὄντως εἶνε $λογ\sqrt{α}=λογ\left(α^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}.λογ\ α$

$$καὶ\ λογ\sqrt[ν]{α}=λογ\left(α^{\frac{1}{ν}}\right)=\frac{1}{ν}.λογ\ α.$$

235. *Πλὴν τῆς μονάδος 1 οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἴσον τῷ 0.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀριθμοῦ τινος μεγαλητέρου τῆς μονάδος ὁ λογάριθμος εἶνε 0, ἔστω δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὁ $1+ε$· τότε θὰ ἦτο

$$λογ(1+ε)=0,\ λογ(1+ε)^2=2λογ(1+ε)=0,\ καὶ\ γενικῶς$$
$$λογ\ (1+ε)^ν=0.$$

Ἀλλὰ δύναται νὰ εὑρεθῇ δύναμις τοῦ $1+ε$ ὑπερβαίνουσα τὸν 10· διότι εἶνε $(1+ε)^2>1+2ε$,

$$ἄρα\ (1+ε)^3>(1+2ε)(1+ε)>1+3ε$$
$$καὶ\ γενικῶς\ (1+ε)^ρ>1+ρε·$$

ἑπομένως ἡ δύναμις $(1+ε)^ρ$ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸν 10, ἂν εἶνε

$$1+ρε>10,\ ἤτοι\ ρ>\frac{9}{ε}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δύναμις $(1+ε)^ρ$ ὑπερβαίνει τὸν 10, ὁ λογάριθμος αὐτῆς ἔχει ἀκέραιον μέρος, καὶ διὰ τοῦτο διαφέρει τοῦ 0· ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ $(1+ε)$ διαφέρει τοῦ 0.

Οὐδὲ μικροτέρου τῆς μονάδος ἀριθμοῦ δύναται νὰ εἶνε ὁ λογάριθμος 0· διότι ἂν ἦτο

$$ρ<1\ καὶ\ λογ\ ρ=0,\ θὰ\ ἦτο\ καὶ\ λογ\ \frac{1}{ρ}=0$$

καὶ ὁ $\frac{1}{ρ}$ εἶνε μεγαλήτερος τῆς μονάδος· ὅπερ ἀδύνατον.

236. *Αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ καὶ ἐλαττουμένου ἐλαττοῦται.*

Ἔστω $α>β$, ἢ $\frac{α}{β}>1$·

ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $\frac{α}{β}$ ὑπερβαίνει τὴν μονάδα, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ εἶνε

δι' ὧν γράφεται ὁ ἀριθμός, τὴν δὲ ἀξίαν ἑκάστου ὁρίζει τὸ χαρακτηριστικόν.

240. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμόν, καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν εἰς διαίρεσιν, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν πίνακα περιέχοντα τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν.

Καὶ ὄντως πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ζητοῦμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν παραγόντων ἐν τῷ πίνακι καὶ ἀθροίζομεν αὐτούς· τὸ ἄθροισμα θὰ εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου· ζητοῦμεν τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον ἐν τῇ στήλῃ τῶν λογαρίθμων καὶ λαμβάνομεν τὸν πρὸς αὐτὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν, ὅστις εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ζητοῦμεν ἐν τῷ πίνακι τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου· ἡ διαφορὰ θὰ εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου· ζητοῦμεν τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον ἐν τῇ στήλῃ τῶν λογαρίθμων καὶ ὁ πρὸς αὐτὸν ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἵνα εὕρωμεν οἱανδήποτε δύναμιν δοθέντος ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ἐκ τοῦ πίνακος καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως· τὸ γινόμενον θὰ εἶνε ὁ λογάριθμος τῆς δυνάμεως· ζητοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐν τοῖς λογαρίθμοις καὶ ὁ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶνε ἡ ζητουμένη δύναμις.

Τὸ αὐτὸ δὲ προφανῶς ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῶν ῥιζῶν· διότι αἱ ῥίζαι εἶνε δυνάμεις ἔχουσαι κλασματικοὺς ἐκθέτας.

Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

Ἵνα διὰ τῶν λογαρίθμων καταστήσωμεν ἁπλουστέρας τὰς πράξεις, ὡς ἐρρήθη, εἶνε ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν πίνακα περιέχοντα τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν. Οἱ τοιοῦτοι πίνακες περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους ἀκεραίων μόνον ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ δὲ μόνον τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10 οἱ λογάριθμοι εἶνε σύμμετροι ἀριθμοὶ (ἐδ. 234, πόρ. Α'), αὗται δὲ πλὴν τῶν ἐχουσῶν ἀκέραιον ἐκθέτην, εἶνε πᾶσαι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ (ἐδ. 188), ἕπεται, ὅτι πλὴν τῶν ἀριθμῶν, 1, 10, 100, 1000, κλπ., πάντων τῶν ἄλλων ἀκεραίων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουσι διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουσι κατ' ἀνάγκην ἑκά-

στου λογαρίθμου τὰ δεκαδικὰ ψηφία μέχρι τινὸς (μέχρι τῶν ἑκατοντάκις χιλιοστῶν οἱ τοῦ Λαλάνδου καὶ μέχρι τῶν δεκάκις ἑκατομμυριοστῶν οἱ τοῦ Καλλέτου). Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οἱ λογάριθμοι μόνον κατὰ προσέγγισιν εὑρέθησαν καὶ ἐγράφησαν εἰς τοὺς πίνακας, ἀρκεῖ δὲ ὅμως ἡ προσέγγισις αὕτη εἰς τὰς συνήθεις ἐφαρμογὰς τῶν λογαρίθμων.

Τὰ ἀκέραια μέρη τῶν λογαρίθμων δὲν ἐγράφησαν εἰς τοὺς πίνακας ὡς εὐκολώτατα εὑρισκόμενα.

Ἡ δὲ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται μὲν νὰ γίνῃ καὶ μόνον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς ὁ ὁρισμὸς αὐτῶν ὑποδεικνύει, ἀλλ' αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων καὶ μάλιστα αἱ ἐν τῇ ἀνωτέρα μαθηματικῇ θεωρούμεναι, παρέχουσιν ἄλλους εὐκολωτέρους τρόπους εὑρέσεως. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ἔργον τοῦτο ἐγένετο ἤδη, ὀλίγον ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ὁ τρόπος, καθ' ὃν ἐγένετο· παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι ἕνεκα τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων οἱ λογάριθμοι τῶν μὴ πρώτων ἀριθμῶν ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων παραγόντων αὐτῶν· ὥστε ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ λογάριθμοι μόνον τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Διάταξις τῶν πινάκων.

Αὕτη φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου πίνακος.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
430	347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
1	63 448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
2	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
3	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
4	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
5	849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
6	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
7	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
8	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
9	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	345	355	365	375	385	395	404	414	424	434

Αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν εἶνε γεγραμμέναι ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶνε εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τοῦ N. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα διασταυροῦνται αἱ δύο σειραί, αἱ τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας αὐτοῦ ἔχουσαι·

Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουσι κοινὰ τὰ πρῶτα ψηφία, γράφονται ταῦτα ἅπαξ (ἐπὶ τῶν πενταψηφίων λογαρίθμων τὰ δύο πρῶτα, ἐπὶ δὲ τῶν ἑπταψηφίων τὰ τρία πρῶτα) καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις οὗ ἀλλαχθῶσι.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν, ὅτι εἶνε

λογ 4306=3,63407
λογ 4308=3,63428
λογ 4320=3,63548
λογ 4325=3,63599
λογ 4368=3,64028
λογ 4370=3,64048.

ΣΗΜ. Ὁ ἀστερίσκος, ὅστις ἐν τοῖς πενταψηφίοις πίναξιν ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ, σημαίνει, ὅτι τὰ παραλειπόμενα πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα· τοῦτο ἐγένετο εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ 4368.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι ἐν τῇ πρώτῃ σελίδι περιέχουσιν οἱ πίνακες τοὺς λογαρίθμους τῶν μικρῶν ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν τεταγμένους, οἱ μὲν πενταψήφιοι πίνακες ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100, οἱ δὲ ἑπταψήφιοι ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1200· καὶ τοῦτο, ἵνα ταχύτερον εὑρίσκωνται οἱ λογάριθμοι αὐτῶν.

Χρήσεις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

Ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων.

1) *Δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρεῖν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.*

καὶ 2) *Δοθέντος λογαρίθμου, εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.*

Τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τούτων θὰ πραγματευθῶμεν νῦν, ὑποθέτοντες, ὅτι ἔχομεν ὑπ' ὄψει πενταψηφίους πίνακας.

Πρόβλημα 1ον.

Δοθέντος ἀριθμοῦ, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου περιλαμβάνει δύο μέρη.

α΄.) *Εὑρεῖν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.*

β΄.) *Εὑρεῖν τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ.*

Καὶ τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν εὑρίσκεται εὐκολώτατα· διότι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὑποτίθεται γεγραμμένος ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν πάντοτε μορφήν. Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ

λογαρίθμου του εἶνε τὸ θέμα τοῦ ἀριθμοῦ (ἐδ. 230)· ἂν δὲ εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶνε ἀρνητικὸν καὶ ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει τὴν τάξιν τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν (238).

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶνε

	58759, ὁ λογάριθμός του θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν				4
ἂν εἶνε	587,59	»	»	»	2
ἂν εἶνε	5,8759,	»	»	»	0
ἂν	0,058,	»	»	»	$\bar{2}$
ἂν δὲ	0,0008,	»	»	»	$\bar{4}$

Εἰς δὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου πρῶτον παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν ἔχῃ), ὥστε καθιστῶμεν αὐτὸν ἀκέραιον· (τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος, διότι πολλαπλασιάζει τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ.)· ἔπειτα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1ον) Ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων, ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὑρίσκοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

Παραδείγματα.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 352 ἔχει χαρακτηριστικὸν μὲν 2, δεκαδικὸν δὲ μέρος, εὑρισκόμενον ἐκ τῶν πινάκων, ἔχει 54654 (τὸ αὐτό, ὅπερ καὶ ὁ ἀριθμὸς 3520)·

ὅθεν εἶνε λογ. 352=2,54654.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 58 ἔχει ἀκέραιον μὲν μέρος 1, δεκαδικὸν δὲ (ἐκ τῆς πρώτης σελίδος ἀμέσως εὑρισκόμενον ἢ καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 5800 ἔχει 76343,

ὅθεν εἶνε λογ. 58=1,76343.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 5,401 ἔχει χαρακτηριστικὸν μὲν 0, δεκαδικὸν δὲ μέρος τὸ αὐτὸ μὲ τὸν ἀριθμὸν 5401, ἤτοι, ὡς ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν, τὸ 73247,

ὅθεν εἶνε λογ. 5,401=0,73247.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 0, 8035 ἔχει χαρακτηριστικὸν $\bar{1}$ καὶ δεκαδικὸν μέρος, ὅσον καὶ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ 8035, ἤτοι τὸ 90499·

ὅθεν λογ. 0,8035 $=\bar{1}$,90499

ὁμοίως εἶνε λογ. 0,08035$=\bar{2}$,90499.

2α) Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, χωρίζομεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δι' ὑποδιαστολῆς.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν πρόκειται περὶ τοῦ ἀριθμοῦ 85946, γράφομεν 8594,6, ὅπερ οὐδόλως μεταβάλλει τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς 8594,6 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων 8594 καὶ 8595, ἕπεται, ὅτι καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων τούτων·

εἶνε δὲ
λογ. 8594=3,93420
λογ. 8595=3,93425.

ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶνε 5 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως), ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 8595 καὶ 8596 εἶνε πάλιν 5 (καὶ ἡ αὐτὴ διαφορὰ ἐπὶ πολὺ διατηρεῖται), ὥστε *δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶνε ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν*, ὅτε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Δι' αὔξησιν μιᾶς μονάδος ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8594 εἰς τὸν 8595 ηὐξήθη ὁ λογάριθμος κατὰ 5 (ἑκατοντάκις χιλιοστὰ) δι' αὔξησιν 0,6 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8594 εἰς τὸν 8594,6 θέλει αὐξηθῇ κατὰ $5\times0,6$ ἤτοι 3. Ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν 3 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ 8594, ἵνα λάβωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 8594,6, ὅστις ἑπομένως εἶνε 3,93423· ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 85946 εἶνε διὰ τοῦτο 4,93423.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦτο 85,946, ὁ λογ. θὰ ἦτο 1,93423· ἂν ὁ ἀριθμὸς ἦτο 0,85946, ὁ λογ. θὰ ἦτο $\overline{1},93423$.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 5,87984· ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ἔχει χαρακτηριστικὸν 0. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου γράφομεν 5879,84· ἔχομεν δὲ

λογ. 5879=3,76930

καὶ διαφορὰν τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων 8· ὥστε ἀνάγκη νὰ προσθέσωμεν $8\times0,84$, ἤτοι 7 δεκαδικὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως· ὅθεν

λογ. 5879,84=3,76937
καὶ λογ. 5,87984=0,76937.

ΣΗΜ. Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν μένει πάντοτε ἡ αὐτή, ἀλλ' ἐλαττοῦται, καθ' ὅσον αὐξάνουσιν οἱ ἀριθμοί· ὥστε δὲν ἀληθεύει, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶνε ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ ὅμως ἑκάστη διαφορὰ μένει συνήθως ἀμετάβλητος ἐπὶ πολλοὺς ἀριθμούς, δυνάμεθα νὰ συστήνωμεν κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀναλογίαν, ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ προηγουμένη μέθοδος.

Πρόβλημα 2ον.

Δοθέντος λογαρίθμου, εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ὑποδιαιρεῖται εἰς τὰ ἑξῆς δύο.

α'.) *Εὑρεῖν τὰ ψηφία, δι' ὧν κατὰ σειρὰν γράφεται ὁ ἀριθμός.*

β'.) *Προσδιορίσαι τὴν ἀξίαν ἑκάστου ψηφίου.*

Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1ον) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκηται ἐν τῷ πίνακι, θὰ εὕρωμεν ἀπέναντι τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (ζητοῦμεν δ' αὐτὸ πάντοτε μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν), τὴν δὲ ἀξίαν ἑκάστου προσδιορίζει τὸ χαρακτηριστικόν.

Ἔστω π. χ. ὁ λογάριθμος 3,59095.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκεται ἐν τῷ πίνακι καὶ εἶνε τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3899· ἐπειδὴ δὲ χαρακτηριστικὸν ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει 3, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἔχῃ τέσσαρα ἀκέραια ψηφία, ὥστε εἶνε ἀκριβῶς ὁ 3899· ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι·

Εἰς τὸν λογάριθμον	$\overline{2}$,59095	ἀντιστοιχεῖ	ὁ	ἀριθμὸς	0,03899
εἰς τὸν λογάριθμον	$\overline{1}$,59095	»	ὁ	»	0,3899
εἰς τὸν	0,59095	»	ὁ	»	3,899
εἰς τὸν	1,59095	»	ὁ	»	38,99
εἰς τὸν	2,59095	»	ὁ	»	389,9
εἰς τὸν	3,59095	»	ὁ	»	3899
εἰς τὸν	4,59095	»	ὁ	»	38990

καὶ οὕτω καθεξῆς.

2ον) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ πίνακι, θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν.

Ἔστω παραδείγματος χάριν ὁ λογάριθμος 1,95094· τὸ δεκαδικὸν μέρος 95094 εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 8931 καὶ 8932· διαφέρουσι δὲ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ 5 (μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως)· ὥστε παραδεχόμενοι, ὡς καὶ πρίν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 8931, ὅστις εἶνε 3,95090, αὐξηθῇ κατὰ 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ μίαν μονάδα, ἂν δὲ αὐξηθῇ ὁ λογάριθμος μόνον κατὰ 4 μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως, ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{5}$ μιᾶς μονάδος· ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει δεκαδικὸν μέρος τὸ 95094, θὰ εἶνε 8931,8, ἢ μᾶλλον 89318, διότι μόνον περὶ τῆς διαδοχῆς τῶν ψηφίων φροντίζομεν, ἡ δὲ ἀξία αὐτῶν θὰ ὁρισθῇ ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶνε τὸ 1, ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶνε 89,318.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς προσδιορίζεται κατὰ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλητέραν, ὅσῳ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶνε μικρότερον. Καὶ ὄντως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε $\overline{1}$, εἶνε ἀκριβῆ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέχρι τοῦ τῶν ἑκατοντάκις χιλιοστῶν, ἂν δὲ εἶνε 0, τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε ἀκριβῆ μέχρι τῶν μυριοστῶν, ἂν δὲ 2, μόνον μέχρι τῶν ἑκατοστῶν, ἂν δὲ 5, ὁρίζεται ὁ ἀριθμὸς μόνον μέχρι τῶν δεκάδων· αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ εἶνε ἄγνωστοι.

ΣΗΜ. Ἐὰν δοθῇ λογάριθμος ὅλως ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ εἶνε ἀρνητικὸν (237).

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

Πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις, ὕψωσις εἰς δυνάμεις καὶ ἐξαγωγὴ ῥιζῶν.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

75,32 ἐπὶ 0,6508

Εὑρίσκομεν λογ. 75,32 = 1,87691

λογ. 0,6508 = $\overline{1}$,81345

ἄθροισμα λογαρίθμων = $\overline{1}$,69036 = λογ. γινομένου.

Ὁ πρὸς τὸν λογάριθμον 1,69036 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς 49,019 εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 853,54 διὰ τοῦ 195,817·

λογ. 853,54 = 2,93122

λογ. 195,817 = 2,29185

διαφορὰ λογαρίθμων ἢ λογ. πηλίκου = 0,63937

καὶ πηλίκον = 4,3588

κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς μυριοστοῦ.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τριακοστὴ δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ 1,05, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $(1,05)^{30}$.

$$
\begin{array}{lr}
 & \text{λογ. } 1,05 = 0,02119 \\
 & \text{ἐπὶ } 30 \\
\hline
\text{γινόμενον} & 0,63570 = \text{λογ.}(1,05)^{30}.
\end{array}
$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ 1,05 δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἐν τῷ πίνακι ὑπάρχοντος κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, ἕπεται, ὅτι ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ $(1,05)^{30}$ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ 15 μοναδας τῆς αὐτῆς τάξεως· ἑπομένως ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ $(1,05)^{30}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,63555 καὶ τοῦ 0,63585· ἄρα ὡς φαίνεται ἐκ τῶν πινάκων, ἡ ζητουμένη δύναμις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 4,320 καὶ τοῦ 4,324· ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις εἶνε 4,322 κατὰ προσέγγισιν 2 χιλιοστῶν· διαφέρει δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 4,322 ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὀλιγώτερον ἢ 2 χιλιοστά.

4) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ 7^{η} ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 87594.

$$
\begin{array}{lr}
\text{Ἔχομεν} & \text{λογ.} 87594 = 4,94247 \\
 & \text{ἐπὶ } \frac{1}{7} \\
\hline
\text{γινόμενον} & 0,70607\cdot
\end{array}
$$

καὶ ἑπομένως $(87594)^{\frac{1}{7}} = 5,0824$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς μυριοστοῦ.

5) Νὰ εὑρεθῇ τοῦ 120 ἡ $\frac{2}{3}$ δύναμις, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $(120)^{\frac{2}{3}}$

$$
\begin{array}{lr}
\text{Ἔχομεν} & \text{λογ. } 120 = 2,07918 \\
 & \text{ἐπι } \frac{2}{3} \\
\hline
\text{γινόμενον} & 1,38612
\end{array}
$$

ὅθεν $(120)^{\frac{2}{3}} = 24,329$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

6) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ 5^{η} ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 0,854

ἤτοι νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $(0,854)^{\frac{1}{5}}$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$
\begin{array}{lr}
 & \text{λογ. } 0,854 = \overline{1},93146 \\
 & \text{ἐπὶ } \frac{1}{5} \\
\hline
\text{γινόμενον} & \overline{1},98629 = \text{λογ.}\sqrt[5]{0,854}\cdot
\end{array}
$$

ὅθεν $\sqrt[5]{0,854}=0,968925$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.

Παρατήρησις. Ἵνα διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{1},93146$ διὰ τοῦ 5, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς $\overline{5}+4,93146$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χωριστά.

Μονώνυμα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{(\sqrt{28})^3\cdot\sqrt[5]{53}}{8993},\quad ἤτοι\quad \frac{(28)^{\frac{3}{2}}\cdot(53)^{\frac{1}{5}}}{8993}.$$

Ὁ λογάριθμος αὐτῆς ἰσοῦται (234) τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐλαττωθέντι κατὰ τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἀλλ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε γινόμενον δύο παραγόντων, ἑπομένως ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων (232).

Ἐπειδὴ δὲ ἑκάτερος τῶν παραγόντων εἶνε δύναμις, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν ἐκθέτην (234).

Ὥστε ὁ λογάριθμος τῆς δοθείσης παραστάσεως εἶνε

$$\frac{3}{2}.\ λογ.\ 28+\frac{1}{5}\ λογ.53—λογ.8993$$

Διάταξις τῶν πράξεων.

λογ28=1,44726	$\frac{3}{2}$ λογ28	=2,17074
λογ53=1,72428	$\frac{1}{5}$ λογ53	=0,34485
	ἄθροισμα	2,51559
λογ8993=3,95390	ἀφαιρεῖται	3,95390
	ὑπόλ.	$\overline{2}$,56169

ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶνε ὁ 0,03645, ὅστις διαφέρει τῆς δοθείσης παραστάσεως ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ.

2) Ὑπολογίσαι τὴν παράστασιν

$$\frac{3.(0,045)^{\frac{2}{3}}.(58)^{\frac{1}{4}}}{(0,318)^5}$$

ὁ λογάριθμος αὐτῆς εἶνε ἴσος τῷ

$$λογ\ 3+\frac{2}{3}\ λογ(0,045)+\frac{1}{4}\ λογ\ 58—5.\ λογ(0,318).$$

Διάταξις τῶν πράξεων.

λογ 3=			0,47712
λογ(0,045)=$\bar{2}$,65321	$\frac{2}{3}$ λογ(0,045)=		$\bar{1}$,10214
λογ 58= 1,76343	$\frac{1}{4}$. λογ 58=		0,44085
		ἄθροισμα	0,02011
λογ(0,318)=$\bar{1}$,50243,		5 λογ(0,318)=	$\bar{3}$,51215
		ὑπόλοιπον	2,50796

καὶ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς 322,1
οὗτος ἰσοῦται τῇ παραστάσει κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου.

ΣΗΜ. Πρὸς ἀφαίρεσιν τοῦ λογαρίθμου $\bar{3}$,51215 νοοῦμεν προστεθείσας τρεῖς μονάδας εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ὅπερ δὲν βλάπτει τὴν διαφοράν· ἢ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χωριστὰ καὶ ἐφαρμόζομεν τὰ περὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἰρημένα.

Τὰ παραδείγματα ταῦτα ἀρκοῦσιν, ἵνα γίνῃ καταφανὴς ἡ ἀπὸ τῶν λογαρίθμων ὠφέλεια· διότι δι' αὐτῶν ἐκτελοῦνται εὐκολώτατα πράξεις, αἵτινες ἄλλως θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ ἐπιπονώταται. Παρατηρητέον δ' ὅμως, ὅτι ἐν ἑκάστῳ ὑπολογισμῷ πρέπει νὰ ἐξακριβώνηται ἡ ἐπιτευχθεῖσα προσέγγισις· διότι, ὡς ἐν τῷ 3ῳ παραδείγματι ἐδείχθη, ὅταν ὁ αὐτὸς λογάριθμος πολλάκις ἐπαναλαμβάνηται, ἢ ὅταν πολλοὶ λογάριθμοι λαμβάνωνται, ἐπειδὴ ἕκαστος αὐτῶν διαφέρει τοῦ ἀληθοῦς, ἐπαναλαμβάνεται καὶ τὸ ἐν ἑκάστῳ ὑπάρχον σφάλμα καὶ ἑπομένως ὁ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν προκύπτων λογάριθμος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ πολλὰς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καλήτερον εἶνε νὰ γίνηται χρῆσις τῶν ἑπταψηφίων λογαρίθμων ὡς μείζονα προσέγγισιν παρεχόντων.

Ἐπὶ παραστάσεων μὴ μονωνύμων ἐφαρμόζονται μετὰ δυσκολίας οἱ λογάριθμοι· διότι ἐν γένει εἶνε ἀνάγκη νὰ ὑπολογίζηται διὰ τῶν λογαρίθμων ἕκαστος τῶν προσθετέων τῆς παραστάσεως (ἐκτὸς ἂν εἶνε δεδομένος), ὥστε ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ὅλης παραστάσεως ἀναλύεται εἰς περισσοτέρους ὑπολογισμοὺς μονωνύμων· τοῦτο δὲ καὶ τὰς ἐργασίας πολλαπλασιάζει καὶ τὴν προσέγγισιν βλάπτει. Διὰ τοῦτο ζητοῦμεν πάντοτε νὰ μετασχηματίζωμεν τὴν διὰ τῶν λογαρίθμων ὑπολογιστέαν παράστασιν, ἂν εἶνε δυνατόν, εἰς μονώνυμον. Ἐὰν παραδείγματος χάριν πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ῥίζα $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, γράφομεν $\sqrt{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}$ καὶ ἐπειδὴ α καὶ β ὑποτίθενται δεδομένα, εὑρίσκομεν τοὺς παράγοντας $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τοὺς *λογαρίθμους*.

Περὶ ἀνατοκισμοῦ

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἀποφέρουσι δανεισθέντα χρήματα.

Ἐπιτόκιον λέγεται τὸ κέρδος, ὅπερ ἀποφέρουσιν 100 δραχ. εἰς ἓν ἔτος.

Τὸ δανεισθὲν ποσὸν λέγεται *κεφάλαιον*.

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

Ὁ τόκος εἶνε ἢ *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελῇ τὸ κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα τοκιζόμενον κεφάλαιον.

Ἡ εἰς τὸ κεφάλαιον προσθήκη τοῦ τόκου, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου, λέγεται *ἀνατοκισμός*· τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι *ἀνατοκίζεται*.

Πρόβλημα.

241. *Κεφάλαιον α δραχμῶν ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη, ὅταν μία δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρῃ τόκον τ;*

Ἐπειδὴ μία δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον τ, αἱ α δραχμαὶ φέρουσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ατ· ὥστε τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha+\alpha\tau$, ἢ $\alpha(1+\tau)$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *ἡ μετὰ ἓν ἔτος ἀξία κεφαλαίου οἱουδήποτε εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τοῦτο ἐπὶ* $(1+\tau)$.

Κατὰ ταῦτα, τὸ κεφάλαιον α, ὅπερ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ἔγινεν $\alpha(1+\tau)$, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)(1+\tau)$, ἤτοι $\alpha(1+\tau)^2$· (διότι διαρκοῦντος τοῦ δευτέρου ἔτους θεωρεῖται τὸ $\alpha(1+\tau)$ ὡς κεφάλαιον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου, $\alpha(1+\tau)^3$, καὶ γενικῶς εἰς τὸ τέλος τοῦ νοστοῦ θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$· ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ δανείου εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν διὰ τοῦ Κ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$K=\alpha(1+\tau)^\nu. \qquad (1)$$

Φανερὸν δέ, ὅτι ἡ αὐτὴ προκύπτει ἐξίσωσις, καὶ ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς συμβαίνῃ οὐχὶ κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα οἱαδήποτε, ἀρκεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ τ ὁ τόκος μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν τῶν διαστημάτων καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν διαστημάτων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν τῶν τεσσάρων ποσῶν Κ, α, τ, ν, ὅταν τὰ λοιπὰ τρία εἶνε δεδομένα· γίνεται δὲ τοῦτο εὐ-

κόλως διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\, K = \lambda o\gamma\, \alpha + \nu.\lambda o\gamma\,(1+\tau). \qquad (1')$$

Ἐπειδὴ δὲ δύναται νὰ εἶνε ἄγνωστον ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων K, α, ν, τ, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσι τέσσαρα διάφορα προβλήματα. Ἕπονται παραδείγματα τοιούτων προβλημάτων.

1) *Ἐδάνεισέ τις πρὸ 12 ἐτῶν 10000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 8 %· πόσας ἔχει νὰ λάβῃ σήμερον;*

Ἔχομεν ν=12, α=10000, τ=0,08· ὅθεν ὁ τύπος (1') γίνεται

$$\lambda o\gamma\, K = \lambda o\gamma\, 10000 + 12.\lambda o\gamma\,(1,08)$$

$$\lambda o\gamma\, 10000 = 4$$

λογ(1,08)=0,03342 $\quad 12\,\lambda o\gamma\,(1,08) = 0,40104$

$$\lambda o\gamma\, K = 4,40104$$

καὶ K=25178,8.

κατὰ προσέγγισιν 3 δεκάτων.

2) *Ἂν τις ἐδάνειζεν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ ἓν λεπτὸν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 %, πόσον θὰ ἐγίνετο τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους 1900;*

Ἔχομεν ν=1900 τ=0,04 α=0,01

ὅθεν ὁ τύπος (1') γίνεται

$$\lambda o\gamma\, K = \lambda o\gamma(0,01) + 1900\,\lambda o\gamma\,(1,04)$$

$$\lambda o\gamma\,(0,01) = \overline{2}$$

λογ(1,04)=0,01703, $\quad 1900\,\lambda o\gamma\,(1,04) = 32,35700$

$$\lambda o\gamma\, K = 30,35700$$

ὁ ἀριθμὸς K τῶν δραχμῶν, αἵτινες παριστῶσι τὴν ἀξίαν τοῦ δανείου μετὰ 1900 ἔτη, γράφεται μὲ 31 ψηφία ἀκέραια· 31 ὄγκοι χρυσοῦ, ὧν ἕκαστος ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τῆς γῆς, μόλις θὰ ἐξήρκουν πρὸς πληρωμὴν τοῦ ποσοῦ τούτου· τῷ ὄντι ὁ ὄγκος τῆς γῆς (ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς εἶνε 40 000 000 μέτρα) εἶνε κυβικὰ μέτρα

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{(40\,000\,000)^3}{8\pi^2}.$$

τόσος δὲ ὄγκος χρυσοῦ θὰ εἶχε βάρος

$$\frac{(40\,000\,000)^3}{6\pi^2}\cdot 19500 \text{ χιλιόγραμμα}$$

(διότι μία λίτρα χρυσοῦ ἔχει βάρος 19,5 χιλιόγραμμα) καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀξία ἑνὸς χιλιογράμμου τοῦ χρυσοῦ εἶνε περίπου $\frac{31000}{9}$ δραχμαί, ἡ ἀ-

ξία ἑνὸς τοιούτου ὄγκου θὰ ἦτο

$$\frac{(40\,000\,000)^3}{54.\pi^2}.19500.\ 31000$$

καὶ ἂν μ τοιοῦτοι ὄγκοι ἔχουσιν ἀξίαν ἴσην τῷ Κ, θὰ εἶνε

$$K=\frac{(40\,000\,000)^3}{54.\pi^2}.\ 19500.\ 31000\ \mu.$$

ὅθεν εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma(\mu)=\lambda o\gamma K+\lambda o\gamma 54+2\ \lambda o\gamma \pi-3\ \lambda o\gamma(40\,000\,000)$$
$$-\lambda o\gamma(19500)-\lambda o\gamma(31000)$$

λογ Κ=30,35700	3 λογ (40 000 000)=22,80618
λογ 54= 1,73239	λογ 19500= 4,29003
2 λογ π= 0,99428	λογ 31000= 4,49136
33,08367	31,58757

33,08367
31,58757
λογ μ= 1,49610 καὶ μ=31, 34.

3) *Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δανείσῃ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 $^0/_0$, ἵνα λάβῃ μετὰ 15 ἔτη 50000;*

Ἔχομεν Κ=50000, τ=0,06, ν=15· ὅθεν ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου (1')

$$\lambda o\gamma\ \alpha=\lambda o\gamma\ 50000-15.\ \lambda o\gamma(1,06).$$

λογ (1,06)=0,02531

λογ 50000=4,69897
15. λογ (1,06)=0,37965
λογ α= 4,31932
καὶ α= 20860,5

κατὰ προσέγγισιν 4 μονάδων.

4) *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 5897 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ 6 ἔτη ἔγιναν 9805;*

Ἔχομεν ν=6, Κ=9805, α=5879· ὅθεν

$$\lambda o\gamma\ (1+\tau)=\frac{1}{6}(\lambda o\gamma\ 9805-\lambda o\gamma\ 5879)$$

λογ 9805=3,99145
λογ 5897=3,77063
διαφορὰ 0,22082
λογ (1+τ)=0,03680
καὶ 1+τ= 1,0884
ὅθεν τ= 0,0884

καὶ τὸ ἐπιτόκιον 100τ εἶνε 8,84 $^0/_0$· μὲ προσέγ. ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

5) *Μετὰ πόσα ἔτη 12589 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 5 $^0/_0$ γίνονται 45818;*

Ὁ τύπος (1′) δίδει

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma\, 45818 - \lambda o\gamma\, 12589}{\lambda o\gamma (1{,}05)}$$

Ἔχομεν λογ 45818 = 4,66104

λογ 12589 = 4.09999

λογ (1,05) = 0,02119 διαφορὰ 0,56105

καὶ $\nu = \frac{0{,}56105}{0{,}02119} = \frac{56105}{2119} = 26$ ἔτη καί τι πλέον.

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι 26 ἔτη δὲν εἶνε ἱκανά, ἀλλ' 27 εἶνε περισσότερα τοῦ δέοντος. Ἵνα εὕρωμεν καὶ τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 27^{ου} ἔτους, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 26^{ου} ἔτους αἱ 12589 δραχμαὶ γίνονται $12589(1{,}05)^{26}$· ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον τοῦτο τοκισθῇ ἐπὶ η ἡμέρας, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\left(1+\frac{\eta\tau}{365}\right)$ καὶ θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὴν ἐξίσωσιν $12589.(1{,}05)^{26}\left(1+\frac{\eta\tau}{365}\right)=45818$, ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὸν ἀριθμὸν $\left(1+\frac{\eta\tau}{365}\right)$, ἐξ αὐτοῦ δὲ εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὸν η. Οὕτως εὑρίσκεται $\eta=172$.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς ἐν τῇ παρενθέσει ποσότητος εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ἐξ ἧς εὑρίσκεται ὁ ν.

Πρόβλημα.

242. *Ἐὰν καταθέτῃ τις κατ' ἔτος εἰς τράπεζαν τὸ ποσὸν α δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ, πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη, τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος ὄντος τ;*

Αἱ α δραχμαί, αἱ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἔτους κατατεθεῖσαι, ἔμειναν εἰς ἀνατοκισμὸν ν ἔτη, καὶ διὰ τοῦτο ἔγιναν $\alpha(1+\tau)^\nu$· αἱ δὲ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους κατατεθεῖσαι ἔγιναν $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, αἱ δὲ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$, καὶ καθεξῆς· τέλος αἱ α δραχμαί, αἱ κατατεθεῖσαι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τελευταίου ἔτους γίνονται $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε, ἂν διὰ τοῦ Σ παραστήσωμεν τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ εἶνε

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)^3+\ldots+\alpha(1+\tau)^\nu, \text{ ἤτοι (222)}$$

$$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu+1}-\alpha(1+\tau)}{\tau} = \frac{\alpha(1+\tau)\,\{(1+\tau)^\nu-1\}}{\tau}.$$

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν ταύτην διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀνάγκη πρῶτον νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν $(1+\tau)^\nu$ καὶ νὰ ἐλαττώσωμεν αὐτὴν κατὰ μονάδα· τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ θέσωμεν ἐν τῇ παραστάσει ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(1+\tau)^\nu-1$ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῆς τοὺς λογαρίθμους.

ΣΗΜ. Τὰς δυνάμεις $(1+\tau)^\nu$ διὰ $\tau=0{,}03, \ldots, \tau=0{,}06$ καὶ διὰ $\nu=1{,}2 \ldots, 50$, ἔχουσιν οἱ ὑπὸ τοῦ Dupuis ἐκδοθέντες πίνακες τοῦ Lalande ἐν σελ. 134· ὥστε δυνάμεθα ἀμέσως ἄνευ ὑπολογισμοῦ νὰ λαμβάνωμεν αὐτὰς ἐκεῖθεν.

Παράδειγμα. *Καταθέτει τις ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τοῦ τέκνου του κατ' ἔτος 1000 δραχμὰς ὑπὲρ αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %· πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ τὸ τέκνον, ὅταν συμπληρώσῃ τὸ 20ὸν ἔτος τῆς ἡλικίας του;*

Ἔχομεν $\alpha=1000$, $\tau=0{,}06$ καὶ $\nu=20$. Ὥστε

$$\Sigma=\frac{1000(1{,}06)\{(1{,}06)^{20}-1\}}{0{,}06}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε (Dupuis, σελ. 134) $(1{,}06)^{20}=3{,}20713$, ἕπεται

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 1000+\lambda o\gamma(1{,}06)+\lambda o\gamma(2{,}20713)-\lambda o\gamma(0{,}06).$$

λογ 1000=	3
λογ (1,06)=	0,02531
λογ (2,20713)=	0,34383
ἄθροισμα	3,36914
λογ (0,06)=	$\overline{2},77815$
ὑπόλοιπον=λογ Σ=	4,59099
καὶ Σ=	38993,6

κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Περὶ χρεωλυσίας.

243. *Χρεωλυσία* λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἵτινες πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, οἷον κατ' ἔτος ἢ καθ' ἑξαμηνίαν, κτλ.

Τὸ ποσόν, ὅπερ πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται *χρεωλύσιον*.

Ἀποσβέννυται δὲ τὸ χρέος, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην τῇ ἀξίᾳ τοῦ ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου.

Ἐὰν κεφάλαιόν τι α δανεισθῇ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ, μετὰ παρέλευσιν ν χρονικῶν διαστημάτων γίνεται $\alpha(1+\tau)^{\nu}$,
τ ὄντος τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς ἐν ἑνὶ τῶν διαστημάτων.

Ἂν δὲ πρὸς ἐξόφλησιν πληρώνηται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος ἡ ποσότης χ, ἡ μὲν πρώτη δόσις, ἥτις δίδεται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου διαστήματος, θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν διαστημάτων

$$\chi(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἡ δὲ δευτέρα, ὡς διδομένη εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου διαστήματος, εἰς τὸ τέλος τῶν ν διαστημάτων θὰ γίνῃ

$$\chi(1+\tau)^{\nu-2}.$$

Ὁμοίως ἡ τρίτη δόσις θὰ γίνῃ $\chi(1+\tau)^{\nu-3}$ κτλ. ἡ δὲ προτελευταία (ἐπειδὴ καθ' ἓν μόνον χρονικὸν διάστημα τοκίζεται) θὰ γίνῃ $\chi(1+\tau)$, καὶ ἡ τελευταία χ. Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν δόσεων θὰ εἶνε εἰς τὸ τέλος τῶν ν διαστημάτων

$$\chi+\chi(1+\tau)+\chi(1+\tau)^2+\chi(1+\tau)^3+\ldots+\chi(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἤτοι (222) $$\chi\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}.$$

Καὶ ἑπομένως, ἵνα συμβῇ ἀπόσβεσις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\chi\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}. \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν τῶν τεσσάρων ποσοτήτων χ, τ, ν ἢ α, ὅταν αἱ λοιπαὶ τρεῖς εἶνε γνωσταί.

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τῆς χρεωλυσίας δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ λύσωμεν, ὡς ἑξῆς.

Ἐάν τις δανεισθῇ σήμερον α δραχμάς, μετὰ ἓν ἔτος θὰ ὀφείλῃ νὰ πληρώσῃ $\alpha(1+\tau)$, ἤτοι τὸν τόκον $\alpha\tau$ καὶ τὸ κεφάλαιον α.

Ἐὰν λοιπὸν πληρώσῃ χ δραχμάς, ἐλαττώνει τὸ χρέος του κατὰ χ δραχμάς, ὅθεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους χρεωστεῖ μόνον $\alpha(1+\tau)-\chi$ δρ.

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν δι' α_1 τὸ χρέος τοῦτο καὶ σκεφθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ χρεωστῇ μόνον

$\alpha_1(1+\tau)-\chi$ δρ. ἤτοι $\alpha(1+\tau)^2-\chi(1+\tau)-\chi$ ὅπερ παριστῶ διὰ α_2.

Ὁμοίως εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ χρεωστῇ μόνον

$\alpha_2(1+\tau)-\chi$ ἤτοι $\alpha(1+\tau)^3-\chi(1+\tau)^2-\chi(1+\tau)-\chi$, ὅπερ παριστῶ διὰ α_3

καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέλος τοῦ $\nu^{\text{ου}}$ ἔτους θὰ χρεωστῇ

$\alpha(1+\tau)^{\nu}-\chi(1+\tau)^{\nu-1}-\chi(1+\tau)^{\nu-2}-\ldots-\chi(1+\tau)-\chi$, ἢ α_{ν}

καὶ ἐπειδὴ θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ ἐντελῶς τὸ χρέος του, εἰς τὸ τέλος τοῦ $\nu^{\text{ου}}$ ἔτους, πρέπει νὰ εἶνε $\alpha_{\nu}=0$, ἤτοι

$$\alpha(1+\tau)^{\nu}=\chi[1+(1+\tau)+(1+\tau)^2+\ldots+(1+\tau)^{\nu-1}]$$

ἤτοι $$\chi\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}$$

Προβλήματα.

1) *Ἐδανείσθη τις 56000 δραχμὰς πρὸς 7 %· θέλει δὲ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἐτησίων δόσεων εἰς 12 ἔτη· πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον;*

Ἔχομεν $\alpha=56000$, $\tau=0,07$, $\nu=12$.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν δύναμιν $(1,07)^{12}$

λογ (1,07)=0,02938

12. λογ (1,07)=0,35256· ὅθεν $(1,07)^{12}=2,2519$ (προσέγ. 3 μυριοστ.)

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν νῦν

$$\chi=\frac{56000.(2,2519).(0,07)}{1,2519}$$

λογ 56000=4,74819
λογ 2,2519=0,35256
λογ (0,07) $=\overline{2},84510$
ἄθρ. 3,94585
λογ(1,2519)=0,09756
ὑπολ.=λογ χ=3,84829
καὶ χ=7051,6

κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

2) *Πόσον εἶνε τὸ χρέος, ὅπερ ἐξοφλεῖται εἰς 25 ἔτη διὰ χρεωλυσίου 8975 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 %;*

Ἐνταῦθα ἔχομεν $\chi=8975$, $\tau=0,06$, $\nu=25$· καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha=8975.\frac{(1,06)^{25}-1}{0,06.(1,06)^{25}}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε (Dup., 134) $(1,06)^{25}=4,29187$, ἕπεται

λογ α=λογ 8975+λογ(3,29187)—λογ (0,06)—λογ (4,29187).

λογ 0,06=$\overline{2}$,77815
λογ (4,29187)=0,63264
$\overline{1}$,41079

λογ 8975=3,95303
λογ 3,29187=0,51744
4,47047

4,47047
$\overline{1}$,41079
λογ α=5,05968

καὶ α=114731, κατὰ προσέγγισιν 5 μονάδων.

3) *Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 120000 δραχμῶν διὰ χρεωλυσίου 15000 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 %;*

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν $\chi(1+\tau)^\nu-\chi=\alpha\tau(1+\tau)^\nu$

ὅθεν $$(1+\tau)^\nu=\frac{\chi}{\chi-\alpha\tau}. \qquad (2)$$

ἐξ οὗ $$\nu\ \lambda o\gamma\,(1+\tau)=\lambda o\gamma\,\chi-\lambda o\gamma\,(\chi-\alpha\tau)$$

καὶ $$\nu=\frac{\lambda o\gamma\,\chi-\lambda o\gamma\,(\chi-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)}.$$

Ἐνταῦθα $\chi-\alpha\tau=5400$ $\lambda o\gamma\,\chi=4{,}17609$

$\lambda o\gamma\,(1+\tau)=0{,}03342$ $\lambda o\gamma\,(\chi-\alpha\tau)=3{,}73239$

$0{,}44370$

$$\nu=\frac{0{,}44370}{0{,}03342}=13 \text{ ἔτη καί τι πλέον.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι 13 δόσεις δὲν εἶνε ἱκαναὶ νὰ ἀποσβέσωσιν ἐντελῶς τὸ χρέος, ἀλλὰ πάλιν 14 εἶνε πλέον τοῦ δέοντος· ἤτοι ἡ 14^{η} δόσις θὰ σύγκειται ἐκ δραχμῶν ὀλιγωτέρων τοῦ χρεωλυσίου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν $14^{\eta\nu}$ δόσιν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν, πόσον γίνεται τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἔπειτα τί γίνονται αἱ 13 δόσεις εἰς τὸ τέλος τῶν αὐτῶν ἐτῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον ποσὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου.

Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ 14^{η} δόσις θὰ εἶνε 4252 δραχμαί.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2), ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν $\chi>\alpha\tau$· τουτέστι τὸ χρεωλύσιον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου· ὅπερ καὶ ἀφ' ἑαυτοῦ προφανές.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εἰς πόσα ἔτη κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5 % διπλασιάζεται; (Ἀπ. 14ἔτ., 74ἡμ.).

3) Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς τόπου τινὸς αὐξάνηται κατ' ἔτος κατὰ τὰ 5 χιλιοστὰ αὐτοῦ καὶ εἶνε σήμερον 2000000, πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 100 ἔτη; (Ἀπ. 3296300).

3) Ἐκ πίθου περιέχοντος 100 λίτρας οἴνου ἀφαιρεῖται καθ' ἑκάστην μίαν λίτρα καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος. Ζητεῖται α') πόσος οἶνος θὰ μείνῃ μετὰ 50 ἡμέρας, καὶ β') μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ μείνῃ τὸ ἥμισυ τοῦ οἴνου; (Ἀπ. α') 60λίτρ., 5. β') μετὰ 68 ἡμέρας μένει περισσότερον τοῦ ἡμίσεως, μετὰ δὲ 69 ὀλιγώτερον).

4) Ἐὰν ἔχῃ τις νὰ λαμβάνῃ ἐπὶ 30 ἔτη 5000 δρ. κατ' ἔτος, ἀντὶ πόσου δύναται νὰ πωλήσῃ σήμερον τὸ δικαίωμά του;

*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΛΛΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων ὡς ἐκθετῶν.

244. *Λογάριθμος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὡρισμένος τις ἀριθμὸς α, ἵνα δώσῃ αὐτόν.*
Ὁ ἀριθμὸς α, ὅστις ὑψούμενος εἰς δυνάμεις παράγει τοὺς ἄλλους, λέγεται *βάσις* τῶν λογαρίθμων.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ 10 ληφθῇ ὡς βάσις,
ὁ λογάριθμος τοῦ 100 θὰ εἶνε ὁ 2· διότι $100=10^2$
τοῦ 1000 θὰ εἶνε ὁ 3· διότι $1000=10^3$
καὶ τοῦ $\sqrt{10}$ θὰ εἶνε ὁ $\frac{1}{2}$· διότι $\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$

Ἐπειδὴ ὡς βάσις α δύναται νὰ ληφθῇ οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς (διάφορος τῆς μονάδος), διὰ τοῦτο δύνανται νὰ σχηματισθῶσι διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα, καὶ εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ διαφόρους λογαρίθμους εἰς τὰ διάφορα ταῦτα συστήματα.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 100 ἔχει λογάριθμον 1, ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις ὁ 100· διότι $100=100^1$, θὰ ἔχῃ δὲ λογάριθμον $\frac{1}{2}$, ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις ὁ ἀριθμὸς 10000, διότι $100=10000^{\frac{1}{2}}$, κτλ.
Καὶ γενικῶς, ἐὰν εἶνε $\alpha^{\chi}=M$, ὁ χ θὰ λέγηται λογάριθμος τοῦ M κατὰ τὴν βάσιν α.

Οἱ ἐν χρήσει λογάριθμοι ἔχουσι βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10 καὶ λέγονται διὰ τοῦτο *δεκαδικοὶ* λογάριθμοι ἢ *κοινοὶ* λογάριθμοι. Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ ἀναδεικνύεται ἄλλη τις βάσις ἀσύμμετρος πασῶν τῶν ἄλλων ἁρμοδιωτέρα πρὸς τὰς μαθηματικὰς θεωρίας· ἀλλ' ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς γίνεται πάντοτε χρῆσις τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

ΣΗΜ. Ἵνα ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς στηριχθῇ ἐπὶ τῶν γνωστῶν, πρέπει πρῶτον νὰ ὁρισθῇ ἡ σημασία τῶν δυνάμεων, ὧν οἱ ἐκθέται εἶνε ἀσύμμετροι ἀριθμοί, καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ περὶ τῶν τοιούτων δυνάμεων ἰσχύουσιν οἱ ἤδη τεθέντες νόμοι (189) καὶ προσέτι νὰ δειχθῇ,

ὅτι πρὸς ἕκαστον θετικὸν ἀριθμὸν Μ ἀντιστοιχεῖ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=M$ εἷς καὶ μόνον εἷς ἐκθέτης ἤτοι λογάριθμος. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ περὶ τούτων πραγματεία ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῆς στοιχειώδους μαθηματικῆς καὶ μόνον ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ δύναται νὰ γίνῃ τελεία, διὰ τοῦτο ἐν τοῖς ἑπομένοις δεχόμεθα αὐτὰ ἄνευ ἀποδείξεων.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

245. *Ἐν παντὶ συστήματι λογαρίθμων ἡ μονὰς 1 ἔχει λογάριθμον τὸ 0 καὶ ἡ βάσις τὴν μονάδα.*

Διότι εἶνε $\alpha^0=1$ καὶ $\alpha^1=\alpha$,

οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶνε ὁ α.

246. *Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι ἔστω α ἡ βάσις καὶ χ, ψ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν Μ καὶ Ν, ἤτοι ἔστω $\alpha^{\chi}=M$ καὶ $\alpha^{\psi}=N$

τότε θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{\chi+\psi}=M.N$

ἤτοι $\lambda o\gamma.(M.N)=\chi+\psi=\lambda o\gamma.M+\lambda o\gamma.N.$

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἀποδεικνύονται αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων (ἰδὲ ἐδ. 234—237)

$$\lambda o\gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\lambda o\gamma\ \alpha-\lambda o\gamma\ \beta$$

$$\lambda o\gamma\ (\alpha^{\mu})=\mu\ \lambda o\gamma\ \alpha$$

$$\lambda o\gamma\ (\sqrt{\alpha})=\frac{1}{2}\lambda o\gamma\ \alpha.$$

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι αἱ ἰδιότητες τοῦ χαρακτηριστικοῦ καὶ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαρίθμων (ἐδ. 237) δὲν ὑπάρχουσιν εἰς τὰ ἄλλα συστήματα, πλὴν τοῦ δεκαδικοῦ, ἐνόσῳ γράφονται οἱ ἀριθμοὶ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα· διὰ τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς γίνεται χρῆσις μόνον τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

247. Ἔχοντες τοὺς λογαρίθμους ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν κατά τινα βάσιν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν κατ' ἄλλην βάσιν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς ἐπὶ ὡρισμένον τινὰ ἀριθμὸν (ὅστις εἶνε ὁ λογάριθμος τῆς παλαιᾶς βάσεως πρὸς τὴν νέαν).

Διότι ἔστωσαν αἱ βάσεις α καὶ β, χ καὶ ψ δὲ οἱ λογάριθμοι τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ Μ κατὰ τὰς βάσεις ταύτας· τότε εἶνε

$$\alpha^{\chi}=M \text{ καὶ } \beta^{\psi}=M$$

ὅθεν καὶ $\alpha^{\chi}=\beta^{\psi}.$

Καὶ λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο τούτων ἴσων πρῶτον μὲν κατὰ τὴν βάσιν α, ἔπειτα δὲ κατὰ τὴν βάσιν β, εὑρίσκομεν

$$\chi = \psi \text{ λογ } \beta \quad \text{βάσις } \alpha$$
$$\psi = \chi \text{ λ'ογ } \alpha. \quad \text{βάσις } \beta.$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων βλέπομεν, ὅτι ἐκ τοῦ λογαρίθμου (χ) οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ τὴν βάσιν α εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον (ψ) τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ κατὰ τὴν βάσιν β, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν λ'ογ α, ἤτοι ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς πρώτης βάσεως πρὸς τὴν δευτέραν.

Ἐκ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων ἕπεται προσέτι $\quad$ λογβ. λ'ογα $=1$,

ἤτοι, *τὸ γινόμενον τῶν λογαρίθμων δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἑκατέρου πρὸς τὸν ἄλλον ὡς βάσιν εἶνε ἴσον τῇ μονάδι.*

Παρατήρησις. Ὅταν λαμβάνηται ὡς βάσις ὁ ἀριθμὸς 10, ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ α ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$10^{\chi} = \alpha.$$

Τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης κατὰ προσέγγισιν δυνάμεθα νὰ ἐπιχειρήσωμεν ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α μεγαλήτερος τῆς μονάδος· ἂν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀγνώστου χ παρασταθῇ διὰ τοῦ ρ, θὰ εἶνε

$$\rho < \chi < \rho + 1$$

ἄρα καὶ $\quad 10^{\rho} < 10^{\chi} < 10^{\rho+1}$

ἤτοι $\quad 10^{\rho} < \alpha < 10^{\rho+1} \quad$ διότι $10^{\chi} = \alpha$·

ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ α περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 10^{ρ} καὶ τοῦ $10^{\rho+1}$ καὶ θὰ ἔχῃ διὰ τοῦτο $\rho+1$ ψηφία ἀκέραια, ἤτοι θὰ ἔχῃ θέμα τὸ ρ.

Ὁμοίως, ἂν ὁ ἄγνωστος χ ἔχῃ ρ_1 δέκατα (ἐν συνόλῳ), θὰ εἶνε

$$\frac{\rho_1}{10} < \chi < \frac{\rho_1 + 1}{10}$$

ἤτοι $\quad \rho_1 < 10\chi < \rho_1 + 1$·

ἄρα καὶ $\quad 10^{\rho_1} < 10^{10\chi} < 10^{\rho_1+1}$

ἤτοι $\quad 10^{\rho_1} < \alpha^{10} < 10^{\rho_1+1} \quad$ διότι $10^{10\chi} = (10^{\chi})^{10} = \alpha^{10}$.

ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ α^{10} ἔχει ρ_1+1 ψηφία, ἑπομένως ὁ α^{10} ἔχει θέμα ρ_1.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ χ ἔχει ἑκατοστὰ (ἐν συνόλῳ) τὸ θέμα τῆς δυνάμεως α^{100}· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ἐν τῷ ἐδαφ. (230) δοθέντα ὁρισμὸν τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων ὡς ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

248. Ἐὰν ἔχωμεν δύο προόδους τὴν μὲν γεωμετρικὴν ἀρχομένην ἀπὸ τῆς μονάδος, τὴν δὲ ἀριθμητικὴν ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ 0

$$1, \quad 1+\delta \quad (1+\delta)^2 \; \ldots \; (1+\delta)^\nu \; \ldots$$
$$0, \quad \varepsilon \quad 2\varepsilon \; \ldots \; \nu\varepsilon \; \ldots$$

οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου λέγονται *λογάριθμοι* τῶν ἀντιστοιχούντων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς.

Ἵνα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἀποδείξωμεν τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων, ἂς λάβωμεν δύο τυχόντας ὅρους τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἂς παραστήσωμεν αὐτοὺς διὰ M καὶ N· ἔστω δὲ

$$M=(1+\delta)^\mu \qquad N=(1+\delta)^\nu$$

καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν MN, ἤτοι τὸ $(1+\delta)^{\mu+\nu}$, εἶνε καὶ αὐτὸ ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἔχει ἀντίστοιχον ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸν ὅρον $(\mu+\nu)\varepsilon$· ἐπομένως εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$\text{λογ}\,(MN)=(\mu+\nu)\varepsilon=\mu\varepsilon+\nu\varepsilon$$

Ἀλλ' ἐπίσης εἶνε $\quad \text{λογ}\, M=\mu\varepsilon, \qquad \text{λογ}\, N=\nu\varepsilon$

ἄρα $\quad \text{λογ}\,(MN)=\text{λογ}\, M+\text{λογ}\, N.$

Ἐκ τῆς ἀρχικῆς δὲ ταύτης ἰδιότητος ἀποδεικνύονται αἱ ἄλλαι κατὰ τὰ ἐν τοῖς ἐδαφίοις 234—237 εἰρημένα.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῶν λογαρίθμων συμφωνεῖ πρὸς τὸν προηγούμενον, ὅστις θεωρεῖ τοὺς λογαρίθμους ὡς ἐκθέτας μιᾶς βάσεως· διότι ἔστω α ὁ ἀριθμός, ὅστις ὑψωθεὶς εἰς τὴν δύναμιν ε, παράγει τὸν 1+δ· ἤτοι ἔστω

$$\alpha^\varepsilon=1+\delta \quad \text{ἢ} \quad \alpha=(1+\delta)^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

τότε θὰ εἶνε

$$\begin{aligned} 1+\delta &= \alpha^\varepsilon \\ (1+\delta)^2 &= \alpha^{2\varepsilon} \\ (1+\delta)^3 &= \alpha^{3\varepsilon} \\ &\ldots\ldots \\ (1+\delta)^\nu &= \alpha^{\nu\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου εἶνε δυνάμεις τοῦ α ἔχουσαι ἐκθέτας τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, οἵτινες ἐπομένως εἶνε οἱ λογάριθμοι αὐτῶν κατὰ τὴν βάσιν α.

ΣΗΜ. Οὕτως ὥρισε τοὺς λογαρίθμους ὁ ἐπινοήσας αὐτοὺς Νέπερος τῷ 1614· ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὁρίζονται οὐχὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι, ἀλλὰ μόνον ἐκείνων, οἵτινες εἶνε ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

249. Οὕτω καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες ἔχουσι τὸν ἄγνωστον ε τὸν ἐκθέτην· τοιαύτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις

$$2^{\chi}=125.$$

Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις λύονται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων· καὶ δ τως, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\chi.\,\text{λογ}\ 2=\text{λογ}\ 125$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{\text{λογ}\ 125}{\text{λογ}\ 2}.$$

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$5^{(\chi^2-6\chi+8)}=250$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$(\chi^2-6\chi+8).\text{λογ}\ 5=\text{λογ}\ 250$$

ἢ

$$\chi^2-6\chi+8=\frac{\text{λογ}\ 250}{\text{λογ}\ 5},$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸ χ καὶ ἑπομένως λύ ται κατὰ τὰ ἤδη γνωστά.

ΣΗΜ. Η ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$ δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἄνευ τῶν λι γαρίθμων ὡς ἑξῆς.

Ἂν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄγνωστον χ (ὅστις εἶνε ὁ λογ ριθμος τοῦ β κατὰ τὴν βάσιν α) κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πρέπει νὰ εὕ ρωμεν κλάσμα τι $\frac{\rho}{\nu}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε

$$\alpha^{\frac{\rho}{\nu}}<\beta<\alpha^{\frac{\rho+1}{\nu}},$$

διότι τότε ὁ ἄγνωστος χ θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$.

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων τούτων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς

$$\alpha^{\rho}<\beta^{\nu}<\alpha^{\rho+1}$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ ν ὑψώσωμεν τὸν β εἰς τὴν δύναμιν ν καὶ ἔπειτα νὰ εὕρωμεν δύο ἐφεξῆ δυνάμεις τοῦ α ἔστω τὰς α^{ρ} καὶ $\alpha^{\rho+1}$, περιλαμβανούσας τὴν δύναμ β^{ν}· τότε θὰ εἶνε $\chi=\frac{\rho}{\nu}$ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

*ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ, ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ. ΠΕΡΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ.

Μεταθέσεις.

250. *Μεταθέσεις* πραγμάτων τινῶν λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δύνανται ταῦτα νὰ τεθῶσιν εἰς μίαν σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Δύο γράμματα α, β ἐπιδέχονται προδήλως δύο μόνον μεταθέσεις

αβ καὶ βα.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸ νέον γράμμα γ ἐν ἑκάστῃ μεταθέσει αβ, βα εἰς πάσας τὰς θέσεις, ὡς ἑξῆς

αβγ	βαγ
αγβ	βγα
γαβ	γβα.

Οὕτω προκύπτουσιν 6 μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων.

Καὶ γενικῶς, ἔχοντες τὰς μεταθέσεις τῶν (ν—1) γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν ν γραμμάτων, ἐὰν θέσωμεν τὸ νέον γράμμα ἐν ἑκάστῃ μεταθέσει εἰς πάσας τὰς θέσεις (ἔχει δὲ ν θέσεις ἑκάστη). Αἱ οὕτω προκύπτουσαι μεταθέσεις διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· διότι αἱ μὲν ἐκ τῆς αὐτῆς μεταθέσεως προερχόμεναι διαφέρουσι κατὰ τὴν θέσιν τοῦ νέου γράμματος, αἱ δὲ ἐκ διαφόρων, κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἄλλων γραμμάτων. Δὲν ὑπάρχουσι δὲ ἄλλαι μεταθέσεις τῶν ν γραμμάτων· διότι ἂς φαντασθῇ τις οἱανδήποτε μετάθεσιν αὐτῶν· ἐὰν ἐξ αὐτῆς παραλειφθῇ τὸ νέον γράμμα, θὰ μείνῃ προφανῶς μετάθεσίς τις τῶν (ν—1) γραμμάτων· ταύτην δὲ εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς· καὶ ἐπειδὴ ἐθέσαμεν τὸ νέον γράμμα, εἰς πάσας τὰς θέσεις αὐτῆς, ἕπεται, ὅτι εὑρέθη καὶ ἡ μετάθεσις, ἣν θεωροῦμεν.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν μεταθέσεων τῶν ν—1 γραμμάτων παράγει ν μεταθέσεις τῶν ν γραμμάτων, ἕπεται, ὅτι, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ Κ τὸ πλῆθος τῶν πρώτων, αἱ δεύτεραι θὰ εἶνε Κ.ν.

Ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν ταύτην καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι αἱ μεταθέσεις δύο γραμμάτων εἶνε 1.2, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ μεταθέσεις τριῶν γραμμάτων εἶνε 1.2.3

αἱ μεταθέσεις τεσσάρων 1. 2. 3. 4.
αἱ δὲ μεταθέσεις μ γραμμάτων 1. 2. 3. 4. . . . μ

ἤτοι *ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων μ πραγμάτων εἶνε ἴσος τῷ γινομένῳ πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ μ.*

Διατάξεις.

251. Οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐκ μ πραγμάτων τὰ ν ($\mu \geq \nu$) καὶ νὰ θέσωμεν αὐτὰ εἰς μίαν σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου, λέγονται *διατάξεις* τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν.

Ἀνὰ ἓν τὰ μ γράμματα α, β, γ. . . . μ ἐπιδέχονται προφανῶς μ μόνον διατάξεις α, β, γ. . . . μ

Ἵνα εὕρωμεν τὰς ἀνὰ δύο διατάξεις τῶν μ γραμμάτων, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν κατόπιν ἑκάστου γράμματος διαδοχικῶς πάντα τὰ λοιπά, ὡς ἑξῆς

αβ	βα	γα	. . .	μα
αγ	βγ	γβ	. . .	μβ
αδ	βδ	γδ	. . .	μγ
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
αμ	βμ	γμ	. . .	μλ

Οὕτως εὑρίσκομεν ἐξ ἑκάστου γράμματος (μ—1) διατάξεις, ἤτοι τὸ ὅλον μ(μ—1) διατάξεις ἀνὰ δύο. Ὅτι δὲ ἄλλη δὲν ὑπάρχει, βλέπει τις εὐκόλως.

Ὑποθέσωμεν γενικῶς, ὅτι ἔχομεν πάσας τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ (ν—1)· ἔστω δὲ τὸ πλῆθος αὐτῶν Π. Ἑκάστη τῶν διατάξεων τούτων θὰ ἔχῃ (ν—1) γράμματα, ἑπομένως θὰ λείπωσιν ἀπ' αὐτῆς γράμματα μ—(ν—1), ἤτοι μ—ν+1· ἂν δὲ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης διατάξεως θέσωμεν ἕκαστον τῶν μ—ν+1 γραμμάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχει, θὰ προκύψωσιν ἐξ αὐτῆς μ—ν+1 διατάξεις τῶν αὐτῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν. Ἑπομένως θὰ δώσωσιν αἱ Π διατάξεις κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον Π.(μ—ν+1) διατάξεις ἀνὰ ν· διαφέρουσι δὲ αὗται ἀπ' ἀλλήλων· διότι αἱ μὲν ἐκ τῆς αὐτῆς διατάξεως προερχόμεναι διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον γράμμα, αἱ δὲ ἐκ διαφόρων, κατὰ τὰ ἄλλα. Οὐδὲ ὑπάρχει πλὴν αὐτῶν ἄλλη διάταξις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· διότι ἂς φαντασθῇ τις μίαν οἱανδήποτε· ἐὰν ἐξ αὐτῆς παραλειφθῇ τὸ τελευταῖον γράμμα, προκύπτει διάταξίς τις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1· ταύτην δὲ εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς· καὶ ἐπειδὴ ἐθέσαμεν εἰς τὸ τέλος αὐτῆς ἕκαστον τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχει, εὕρομεν καὶ τὴν διάταξιν ταύτην.

Κατὰ ταῦτα τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν μ γραμμάτων

ἀνὰ ἓν εἶνε μ·
ἀνὰ δύο $\mu(\mu-1)$·
ἀνὰ τρία $\mu(\mu-1)(\mu-2)$·
καὶ γενικῶς ἀνὰ ν εἶνε $\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$.

Ἐὰν τὰ μ γράμματα λαμβάνωνται ἀνὰ μ, αἱ διατάξεις ἀποβαίνουσι μεταθέσεις· διότι μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρωσιν.. Οὕτως εὑρίσκομεν καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν μ γραμμάτων

$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\mu+1)$, ἤτοι 1. 2. 3....μ.

Συνδυασμοί.

252. *Συνδυασμοὶ* μ πραγμάτων ἀνὰ ν, λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν μ πραγμάτων τὰ ν· (ἤτοι αἱ διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν, αἱ καθ' ἓν τοὐλάχιστον πρᾶγμα διαφέρουσαι ἀπ' ἀλλήλων).

Σχηματισμὸς τῶν συνδυασμῶν.

Ἀνὰ ἓν τὰ μ γράμματα α, β, γ, δ, ε....μ ἐπιδέχονται προφανῶς μ συνδυασμούς, τοὺς ἑξῆς α, β, γ, δ, ε,... μ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀνὰ δύο συνδυασμοὺς τῶν αὐτῶν γραμμάτων, γράφομεν κατόπιν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἕκαστον τῶν ἑπομένων του· οὕτω προκύπτουσιν οἱ ἑξῆς συνδυασμοὶ ἀνὰ δύο.

ἐκ τοῦ α οἱ	αβ	αγ	αδ	αε,...	αμ
ἐκ τοῦ β οἱ		βγ	βδ	βε,...	βμ
ἐκ τοῦ γ οἱ			γδ	γε,...	γμ
.					
ἐκ τοῦ λ ὁ					λμ

οὗτοι δὲ εἶνε ἅπαντες οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀνὰ τρία συνδυασμῶν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἕκαστον τῶν ἀνὰ δύο συνδυασμῶν καὶ νὰ γράψωμεν κατόπιν τοῦ τελευταίου γράμματός του ἕκαστον τῶν ἑπομένων αὐτῷ, γραμμάτων· οὕτω προκύπτουσιν οἱ ἑξῆς ἀνὰ τρία συνδυασμοὶ

ἐκ τοῦ αβ οἱ αβγ, αβδ, αβε,... αβμ
ἐκ τοῦ αγ οἱ αγδ, αγε,... αγμ
. . . .

Καὶ γενικῶς πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀνὰ ν συνδυασμῶν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἕκαστον τῶν ἀνὰ ν—1 καὶ νὰ γράψωμεν κατόπιν τοῦ τελευταίου γράμματός του ἕκαστον τῶν ἑπομένων του.

Καὶ ὄντως· οἱ οὕτω προκύπτοντες συνδυασμοὶ θὰ εἶνε διάφοροι ἀπ ἀλλήλων· διότι οἱ μὲν. ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ (ἀνὰ ν—1) προκύ πτοντες διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον γράμμα, οἱ δὲ ἐκ διαφόρων, κατ τὰ ἄλλα· δὲν ὑπάρχει δὲ ἐκτὸς αὐτῶν ἄλλος συνδυασμὸς τῶν μ γραμ μάτων ἀνὰ ν· διότι ἂς φαντασθῇ τις οἱονδήποτε συνδυασμὸν ἀνὰ ν κα ἂς διατάξῃ τὰ γράμματα αὐτοῦ κατὰ τὴν τάξιν των (α, β, γ, δ,.. μ ἐὰν τότε παραλειφθῇ τὸ τελευταῖον γράμμα, θὰ προκύψῃ συνδυασμός τι τῶν μ. γραμμάτων ἀνὰ ν—1· τὸν συνδυασμὸν τοῦτον εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς καὶ ἐπειδὴ ἐγράψαμεν κατόπιν αὐτοῦ πάντα τὰ μετὰ τὸ τελευταῖον ψη φίον του ἐρχόμενα γράμματα, εὕρομεν καὶ τὸν συνδυασμὸν ἐκεῖνον.

Πλῆθος τῶν συνδυασμῶν.

Ἔστω Σ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν μ. γραμμάτων ἀνὰ καὶ Δ τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν αὐτῶν μ. γραμμάτων ἀνὰ ν καὶ Μ τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν ν γραμμάτων.

Ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν Σ συνδυασμῶν κάμωμεν πάσας τὰς δυνατὰ μεταθέσεις τῶν ν γραμμάτων αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν ἐξ αὐτοῦ Μ διατάξει (αἵτινες θὰ περιέχωσι μὲν τὰ αὐτὰ γράμματα θὰ διαφέρωσιν ὅμως κατ τὴν θέσιν αὐτῶν)· ὥστε ἐκ τῶν Σ συνδυασμῶν θὰ προκύψωσι τὸ ὅλο Μ.Σ διατάξεις. Αἱ διατάξεις αὗται διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· διότι α μὲν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ προκύπτουσαι διαφέρουσι κατὰ τὴν τάξι τῶν ν γραμμάτων, αἱ δὲ ἐκ διαφόρων, κατά τινα γράμματα· οὐδὲ ὑπάρ χει πλὴν αὐτῶν ἄλλη διάταξις τῶν μ. γραμμάτων, ἀνὰ ν· διότι ἂς φαν τασθῇ τις μίαν οἱανδήποτε διάταξιν· τὰ ν γράμματα, τὰ ὁποῖα αὐτ περιέχει, κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσιν ἕνα συνδυασμὸν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· τοῦτον δὲ εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς· κα ἐπειδὴ ἐκάμαμεν εἰς αὐτὸν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν γραμ μάτων του, εὕρομεν καὶ τὴν διάταξιν ταύτην. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι αἱ ὡς εἴρηται προκύπτουσαι Μ. Σ διατάξεις εἶνε ἅπασαι αἱ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· τουτέστιν εἶνε

$$\Delta = M.\Sigma, \text{ ὅθεν καὶ } \Sigma = \frac{\Delta}{M}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\Delta = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)$

καὶ $M = 1.2.3\ldots\nu.$

ἕπεται
$$\Sigma = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ \nu} \qquad (1)$$

ΣΗΜ. Α'. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν εἶνε πάντοτε ἀκέραιος

ται ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου, ὅτι τὸ γινόμενον ν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶνε πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου 1. 2. 3....ν.

ΣΗΜ. Β'. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\Sigma = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots \mu}{(1.\ 2.\ 3 \ldots \nu)\ (1.\ 2.\ 3 \ldots (\mu-\nu))}$

ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς παραστάσεως (1) πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 1. 2. 3....(μ—ν). Ἐκ τῆς ἐκφράσεως δὲ ταύτης τοῦ Σ φαίνεται ἀμέσως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων εἶνε ὁ αὐτός, εἴτε ἀνὰ ν συνδυασθῶσι ταῦτα, εἴτε ἀνὰ μ—ν· τοῦτο δὲ καὶ ἀμέσως γίνεται φανερόν διότι τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα λείπουσιν ἐξ ἑνὸς συνδυασμοῦ ἀνὰ ν ἀποτελοῦσι συνδυασμόν τινα τῶν αὐτῶν μ γραμμάτων ἀνὰ μ—ν.

Ἐφαρμογαί.

1) Εὑρεῖν τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων εὐθυγράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μ πλευρὰς καὶ μ κορυφάς.

Αἱ τὰς μ κορυφὰς ἀνὰ 2 συνδέουσαι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι εἶνε τόσαι, ὅσοι εἶνε οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ 2, ἤτοι $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$

ἀλλ' ἀπὸ τούτων ἀφαιρετέον τὰς μ πλευρὰς τοῦ σχήματος· ὥστε ἀπομένουσι διαγώνιοι

$$\frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \mu \quad \text{ἢ} \quad \mu\left\{\frac{\mu-1}{2} - 1\right\}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\mu(\mu-3)}{1.2},$$

2) Πόσα σημεῖα γίνονται, ἐὰν αἱ μ πλευραὶ ἐπιπέδου πολυγώνου προσεκβληθῶσιν εἰς ἄπειρον; (ὑποτίθεται, ὅτι δὲν εἶνε δύο παράλληλοι).

Τόσαι τομαὶ ὑπάρχουσιν, ὅσοι εἶνε οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ 2· ἤτοι $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$· ἐκ τούτων ἀφαιρετέον τὰς μ κορυφάς, ὥστε γίνονται τομαὶ $\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}$.

3) Κατὰ πόσους διαφόρους τρόπους δύνανται νὰ σταθῶσιν 6 ἄνθρωποι εἰς κύκλον; (Ἀπ. 1. 2. 3. 4. 5).

4) Πόσοι ἀριθμοὶ διψήφιοι ὑπάρχουσιν ἔχοντες ψηφία σημαντικὰ καὶ διάφορα ἀπ' ἀλλήλων; πόσοι δὲ τριψήφιοι;

(Ἀπ. διψήφιοι 9. 8 ἢ 72· τριψήφιοι 9. 8. 7 ἤτοι 504).

5) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παραταχθῶσιν 8 στρατιῶται εἰς γραμμήν; (Ἀπ. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ἤτοι 40 320).

Τύπος τοῦ διωνύμου.

235. Διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε διωνύμων, ὡς τῶν $\chi+\alpha$, $\chi+\beta$, $\chi+\gamma$, $\chi+\delta$, ... $\chi+\kappa$, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν.

Ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διωνύμων τούτων, φανερὸν εἶνε, ὅτι θὰ ὑπάρχωσιν ἐν τῷ γινομένῳ

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)\ldots(\chi+\kappa)$$

πᾶσαι αἱ δυνάμεις τοῦ χ ἀπὸ τῆς χ^μ μέχρι τῆς χ^0, καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων.

Καὶ τοῦ μὲν χ^μ πολλαπλασιαστὴς εἶνε προδήλως ἡ μονάς· τοῦ δὲ $\chi^{\mu-1}$ λέγω, ὅτι εἶνε πολλαπλασιαστὴς τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa$$

τοῦ δὲ $\chi^{\mu-2}$, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, ἅτινα προκύπτουσι διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν μ γραμμάτων α, β, γ,... ἀνὰ δύο, ἤτοι τὸ ἄθροισμα

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\alpha\gamma+&\ldots+\alpha\kappa\\ +\beta\gamma+&\ldots+\beta\kappa\\ &+\iota\kappa.\end{aligned}$$

Καὶ γενικῶς τοῦ $\chi^{\mu-\nu}$ πολλαπλασιαστὴς εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, ὅσα προκύπτουσι διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν αὐτῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Διότι ἕκαστος ὅρος τοῦ γινομένου ἀνάγκη νὰ ἔχῃ (ὡς παράγοντα) ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων ἑκάστου διωνύμου καὶ ἕνα μόνον· ἑπομένως ὑπάρχουσιν εἰς ἕκαστον ὅρον μ γράμματα· ἐὰν δὲ ὅρος τις ἔχῃ τὸ $\chi^{\mu-\nu}$, τὰ λείποντα ν γράμματα θὰ εἶνε ἐκ τῶν α, β, γ ... κ καὶ θὰ ἀποτελῶσι συνδυασμόν τινα αὐτῶν ἀνὰ ν· ὥστε πᾶς ὅρος ἔχων τὸ $\chi^{\mu-\nu}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ συνδυασμόν τινα τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν, πᾶς συνδυασμὸς τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἀνὰ ν εὑρίσκεται ἐν τῷ γινομένῳ τῶν διωνύμων καὶ πολλαπλασιάζει τὸ $\chi^{\mu-\nu}$· διότι ἔστω ὁ συνδυασμὸς $\alpha\gamma\varepsilon\ldots\theta$· ἐὰν χωρίσωμεν τὰ διώνυμα, ἐν οἷς ὑπάρχουσι τὰ γράμματα τοῦ συνδυασμοῦ τούτου, ἀπὸ τῶν λοιπῶν

$$(\chi+\alpha)(\chi+\gamma)(\chi+\varepsilon)\ldots(\chi+\theta) \qquad (\chi+\beta)(\chi+\delta)\ldots(\chi+\eta),$$

τούτων μὲν τὸ γινόμενον θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $\alpha\gamma\varepsilon\ldots\theta$, τῶν δὲ λοιπῶν θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $\chi^{\mu-\nu}$, ὥστε τὸ γινόμενον πάντων τῶν διωνύμων θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον

$$(\alpha\gamma\varepsilon\ldots\theta)\,\chi^{\mu-\nu}.$$

ἐξ ὧν ἔπεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ $\chi^{\mu-\nu}$ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, ὅσα προκύπτουσι διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

254. Ἐκ τοῦ γινομένου $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)\ldots(\chi+\kappa)$ μεταβαίνομεν εἰς τὸ γινόμενον $(\chi+\alpha)(\chi+\alpha)(\chi+\alpha)\ldots(\chi+\alpha)$, τοῦτ' ἔστιν εἰς τὴν μ δύναμιν τοῦ διωνύμου $(\chi+\alpha)$, ἐὰν ὑποθέσωμεν πάντα τὰ α, β, γ...κ ἴσα ἀλλήλοις.

Ἀλλὰ τότε ἐν τῷ προηγουμένως εὑρεθέντι γινομένῳ τῶν διωνύμων

$$(\chi+\alpha), (\chi+\beta), \ldots (\chi+\kappa)$$

τοῦ μὲν χ^μ συντελεστὴς μένει ἡ μονὰς 1, τοῦ δὲ $\chi^{\mu-1}$ ὁ συντελεστὴς $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa$ τρέπεται εἰς $\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha$, ἤτοι μα.
τοῦ δὲ $\chi^{\mu-2}$ ὁ συντελεστὴς $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta\ldots+\iota\kappa$ τρέπεται εἰς $\alpha^2+\alpha^2+\ldots+\alpha^2$, ἤτοι τοσάκις τὸ α^2, ὅσοι εἶνε οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο, τοῦτ' ἔστι $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2$.

Καὶ γενικῶς ὁ συντελεστὴς τοῦ $\chi^{\mu-\nu}$ τρέπεται εἰς α^ν τοσάκις ληφθέν, ὅσοι εἶνε οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· τοῦτ' ἔστιν εἰς

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ \ \nu}\alpha^\nu.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ἡ ἰσότης

$$(\chi+\alpha)^\mu=\chi^\mu+\mu\chi^{\mu-1}.\alpha+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\chi^{\mu-2}.\alpha^2+\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ \nu}\chi^{\mu-\nu}\alpha^\nu+\ldots+\mu\chi\alpha^{\mu-1}+\alpha^\mu,$$

ἥτις λέγεται *τύπος τοῦ διωνύμου* ἢ καὶ *τύπος τοῦ Νεύτωνος*.

Κατὰ τὸν τύπον τοῦτον συντίθεται πᾶσα δύναμις τοῦ διωνύμου $\chi+\alpha$ ἐκ τῶν δυνάμεων τῶν μερῶν αὐτοῦ χ καὶ α καὶ ἀποτελεῖται ἐξ ὅρων ἰσοβαθμίων πρὸς τὰ χ καὶ α· τὸ τὴν σύνθεσιν ταύτην παρέχον δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος λέγεται *ἀνάπτυγμα* τῆς δυνάμεως $(\chi+\alpha)^\mu$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ χ ἢ τοῦ α.

255. Ὁ ὅρος $\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \nu}\chi^{\mu-\nu}\alpha^\nu$

λέγεται *γενικὸς ὅρος* τοῦ ἀναπτύγματος· διότι ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν πάντας τοὺς ὅρους ὑποθέτοντες τὸν ν κατὰ σειρὰν ἴσον τοῖς ἀριθμοῖς

$$1,\ 2,\ 3\ldots\mu.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὁ γενικὸς οὗτος ὅρος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(1.2.3.4\ldots\mu)\frac{\chi^{\mu-\nu}}{1.2.3.4\ldots(\mu-\nu)}.\frac{\alpha^\nu}{1.2.3\ldots\nu},$$

ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἐπὶ (μ—ν)(μ—ν—1).. 3.2.1· ἐκ δὲ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ γενικοῦ ὅρου βλέπομεν, ὅτι οἱ δύο ὅροι

$$\chi^{\kappa}\cdot\alpha^{\rho} \quad \text{καὶ} \quad \chi^{\rho}\alpha^{\kappa}$$

οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας τῶν χ καὶ α ἔχοντες (ἀλλ' ἀντιστρόφως), ἔχουσι τὸν αὐτὸν συντελεστήν· ἀπέχουσι δὲ οἱ ὅροι οὗτοι ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἄκρων· ἑπομένως, ἀφοῦ εὑρεθῶσιν ἐκ τοῦ τύπου οἱ ἡμίσεις τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος, οἱ λοιποὶ γράφονται κατ' ἀντίστροφον ταξιν.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ 6η δύναμις τοῦ (χ+α)· ἔχομεν

$$(\chi+\alpha)^6=\chi^6+6\chi^5\alpha+15\chi^4\alpha^2+20\chi^3\alpha^3+15\chi^2\alpha^4+6\chi\alpha^5+\alpha^6.$$

Περὶ πιθανότητος

256. Ὅταν ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων περιπτώσεων πράγματός τινος ἐξ ἅπαντος θὰ συμβῇ μία καὶ μία μόνη, ἀλλ' οὐδεμίαν εἰξεύρομεν αἰτίαν, ἥτις νὰ εὐνοῇ μᾶλλον τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην, τότε λέγομεν, ὅτι αἱ περιπτώσεις αὗται ἔχουσιν *ἴσην πιθανότητα* νὰ συμβῶσιν· ἢ ὅτι εἶνε *ἐξ ἴσου πιθαναί*.

Ἐὰν π. χ. ῥίψωμεν νόμισμά τι ἐν τῷ ἀέρι, θὰ πέσῃ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν δύο αὐτοῦ ὄψεων, δηλονότι ἢ ἐπὶ τοῦ προσώπου ἢ ἐπὶ τοῦ στέμματος· ἀμφότεραι δὲ αἱ περιπτώσεις αὗται εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί.

Ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τι παρίσταται διὰ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων, παρονομαστὴν δὲ τὸν ὅλον ἀριθμὸν πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων· ὑποτίθεται δέ, ὅτι πᾶσαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί.

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον θὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Εἴς τινα κάλπην εὑρίσκονται 12 σφαῖραι ἴσαι τὸ μέγεθος, ἐξ ὧν 5 εἶνε λευκαὶ καὶ 7 μέλαιναι· ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ὅτι, ἂν κατὰ τύχην ἐξαχθῇ μία, θὰ εἶνε λευκή;

Ἐνταῦθα πᾶσαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 12 (διότι μία ἐκ τῶν 12 σφαιρῶν θὰ ἐξαχθῇ ἐξ ἅπαντος καὶ ἑκάστη δύναται νὰ ἐξαχθῇ) καὶ πᾶσαι εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί, αἱ δὲ εὐνοϊκαὶ (καθ' ἃς δηλονότι θὰ ἐξαχθῇ λευκὴ σφαῖρα) εἶνε 5· ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι ἡ ἐξαχθησομένη σφαῖρα θὰ εἶνε λευκή, εἶνε $\frac{5}{12}$.

2) Λαχεῖόν τι ἔχει 100 ἀριθμοὺς καὶ ἐξ αὐτῶν οἱ πέντε κατὰ τύ-

χην ἐξαχθησόμενοι κερδίζουσιν· ἐάν τις ἀγοράσῃ ἕνα ἀριθμὸν αὐτοῦ, ἔστω τὸν 18, ποίαν πιθανότητα ἔχει, ὅτι θὰ κερδίσῃ;

Ἐνταῦθα αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε τόσαι, ὅσοι εἶνε οἱ συνδυασμοὶ τῶν 100 ἀριθμῶν ἀνὰ πέντε (διότι πέντε ἐκ τῶν 100 ἀριθμῶν θὰ ἐξαχθῶσι καὶ ἕκαστος συνδυασμὸς ἀνὰ πέντε ἔχει ἴσην πιθανότητα ὑπὲρ αὐτοῦ)· ἤτοι $\frac{100.99.98.97.96}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$.

Αἱ δὲ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶνε τόσαι, ὅσοι εἶνε οἱ ἀνὰ πέντε συνδυασμοὶ οἱ ἔχοντες τὸν ἀριθμὸν 18· πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλήθους αὐτῶν παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ἐκ τῶν συνδυασμῶν τούτων παραλειφθῇ ὁ ἀριθμὸς 18, θὰ μείνωσιν οἱ συνδυασμοὶ τῶν 99 ἄλλων ἀριθμῶν ἀνὰ 4· ἑπομένως οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι εἶνε $\frac{99.98.97.96}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$.

ὥστε ἡ πιθανότης, τοῦ ὅτι θὰ κερδίσῃ ὁ ἀριθμὸς 18, εἶνε

$$\frac{99.98.97.96}{1.\ 2.\ 3.\ 4} : \frac{100.99.98.97.96}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \text{ ἤτοι } \frac{5}{100} \text{ ἢ } \frac{1}{20}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἐπὶ 20 περιπτώσεων μία μόνον εἶνε εὐνοϊκὴ καὶ 19 ἐναντίαι.

3) Εἴς τινα κάλπην εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ 1, 2... μέχρι τοῦ 100· ἐὰν ἐξαχθῇ κατὰ τύχην εἷς, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ὅτι οὗτος θὰ εἶνε πρῶτος ἀριθμός; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{13}{50}\right)$.

4) Ἔχομεν δύο κύβους, ὧν ἀμφοτέρων αἱ πλευραὶ ἔχουσι τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6 κατὰ σειράν. Ἐὰν ῥίψωμεν αὐτοὺς κατὰ τύχην ἐπί τινος πίνακος ὁριζοντίου, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν, αἵτινες θὰ ἔλθωσιν ἐπάνω, θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 7;

Ἅπασαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 36 (διότι ἕκαστος ἀριθμὸς τοῦ ἑνὸς κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μεθ' ἑκάστου ἀριθμοῦ τοῦ δευτέρου) ἐκ δὲ τούτων αἱ τὸ ἄθροισμα 7 περιέχουσαι εἶνε 6 (αἱ ἑξῆς $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$)· ὥστε ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνε $\frac{1}{6}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα 5 εἶνε $\frac{1}{9}$, ἡ δὲ πιθανότης τοῦ νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα 4 εἶνε $\frac{1}{12}$.

5) Ἐὰν ῥίψωμεν τρεῖς κύβους συγχρόνως, ποία εἶνε ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι εἰς ἕνα, καὶ μόνον εἰς ἕνα, θὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 1;

Ἅπασαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 6^3· (διότι ἑκάστη ἕδρα τοῦ πρώτου κύβου Α δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάστην τοῦ δευτέρου Β καὶ ἕκαστος συνδυασμὸς τῶν δύο πρώτων δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάστην ἕδραν τοῦ τρίτου Γ). Ἐκ τούτων αἱ ἔχουσαι τὸν ἀριθμὸν 1 ἅπαξ μόνον εἶνε $25+25+25$ (διότι ὁ ἀριθμὸς 1 τοῦ πρώτου κύβου Α δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάστην τῶν 5 ἑδρῶν τῶν δύο ἄλλων κύβων, ὅτε προκύπτουσιν 25 εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις· ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 1 τοῦ δευτέρου κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάστην τῶν 5 ἑδρῶν τῶν δύο ἄλλων κύβων, καὶ τοῦ τρίτου κύβου ὡσαύτως)· ὥστε ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνε $\frac{75}{216}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἔχωμεν εἰς δύο κύβους καὶ εἰς δύο μόνον τὸν ἀριθμὸν 1 εἶνε $\frac{15}{216}$.

Ἡ δὲ πιθανότης τοῦ νὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 1 ἅπαξ ἢ πολλάκις εἶνε $\frac{91}{216}$.

6) Ἐὰν ῥίψωμεν δύο κύβους δίς, ποία εἶνε ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι καὶ τὰς δύο φορὰς θὰ εὕρωμεν τὸν συνδυασμὸν $6+6$;

Ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εὕρωμεν τὴν πρώτην φορὰν $6+6$ εἶνε $\frac{1}{36}$· ἀλλά, καὶ ἐὰν τοῦτο γίνῃ, πάλιν τὴν δευτέραν φορὰν ἅπασαι αἱ 36 περιπτώσεις εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί, ἔχουσι δὲ ὅλαι ὁμοῦ τὴν πιθανότητα $\frac{1}{36}$· ὥστε ἡ πιθανότης ἑκάστης εἶνε $\frac{1}{36^2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον μόνον μίαν περίπτωσιν ἔχει εὐνοϊκήν, ἕπεται, ὅτι ἡ πιθανότης αὐτοῦ εἶνε $\frac{1}{36^2}$ ἢ $\frac{1}{1296}$.

7) Εἰς τινα κάλπην εἶνε οἱ ἑκατὸν ἀριθμοὶ 1, 2, 3,...100· ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων θὰ ἐξαχθῶσι τρεῖς κατὰ τύχην καὶ ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον· πόση πιθανότης ὑπάρχει, ὅτι οἱ ἐξαχθησόμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ 1, 2, 3 (ἤτοι πρῶτος ὁ 1, δεύτερος ὁ 2 καὶ τρίτος ὁ 3);

Ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ ἐξαχθῇ πρῶτος ὁ 1 εἶνε $\frac{1}{100}$ (διότι πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἴσην πιθανότητα). Καὶ τούτου γενομένου μένουσιν ἐν τῇ κάλπῃ 99 ἀριθμοὶ (διότι ὁ ἐξαχθεὶς δὲν ἐπιστρέφεται πλέον) καὶ ἑκα-

στος τούτων ἔχει ἴσην πιθανότητα νὰ ἐξαχθῇ· ἐπειδὴ δὲ ἡ πιθανότης ὅλων εἶνε $\frac{1}{100}$, ἕπεται, ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ δεύτερος ὁ 2 (ἀφοῦ ἐξαχθῇ πρῶτος ὁ 1) εἶνε $\frac{1}{100}.\frac{1}{99}$. Καὶ τούτου δὲ γενομένου, μένουσιν ἐν τῇ κάλπῃ 98 ἀριθμοὶ καὶ ἕκαστος ἔχει ἴσην πιθανότητα· ὅλαι δὲ ὁμοῦ αἱ πιθανότητες συναποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{100}.\frac{1}{99}$· ὥστε ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῶσι κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, εἶνε $\frac{1}{100}.\frac{1}{99}.\frac{1}{98}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3 καθ' οἱανδήποτε τάξιν εἶνε $\frac{3}{100}.\frac{2}{99}.\frac{1}{98}$.

8) Τῶν αὐτῶν ὄντων, ποία εἶνε ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι οἱ τρεῖς ἐξαχθησόμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε ἐφεξῆς;

Ἐὰν πρέπῃ νὰ ἐξαχθῶσι κατὰ σειράν, ἤτοι πρῶτον ὁ μικρότερος, ἔπειτα ὁ μεσαῖος καὶ τρίτος ὁ μεγαλήτερος, ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{1}{100}.\frac{1}{99}$· διότι τοῦτο γίνεται, μόνον ἂν ἐξαχθῶσιν οἱ 1, 2, 3, ἢ οἱ 2, 3, 4, ἢ οἱ 3, 4, 5.. ἢ τέλος οἱ 98, 99, 100 ἑκάστη δὲ τριὰς ἔχει πιθανότητα νὰ ἐξαχθῇ $\frac{1}{100}.\frac{1}{99}.\frac{1}{98}$.

Ἐὰν ὅμως ἡ τάξις εἶνε ἀδιάφορος, ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{6}{100.99}$.

9) Ῥίπτομεν ἓν νόμισμα κατὰ τύχην τρεῖς φοράς· ποία εἶνε ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι καὶ τὰς τρεῖς φορὰς πεσὸν τὸ νόμισμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θὰ δείξῃ τὸ πρόσωπον; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{2^3}\right)$.

10) Ῥίπτομεν δύο νομίσματα ν φοράς· εἶνε ποία εἶνε ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι ἀμφότερα καὶ τὰς ν φορὰς θὰ δεικνύωσιν ἀδιαλείπτως τὸ πρόσωπον; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{4^{\nu}}\right)$.

11) Ἐάν τις γράψῃ τυχαίως ἕνα ὀκταψήφιον ἀριθμόν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ θὰ εἶνε διάφορα ἀπ' ἀλλήλων; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{2000000}\right)$.

12) Ἐὰν γραμμὴ ἔχουσα μῆκος α τμηθῇ ὡς ἔτυχεν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ὅτι τὰ δύο τμήματα θὰ διαφέρωσιν ὀλιγώτερον τοῦ δοθέντος μήκους μ; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\mu}{\alpha}\right)$.

13) Ἐὰν ρίψωμεν ἓν νόμισμα ν φοράς, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ὅτι θὰ παρουσιασθῇ α φορὰς τὸ πρόσωπον ἐν συνόλῳ καὶ β φορὰς τὸ στέμμα; (ἀδιάφορον κατὰ ποίαν τάξιν).

Ὁ ἀριθμὸς πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶνε προφανῶς 2^ν (διότι τὴν πρώτην φορὰν ἔχομεν δύο περιπτώσεις, ἑκάστη δὲ τούτων τὴν δευτέραν φορὰν δίδει πάλιν δύο, καὶ οὕτω καθεξῆς)· Ἀλλ' ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δύναται καὶ ἄλλως νὰ εὑρεθῇ· ἐὰν δηλαδὴ διὰ τοῦ π παριστῶμεν τὸ πρόσωπον καὶ διὰ τοῦ σ τὸ στέμμα, πρόδηλον εἶνε, ὅτι τόσαι περιπτώσεις δυναταὶ ὑπάρχουσιν, ὅσα γινόμενα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐκ ν παραγόντων, ὧν ἕκαστος εἶνε ἢ π ἢ σ. Πάντα δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα εἶνε ὅροι τοῦ γινομένου $(\pi+\sigma)^\nu$ πρὸ τῆς ἀναγωγῆς· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου τούτου, οἵτινες ἔχουσιν α φορὰς τὸ π (ἑπομένως β φορὰς τὸ σ)· ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων $\pi^\alpha\sigma^\beta$· ὁ ἀριθμὸς οὗτος δεικνύεται ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ, ὃν ἔχει τὸ $\pi^\alpha\sigma^\beta$ ἐν τῷ ἀναπτύγματι τοῦ διωνύμου $(\pi+\sigma)^\nu$, ὅστις εἶνε $\frac{1.2\ldots\nu}{(1.2.3.\,\alpha)(1.2.3..\beta)}$.

ὅθεν ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνε

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\nu}{(1.2.3..\alpha)\,(1.2.3..\beta)}\cdot\frac{1}{2^\nu}.$$

Ἐὰν λ. χ. ρίψωμεν τὸ νόμισμα 10 φοράς, ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εὕρωμεν

$\pi=$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$\sigma=$10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

εἶνε $\frac{1}{2^{10}}, \frac{10}{2^{10}}, \frac{45}{2^{10}}, \frac{120}{2^{10}}, \frac{210}{2^{10}}, \frac{252}{2^{10}}, \frac{210}{2^{10}}, \frac{120}{2^{10}}, \frac{45}{2^{10}}, \frac{10}{2^{10}}, \frac{1}{2^{10}}.$

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1900

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρῶται ἔννοιαι.

1. Πάντες ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ *ἑνὸς* καὶ *τῶν πολλῶν* ἢ *τοῦ πλήθους*.

Ὅταν συγκρίνωμεν πλῆθος συγκείμενον ἐκ πραγμάτων ὁμοίων (ἢ τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν) πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων τούτων, σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ἀριθμοῦ*.

Ἀριθμὸς εἶνε ἡ ἔννοια, δι' ἧς ὁρίζομεν τὸ πλῆθος, ἤτοι ἐκφράζομεν πόσα εἶνε τὰ πράγματα, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πλῆθος.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν λέγωμεν: πέντε ἄνθρωποι, τρία πρόβατα, αἱ λέξεις *πέντε*, *τρία*, ἐκφράζουσιν ἀριθμούς.

Τὸ ἓν τῶν πραγμάτων, πρὸς ὃ συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται *μονάς*.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη *περὶ τῶν ἀριθμῶν*.

Ἀρίθμησις.

2. *Ἀρίθμησις* πλήθους τινὸς λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ὁρίζει αὐτό. Λέγεται ὅμως ἀρίθμησις καὶ ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν.

Ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν καὶ γραφὴ αὐτῶν δι' ἰδιαιτέρων σημείων.

3. Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται *ἓν* καὶ γράφεται διὰ τοῦ σημείου 1.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς *δύο*, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ σημείου 2.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμος *τρία*, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον (δηλαδὴ προσθέτοντες τὴν μονάδα) σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς *τέσσαρα* (4), *πέντε* (5), *ἕξ* (6), *ἑπτὰ* (7), *ὀκτὼ* (8), *ἐννέα* (9) *δέκα*.

Εἶνε δὲ φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλωμεν, σχηματίζοντες ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ ἄλλον ἔχοντα μίαν μονάδα περισσότερον.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον πᾶς ἀριθμὸς ἐμφανίζεται ὡς συγκείμενος ἐκ μονάδων, ἤτοι ὡς πλῆθος μονάδων.

4. Ἀλλ' ἐὰν εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν ἐδίδομεν ἴδιον ὄνομα (ὡς ἐκάμαμεν διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἕν, δύο. . .μέχρι τοῦ δέκα), θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐνθυμώμεθα τόσα ὀνόματα. Διὰ τοῦτο οἱ ἄνθρωποι ἐπενόησαν τρόπον νὰ ἐκφράζωσι τοὺς ἀριθμοὺς δι' ὀλίγον διαφόρων λέξεων καὶ νὰ γράφωσιν αὐτοὺς δι' ὀλίγων σημείων ἢ ψηφίων· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἀριθμοί τινες λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες καὶ ἐξ αὐτῶν συντίθενται οἱ ἄλλοι.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἢ αἱ νέαι αὗται μονάδες, σχηματίζονται ὡς ἑξῆς.

Τὸν ἀριθμὸν δέκα θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, ἣν καλοῦμεν *δεκάδα*, ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα δεκάδων συγκείμενον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν *ἑκατόν*, θεωροῦμεν πάλιν ὡς νέαν μονάδα, καὶ καλοῦμεν αὐτὴν *ἑκατοντάδα*, ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα ἑκατοντάδων συγκείμενον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν *χίλια*, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, καὶ καλοῦμεν *χιλιάδα*.

Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν σχηματίζοντες ἐκ δέκα μονάδων μίαν νέαν μονάδα καὶ ἔχομεν τὰς ἑξῆς μονάδας·

μονὰς (ἁπλῆ)
δεκὰς
ἑκατοντὰς
χιλιὰς
δεκὰς χιλιάδων ἢ μυριὰς
ἑκατοντὰς χιλιάδων
μονὰς ἑκατομμυρίου

δεκὰς ἑκατομμυρίου
ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου
μονὰς δισεκατομμυρίου
δεκὰς δισεκατομμυρίου
ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίου
μονὰς τρισεκατομμυρίου
κτλ. κτλ.

5. Ἡ ἁπλῆ μονὰς λέγεται μονὰς *πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς λέγεται μονὰς *δευτέρας τάξεως*, ἡ ἑκατοντὰς *τρίτης*, ἡ χιλιὰς *τετάρτης*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

6. Δυνάμεθα τώρα νὰ δείξωμεν, ὅτι *πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα.*

Διότι ἃς φαντασθῇ τις οἱονδήποτε θέλῃ ἀριθμὸν (παραδείγματος χάριν τὸν ἀριθμὸν τῶν εἴς τινα σάκκον περιεχομένων κόκκων σίτου)· ἐὰν ἑνώσωμεν δέκα μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν μίαν δεκάδα· ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ἄλλας δέκα μονάδας, θὰ σχηματίσωμεν μίαν νέαν δεκάδα· καὶ ἐὰν οὕτως ἐξακολουθῶμεν, θὰ χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δεκάδας· θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ μονάδες ἁπλαῖ (ἂν περισσεύσουν), ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα· διότι, ἂν ἔμενον δέκα, θὰ ἐγίνετο ἐξ αὐτῶν ἄλλη μία δεκάς.

Ἐὰν ἔπειτα κάμωμεν εἰς τὰς δεκάδας ὅ,τι ἐκάμαμεν εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἐὰν δηλονότι ἑνώσωμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν ἑκατοντάδας τινὰς καὶ θὰ μείνωσιν (ἂν μείνωσι) καί τινες δεκάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ὁμοίως καὶ τὰς ἑκατοντάδας, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν χιλιάδας τινάς· ἐνδέχεται δὲ νὰ μείνωσι καί τινες ἑκατοντάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς τάξιν τινὰ μονάδων, ἥτις δὲν θὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν μονὰς ἀνωτέρας τάξεως (θὰ συμβῇ δὲ τοῦτο· διότι εἰς ἑκάστην τάξιν, ὅσον προχωροῦμεν, τόσον αἱ μονάδες γίνονται ὀλιγώτεραι). Τότε ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶνε ἀναλελυμένος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν θὰ εἶνε μονάδες ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς

δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἐκ μηδεμιᾶς περισσότεραι τῶν ἐννέα.

7. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ἵνα ἐκφράσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ δηλώσωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει.

Παραδείγματος χάριν, ἀριθμός τις εἶνε ἐντελῶς εἰς ἡμᾶς γνωστὸς καὶ ὡρισμένος, ὅταν εἰξεύρωμεν, ὅτι σύγκειται ἐκ
πέντε χιλιάδων, ὀκτὼ ἑκατοντάδων, ἑπτὰ δεκάδων καὶ ἓξ μονάδων.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δυνάμεθα δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν· διότι ἀρκοῦσι τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

8. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὴν γραφὴν αὐτῶν διὰ τῶν σημείων ἢ ψηφίων.

Ἐὰν τῷ ὄντι γράφωμεν διὰ τῶν ἐννέα ψηφίων τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως (ὅστις ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἐννέα) καὶ προσαρτῶμεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ, δηλοῦται ἐπαρκῶς πᾶς ἀριθμός· οἷον·

6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες.
5 ἑκατοντάδες 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες.
3 χιλιάδες 2 ἑκατοντάδες 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες.

Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ ἕκαστον ψηφίον, εἶνε περιττὸν νὰ γράφηται· διότι τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τῆς θέσεως τοῦ ψηφίου, ὅταν τὰ ψηφία γράφωσι κατὰ σειράν· οἷον

ἀντὶ : 6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες, γράφεται 67.
ἀντὶ : 5 ἑκατοντ. 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες, γράφεται 539.
ἀντὶ : 3 χιλ. 2 ἑκατοντ. 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες, γράφεται 3284.

κάμνομεν δηλαδὴ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. *Ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον ὄπισθεν ἄλλου* (πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ) *δηλοῖ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον·* ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον δηλοῖ ἁπλᾶς μονάδας ἢ πρώτης τάξεως, τὸ προτελευταῖον δηλοῖ δεκάδας ἢ μονάδας δευτέρας τάξεως, τὸ πρὸ αὐτοῦ δηλοῖ ἑκατοντάδας ἢ μονάδας τρίτης τάξεως, τὸ πρὸ τούτου δὲ χιλιάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ἡ σημασία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεώς του.

9. Ὅταν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον γράφομεν διὰ ψηφίων, δὲν ἔχῃ

μονάδας τάξεώς τινος, ἡ θέσις τῶν μονάδων τῆς τάξεως ταύτης δὲν πρέπει νὰ μένῃ κενή· διότι τότε τὰ προηγούμενα ψηφία χάνουσι τὴν θέσιν των καὶ ὑποβιβάζονται.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γραφῇ ὡς ἑξῆς : 57,

τὸ ψηφίον 5 κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην συνθήκην δηλοῖ 5 δεκάδας καὶ ὄχι ἑκατοντάδας· πρέπει λοιπὸν νὰ γραφῇ σημεῖόν τι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ 5 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων· διὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ σημεῖον 0 (μηδὲν ἢ μηδενικόν), ὅπερ αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δὲν ἔχει ἀξίαν, χρησιμεύει δὲ μόνον εἰς τὸ νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἵτινες λείπουσιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ· (τὰ λοιπὰ ψηφία ὡς ἔχοντα ἀξίαν λέγονται πρὸς διάκρισιν *σημαντικὰ* ψηφία)*.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γράφεται 507.

ὁ ἀριθμὸς 8 χιλιάδες καὶ 5 δεκάδες γράφεται 8050.

ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 ἑκατομμύρια 4 χιλιάδες γράφεται 4004000.

ἐπίσης 5870 σημαίνει

5 χιλιάδας 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

τὸ δὲ 13870 σημαίνει

1 μυριάδα 3 χιλιάδας 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ὡς ἑξῆς.

1, 10, 100, 1000, 10000 κτλ.

10. Ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἶνε μία ἐκ τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τοῦ ἀνθρώπου· διότι καὶ σύντομος εἶνε καὶ δέκα μόνον σημεῖα χρειάζεται (διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὰς πράξεις τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ εὐκολωτέρας), ἐν ᾧ ἡ διὰ λέξεων γραφὴ αὐτῶν καὶ μακροτέρα εἶνε καὶ μέγα πλῆθος λέξεων ἀπαιτεῖ. Στηρίζεται δὲ ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφή, ὡς εἴδομεν, πρῶτον μὲν ἐπὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω εἰρημένης συμφωνίας (ἐδ. 8).

* Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται καὶ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες· διότι ἡμεῖς ἐμάθομεν αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ.). Ἡ ἐφεύρεσις ὅμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶνε ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες.

Σημείωσις.

Ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ὡς ἐξετέθη ἐν τοῖς προηγουμένοις, εἶνε θεωρητικῶς τελεία· ἀλλ' ἐν ἑκάστῃ γλώσσῃ γίνονται τροποποιήσεις τινὲς εἰς τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν· μένουσι λοιπὸν λεπτομέρειαί τινες πρὸς συμπλήρωσιν τῶν περὶ ὀνοματολογίας εἰρημένων.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς λέξεων: *δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα.*

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς. *ἑκατόν, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐνεακόσια.*

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια δύνανται νὰ περιέχωσιν ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς, τὸ δὲ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἁπλῶν μονάδων του· παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει δύο δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας, ἀπαγγέλλεται *εἴκοσι ὀκτώ*· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια τριάκοντα ἑπτά*· καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ δύο δεκάδας, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια εἴκοσι.*

Ἀντὶ δέκα ἕν, δέκα δύο, λέγομεν ἕνδεκα, δώδεκα.

Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου περιεχόμενοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἔχωσιν ἑκατοντάδας χιλιάδος, δεκάδας χιλιάδος καὶ μονάδας χιλιάδος, ἔτι δὲ καὶ ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς· τουτέστι σύγκεινται ἔκ τινων χιλιάδων (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶνε ὀλιγώτεραι τῶν χιλίων· διότι χίλιαι χιλιάδες ἀποτελοῦσιν ἓν ἑκατομμύριον) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος δύναται καὶ νὰ λείπῃ) καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν δύο μερῶν του, οἷον ὁ ἀριθμὸς 215873 ἀπαγγέλλεται: διακόσιαι δέκα πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα τρία.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 610307 ἀπαγγέλλεται: ἑξακόσιαι δέκα χιλιάδες καὶ τριακόσια ἑπτά, ὁ δὲ ἀριθμὸς 67000 ἀπαγγέλλεται: ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες.

Οἱ μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ σύγκεινται ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑκατομμυρίων (ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ χίλια) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ χιλιάδων (ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ χίλια καὶ δύναται καὶ ὅλως νὰ λείπῃ) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τὰ χίλια (ὅστις δύναται καὶ νὰ λείπῃ)· καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ὀνομάτων τῶν τριῶν μερῶν του· οἷον ὁ ἀριθμὸς 315897504 ἀπαγγέλλεται: τριακόσια δέκα πέντε ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιαι ἐνενήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ πεντακόσια τέσσαρα· ὁ δὲ ἀριθμὸς 58004310 ἀπαγγέλλεται: πεντήκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια, τέσσαρες χιλιάδες καὶ τριακόσια δέκα.

Ὁμοίως σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς τρισεκατομμυρίου περιεχομένων· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς συγκειμένους ἐκ μερῶν, τὰ ὁποῖα εἶνε μονάδες, χιλιάδες, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια, κτλ. Αἱ μονάδες αὗται, ἤτοι οἱ ἀριθμοί, *ἕν*, *χίλια*, *ἑκατομμύριον*, κτλ. λέγονται *πρωτεύουσαι*, καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ χιλίων μονάδων τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως.

Περὶ διαφόρων συστημάτων ἀριθμήσεως.

11. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν ἀρχῇ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων συντίθενται οἱ ἀριθμοί, προχωροῦσιν οὕτως, ὥστε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶνε δεκαπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης· δηλαδὴ ἑκάστη περιέχει δεκάκις τὴν προηγουμένην. Ἐκφράζομεν δὲ ἕκαστον ἀριθμὸν δεικνύοντες πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Εἰς δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων, ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἔκ τινος τάξεως περισσότεραι τῶν ἐννέα, παραδεχόμεθα ἐννέα σημεῖα ἢ ψηφία πρὸς παράστασιν τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ συμφωνοῦμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ ψηφίον θὰ παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν θέσιν αὐτοῦ· ἤτοι ἁπλᾶς μὲν μονάδας, ἐὰν κατέχῃ τὴν πρώτην ἐκ δεξιῶν θέσιν· δεκάδας δέ, ἐὰν κατέχῃ τὴν δευτέραν θέσιν, ἑκατοντάδας, ἐὰν τὴν τρίτην, καὶ οὕτω καθεξῆς. Στηριζόμενοι δὲ εἰς τὴν συνθήκην ταύτην (καὶ εἰς τὸν

σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν διὰ ψηφίων· διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ γράψωμεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐπειδὴ ὅμως εἶνε δυνατὸν ὁ ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος (ἐκ τῶν κατόπιν τῆς ἀνωτάτης ἐρχομένων), διὰ τοῦτο χρειάζεται καὶ δέκατον σημεῖον, τὸ 0, τὸ ὁποῖον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας δὲν ἔχει ὁ ἀριθμός.

12. Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἠδύναντο καὶ ἄλλως νὰ σχηματισθῶσιν· ἠδυνάμεθα π. χ. ἀντὶ νὰ λάβωμεν κατὰ προτίμησιν τὸν 10, νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, οἷον τὸν 8, καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων οὕτως, ὥστε ἑκάστη νὰ εἶνε ὀκταπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης, δηλαδὴ νὰ περιέχῃ αὐτὴν ὀκτάκις· τότε μονὰς δευτέρας τάξεως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ (ἢ ἡ ὀκτάς), μονὰς τρίτης τάξεως ὁ ὀκτάκις ὀκτώ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τότε δέ, ἵνα ἐκφράσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ λέξεων, πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὰς διαφόρους ταύτας μονάδας ἴδια ὀνόματα· καὶ νὰ δεικνύωμεν δι' ἕκαστον ἀριθμὸν πόσας μονάδας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει· θὰ περιέχῃ δὲ τότε πᾶς ἀριθμὸς ὀλιγωτέρας τῶν ὀκτὼ μονάδων ἐξ ἑκάστης τάξεως· (ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκόμη μονὰς τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας). Διὰ δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν αὐτὴν συμφωνίαν, (ὅτι δηλαδὴ τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν θέσιν του), θὰ ἐχρειάζοντο τότε μόνον ὀκτὼ σημεῖα· τουτέστι τὰ ἑπτὰ πρῶτα σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ 0.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ θὰ γράφηται ὡς ἑξῆς· 10, ὁ ἐννέα 11, ὁ δέκα 12, κτλ. ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ 100· ὁ δὲ ἑκατὸν ὡς ἑξῆς 144, κτλ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσιν ἄπειρα συστήματα ἀριθμήσεως διακρινόμενα ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῆς *βάσεως*, ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀκολούθου.

Εἰς πᾶν δὲ σύστημα ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 12, 17, 40 εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ('Απ. 14, 21, 50).

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος 70, 107, 43 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ. ('Απ. 56, 71, 35).

3) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς χίλια εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα ('Απ. 1111101000).

4) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ ('Απ. 42).

5) 'Εὰν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα δύο ἢ περισσότερα ψηφία παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας δεκάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ πρῶτος· ἤτοι πόσας δεκάδας ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες του ἑνούμεναι ἀνὰ δέκα.

'Εὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὁ προκύπτων νέος ἀριθμὸς δεικνύει πόσας ἑκατοντάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

'Εὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ τρία τελευταῖα, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δεικνύει πόσας χιλιάδας περιέχει ὁ δοθείς· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 58709 περιέχει ἐν συνόλῳ δεκάδας μὲν 5870, ἑκατοντάδας δὲ 587, χιλιάδας δὲ 58, μυριάδας δὲ 5.

6) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος 100, 200, 210 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ πενταδικοῦ ('Απ. 14, 33, 41).

σχηματισμόν τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν διὰ ψηφίων· διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ γράψωμεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐπειδὴ ὅμως εἶνε δυνατὸν ὁ ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος (ἐκ τῶν κατόπιν τῆς ἀνωτάτης ἐρχομένων), διὰ τοῦτο χρειάζεται καὶ δέκατον σημεῖον, τὸ 0, τὸ ὁποῖον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας δὲν ἔχει ὁ ἀριθμός.

12. Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἠδύναντο καὶ ἄλλως νὰ σχηματισθῶσιν· ἠδυνάμεθα π. χ. ἀντὶ νὰ λάβωμεν κατὰ προτίμησιν τὸν 10, νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, οἷον τὸν 8, καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων οὕτως, ὥστε ἑκάστη νὰ εἶνε ὀκταπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης, δηλαδὴ νὰ περιέχῃ αὐτὴν ὀκτάκις· τότε μονὰς δευτέρας τάξεως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ (ἢ ἡ ὀκτάς), μονὰς τρίτης τάξεως ὁ ὀκτάκις ὀκτώ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τότε δέ, ἵνα ἐκφράσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ λέξεων, πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὰς διαφόρους ταύτας μονάδας ἴδια ὀνόματα· καὶ νὰ δεικνύωμεν δι' ἕκαστον ἀριθμὸν πόσας μονάδας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει· θὰ περιέχῃ δὲ τότε πᾶς ἀριθμὸς ὀλιγωτέρας τῶν ὀκτὼ μονάδων ἐξ ἑκάστης τάξεως· (ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκόμη μονὰς τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας). Διὰ δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν αὐτὴν συμφωνίαν, (ὅτι δηλαδὴ τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν θέσιν του), θὰ ἐχρειάζοντο τότε μόνον ὀκτὼ σημεῖα· τουτέστι τὰ ἑπτὰ πρῶτα σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ 0.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ θὰ γράφηται ὡς ἑξῆς· 10, ὁ ἐννέα 11, ὁ δέκα 12, κτλ. ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ 100· ὁ δὲ ἑκατὸν ὡς ἑξῆς 144, κτλ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσιν ἄπειρα συστήματα ἀριθμήσεως διακρινόμενα ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῆς *βάσεως*, ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀκολούθου.

Εἰς πᾶν δὲ σύστημα ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 12, 17, 40 εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ('Απ. 14, 21, 50).

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος 70, 107, 43 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ. ('Απ. 56, 71, 35).

3) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς χίλια εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα ('Απ. 1111101000).

4) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ ('Απ. 42).

5) Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα δύο ἢ περισσότερα ψηφία παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας δεκάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ πρῶτος· ἤτοι πόσας δεκάδας ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες του ἑνούμεναι ἀνὰ δέκα.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὁ προκύπτων νέος ἀριθμὸς δεικνύει πόσας ἑκατοντάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ τρία τελευταῖα, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δεικνύει πόσας χιλιάδας περιέχει ὁ δοθείς· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 58709 περιέχει ἐν συνόλῳ δεκάδας μὲν 5870, ἑκατοντάδας δὲ 587, χιλιάδας δὲ 58, μυριάδας δὲ 5.

6) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος 100, 200, 210 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ πενταδικοῦ ('Απ. 14, 33, 41).

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

13. [illegible] τοῦ ἑνὸς ἔχῃ [illegible]

[illegible]

14. [illegible] δὲν ἔχωσιν [illegible]

[illegible]

15. [illegible]

[illegible]

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶνε ὁμοίως ἄνισοι, καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶνε ὁμοίως ἄνισοι, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν δηλαδὴ λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων δύο φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἄνισοι (ἐκ τοῦ μεγαλητέρου ὁ μεγαλήτερος)· καὶ ἂν λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων τρεῖς φοράς, προκύπτουσιν ὁμοίως ἄνισοι· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁρισμοί.

Ἀξίωμα λέγεται πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Ἀξίωμα λόγου χάριν εἶνε ἡ ἑξῆς πρότασις.

Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἑνωθῇ πλῆθός τι μονάδων, πάντοτε ἀποτελεῖται ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

ἢ καὶ ἡ ἑξῆς.

Παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μεγαλήτερος.

Ἀπόδειξις λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα, ὅτι πρότασίς τις εἶνε ἀληθής.

Θεώρημα δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

Θεώρημα λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἑξῆς πρότασις.

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν νὰ μὴ εἶνε περισσότεραι τῶν ἐννέα· (τὴν ἀπόδειξιν ἰδὲ εἰς τὸ ἐδ. 6).

Πόρισμα δὲ λέγεται πρότασις στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

Πρόβλημα ἀριθμητικὸν λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται ἐκ δοθέντων ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ἄλλος ἀριθμὸς ἢ ἄλλοι ἀριθμοί.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

16. *Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.*

Οἱ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *κεφάλαιον* ἢ *ἄθροισμα*.

Τὸ ἄθροισμα σημειοῦται, ἐὰν γραφῶσιν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν καὶ τεθῇ μεταξὺ ἑκάστου αὐτῶν καὶ τοῦ ἑπομένου τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως, ἤτοι τὸ $+$· (ὅπερ ἀναγινώσκεται *σύν*).

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8 παρίσταται ὡς ἑξῆς $5+8$· ἀναγινώσκεται δὲ πέντε σὺν ὀκτώ.

17. Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι εἶνε δεδομέναι πᾶσαι αἱ μονάδες, αἵτινες θὰ ἀποτελέσωσιν αὐτόν. *Εἶνε λοιπὸν ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσι πᾶσαι.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ ὑποτίθεται ὅτι παριστῶσιν ὁμοειδῆ ποσά· καὶ τὸ ἄθροισμα εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς· ἀλλὰ τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν οἱ ἀριθμοί, εἶνε ἀδιάφορα ὡς πρὸς τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν ἐπ' αὐτῶν, καὶ ὡς πρὸς τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους· καθώς, λόγου χάριν, δύο πρόβατα καὶ δύο

πρόβατα κάμνουν τέσσαρα πρόβατα, οὕτω καὶ δύο μῆλα καὶ δύο μῆλα κάμνουν τέσσαρα μῆλα, και οὕτω καθεξῆς, πάντοτε δύο καὶ δύο κάμνουν τέσσαρα, ἀρκεῖ νὰ εἶνε ὁμοειδῆ. Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἀριθμητικῇ θεωροῦμεν συνήθως τοὺς ἀριθμοὺς ὡς *ἀφῃρημένους*, δηλαδὴ ὡς ἀριθμοὺς ἁπλῶς, χωρὶς νὰ ὁρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσιν, οἷον ὀκτώ, δύο, δέκα κτλ. Ὅταν δὲ ὁρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσι, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται *συγκεκριμένοι*· οἷον ὀκτὼ ἄνθρωποι, τρία ἔτη, πέντε ὀκάδες κτλ.

Πρόσθεσις κατὰ τὰς ἁπλουστάτας περιπτώσεις.

18. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, οἷον τοὺς 7 καὶ 3. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, προσθέτομεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην· ἤτοι λέγομεν: 7 καὶ 1 κάμνουν 8, καὶ 1 κάμνουν 9, καὶ 1 κάμνουν 10.

Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 3 τὰς μονάδας τοῦ 7· εἶνε δὲ προφανές, ὅτι θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10· διότι τὸ ἄθροισμα σχηματίζεται ἐξ 7 μονάδων καὶ ἐκ 3 μονάδων· εἶνε δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν πρόσθεσιν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ ἐνθυμώμεθα τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν.

19. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν ἕνα ἄλλον· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα ἕνα ἄλλον· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 2, 5, 6, 9, λέγομεν 6 καὶ 8 κάμνουν 14, 14 καὶ 2 κάμνουν 16· 16 καὶ 5 κάμνουν 21· 21 καὶ 6 κάμνουν 27· καὶ τέλος 27 καὶ 9 κάμνουν 36· (τὰς διαδοχικὰς ταύτας προσθέσεις ἐκτελοῦμεν ἢ ἀπὸ μνήμης ἢ προσθέτοντες εἰς τὸν πολυψήφιον τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου μίαν μετ' ἄλλην)· ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶνε 36.

Σημειωτέον δέ, ὅτι, καὶ κατ' ἄλλην τάξιν οἱανδήποτε ἂν λάβωμεν καὶ προσθέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ

εὕρωμεν· διότι τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· εἶνε δὲ ἀδιάφορον πῶς θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· λόγου χάριν ἠδυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ 6 καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸν 9, ὅτε τοῦτο γίνεται 10, τὸ δὲ 6 γίνεται 5· τότε τὰ δύο 5 κάμνουν καὶ ἄλλο 10· καὶ τὸ 8 καὶ 2 κάμνουν ἄλλο 10· ἔχομεν λοιπὸν 30· τοῦτο μετὰ τοῦ ἄλλου 6 ἀποτελεῖ τέλος τὸν 36.

Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

20. Πᾶσα πρόσθεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἁπλῆν πρόσθεσιν μονοψηφίων ἀριθμῶν· διότι εἶνε φανερόν, ὅτι, ἵνα προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ., καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα· διότι τότε ἑνοῦνται πᾶσαι αἱ μονάδες τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ σχηματίζουσιν ἕνα μόνον, ὅστις θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἃς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

2955 408 1296

Ἡ πρᾶξις, χάριν εὐκολίας, διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 2955 \\ 408 \\ 1296 \\ \hline 4659 \end{array}$$

Γράφομεν δηλονότι τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, καθ' ὅσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας λέγοντες: 6 καὶ 8 κάμνουν 14 καὶ 5 κάμνουν 19· τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶνε λοιπὸν 19 μονάδες· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει μίαν δεκάδα καὶ 9 μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον τὸ

ψηφίον 9 τῶν μονάδων καὶ *κρατοῦμεν* τὴν μίαν δεκάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν δεκάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, λέγομεν: 1 τὸ *κρατούμενον* καὶ 9 κάμνουν 10, καὶ 5 κάμνουν 15· τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶναι λοιπὸν 15 δεκάδες, ἤτοι 1 ἑκατοντὰς καὶ 5 δεκάδες· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 5 τῶν δεκάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὴν δὲ ἑκατοντάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν ἑκατοντάδων τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2 κάμνουν 3, καὶ 4 κάμνουν 7, καὶ 9 κάμνουν 16· τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων εἶνε λοιπὸν 16 ἑκατοντάδες· τουτέστι 1 χιλιὰς καὶ 6 ἑκατοντάδες· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 6 τῶν ἑκατοντάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὴν δὲ μίαν χιλιάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν χιλιάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ 1 κάμνουν 2, καὶ 2 κάμνουν 4· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶνε 4 χιλιάδες καὶ τὸ ψηφίων 4 τῶν χιλιάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε 4659.

Κανὼν τῆς προσθέσεως.

21. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς προθέσεως·

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν. Ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς αὐτῆς στήλης· ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἰς ἑκάστην στήλην δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, εἶνε ἀδιάφορον, ἂν ἀρχίζομεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ

τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερά. ἢ ἂν ἀρχίζομεν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιά. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

```
542
114
321
 12
———
989
```

Ἀλλ' ὅταν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης (ἢ καὶ περισσοτέρων) ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἐὰν ἠρχίζαμεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, θὰ ἤμεθα ἠναγκασμένοι νὰ ἀλλάζωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν· π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

```
4854
 897
1568
————
5
71
...
7319
```

Τὸ ἄθροισμα τῶν μυριάδων εἶνε 5· ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χιλιάδων λαμβάνομεν προσέτι 2 μυριάδας· ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον 5 πρέπει νὰ γίνῃ 7. Ὁμοίως τὸ δεύτερον ψηφίον ἀπὸ 1 πρέπει νὰ γίνῃ 3 κτλ. Διὰ τοῦτο ἀρχόμεθα πάντοτε ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

22. *Βάσανος ἢ δοκιμὴ πράξεώς τινος λέγεται ἄλλη τις πρᾶξις, δι' ἧς ἐξελέγχομεν, ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν προσθέτοντες τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, κατ' ἄλλην τάξιν· ἤτοι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἂν προηγουμένως προεβαίνομεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ καὶ ὅλως ἀτάκτως. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

23. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως, ἐξ ἧς πᾶσαι αἱ ἄλλαι αὐτῆς ἰδιότητες πηγάζουσιν, εἶνε ἡ ἑξῆς.

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσι.

Διότι, ὡς καὶ προηγουμένως παρετηρήσαμεν (ἰδ. 17), τὸ ἄθροισμα θὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν μονάδων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν· πᾶς δὲ ἀριθμός εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένος, ὅταν δοθῶσιν αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσιν αὐτόν.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς.

1) *Δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν*,

δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν προσθετέους τινὰς εἰς ἕνα μόνον.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς 8, 12, 10, 4, 25·

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν προσθετέων 10 καὶ 4 λάβωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 14· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 14, 25 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὡς καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα δύναμαι νὰ προσθέσω τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4, θὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα 14 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ προσθέσω τοὺς ἀριθμοὺς 14, 8, 12, 25· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε προσθετέον δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα·

τουτέστι δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα προσθετέον εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

14, 8, 12, 25

δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τον 14 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν ἄθροισμα.

2) *Ἵνα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.*

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς τὸ ἑξῆς ἄθροισμα·

4+7+10+12·

ἵνα γίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα, δηλαδὴ νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12, καὶ ἔπειτα εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα νὰ προσθέσωμεν τὸν 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 4, 7, 10, 12, 8·
ἢ καὶ τῶν ἑξῆς· 4, 15, 10, 12. (ἰδιότης 1)

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 8 προσετέθη εἰς ἕνα τῶν προσθετέων (τὸν 7) καὶ οὕτω προσετέθη εἰς τὸ ὅλον ἄθροισμα.

2) *Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς προσθετέους ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα

5+12+8 καὶ 7+22·

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν προστεθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ προσθετέοι, δηλαδὴ ἂν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22.

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δροσθετέους 5, 12 καὶ 8 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 5+12+8, ἔτι πὲ καὶ τοὺς προσθετέους 7 καὶ 22 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 7+22, θὰ ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

5+12+8 καὶ 7+22

τουτέστι τὰ δύο ἀθροίσματα· ὥστε τὸ ἄθροισμα τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22, εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰς ἰδιότητας ταύτας μετεχειρίσθημεν ἤδη προηγουμένως, ἵνα ἀναγάγωμεν τὴν πρόσθεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων· πρὸς τοῦτο ἐθεωρήσαμεν ἕκαστον ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

24. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἀφαιρετέος*· ὁ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *ὑπεροχὴ* ἢ *διαφορά*.

Ὁ μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, τὸ ὑπόλοιπον μένει, ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου· ἐὰν λοιπὸν τὰς προσθέσωμεν πάλιν εἰς τὸ ὑπόλοιπον, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸν μειωτέον.

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου (γράφεται δὲ πρῶτος ὁ μειωτέος) καὶ ἀναγινώσκεται *πλήν*· οἷον 8 — 6 σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τοῦ 8 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 6 καὶ ἀναγινώσκεται: ὀκτὼ πλὴν ἕξ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου.

25. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου οἱουδήποτε, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει, ὅταν ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου, εἶνε τὸ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ ἀφαιρέσω 5 ἀπὸ 14, λέγω: 14 πλὴν 1 μένουν 13· 13 πλὴν 1 μένουν 12· 12 πλὴν 1 μένουν 11· 11 πλὴν 1 μένουν 10· 10 πλὴν 1 μένουν 9· ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 9.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσω τὸν 6 ἀπὸ τοῦ 147, ἀφαιρῶ αὐτὸν μόνον ἀπὸ τῶν 7 μονάδων τοῦ 147 καὶ εὑρίσκω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141.

Ὅταν ὁ μειωτέος δὲν εἶνε μέγας ἀριθμός, αἱ ἀφαιρέσεις αὗται γίνονται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· ὥστε λέγομεν ἀμέσως: 9 ἀπὸ 15 μένουν 6· 8 ἀπὸ 17 μένουν 9· καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτω 1· οἷον, 9 ἀπὸ 537 μένουν 528. Ὁμοίως, ὅταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, προσθέτω 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ 1· οἷον 165 καὶ 9 κάμνουν 174.

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ ἄλλου.

26. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἄλλου (μεγαλητέρου) κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον· ὁ τρόπος ὅμως οὗτος διὰ τὴν ἀφαίρεσιν μεγάλων ἀριθμῶν θὰ ἦτο λίαν ἐπίπονος· ἀλλ' εὐκόλως εὑρίσκομεν ἄλλον, δι' οὗ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις συντόμως καὶ εὐκόλως· ὁ τρόπος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο ἰδιοτήτων, ὧν ἡ ἀλήθεια εἶνε προφανής.

1) *Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται*

2) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλλεπαλλήλως τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του, τὰς ἑκατοντάδας του κτλ.* ἤγουν, *ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ μέρη του.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, ἔστω ἀπὸ τοῦ 47, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 2 μονάδας (ὅτε μένουν 45) καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 45, ὅστις μένει, νὰ ἀφαιρέσω τὴν μίαν δεκάδα (ὅτε μένουν 35).

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τούτων, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς ἄλλας μερικὰς ἀφαιρέσεις, ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων ὁ ἀφαιρετέος δὲν ὑπερβαίνει τὸν 10. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὸν πρόσθεσιν· ἔπειτα κάμνομεν, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Παράδειγμα Α΄. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 512 ἀπὸ τοῦ 945.

$$\begin{array}{r} 945 \\ 512 \\ \hline 433 \end{array}$$

Κατὰ πρῶτον ἀφαιροῦμεν τὰς δύο μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου (λέγοντες 2 ἀπὸ 5 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὴν μίαν δεκάδα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 4 δεκάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες 1 ἀπὸ 4 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 δεκάδας, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τέλος ἀφαιροῦμεν τὰς 5 ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν 9 ἑκατοντάδων καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τὰς 4 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 433· διότι τοῦτο εὑρήκαμεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ μειωτέου 945 πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου 512.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τῶν μονάδων.

Παράδειγμα Β'. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 8472 ἀπὸ τοῦ 29548.

$$\begin{array}{r} 29548 \\ 8472 \\ \hline 21076 \end{array}$$

Λέγομεν: 2 μονάδες ἀπὸ 8 μονάδων μένουν 6 μονάδες· 7 δεκάδες ἀπὸ 4 δεκάδων *δὲν ἀφαιροῦνται*· διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δεκάδας, ὥστε αἱ 4 δεκάδες του γίνονται 14, καὶ ἔπειτα λέγομεν 7 ἀπὸ 14 μένουν 7· ἀλλὰ τώρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας (διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά), ἢ ἀντ' αὐτῶν μίαν ἑκατοντάδα· λέγομεν λοιπόν: ἓν τὸ κρατούμενον καὶ 4 κάμνουν 5, ἀπὸ 5 μένει 0· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 8 χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 9 χιλιάδων τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν 1 χιλιάδα· τέλος γράφομεν καὶ τὰς 2 μυριάδας τοῦ μειωτέου, ἀπὸ τῶν ὁποίων δὲν ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμέν τι· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 21076.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολυψηφίου δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων·

$$\begin{array}{r} 128 \\ 5 \\ \hline 123 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 251 \\ 8 \\ \hline 243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ 7 \\ \hline 994 \end{array}$$

Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

27. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως. *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου εἶνε μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10* (ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν μερικὴν ταύτην ἀφαίρεσιν), *ἀλλ' ἔπειτα, ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα, πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶνε τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ὃν καὶ τὴν πρόσθεσιν.

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

28. Ἵνα ἐξελέγξωμεν, ἂν ἀφαίρεσίς τις ἔγινεν ἄνευ λάθους, προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐὰν ὡς ἄθροισμα εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν δὲν ἔγινε λάθος· (ἐδ. 24).

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

29. Αἱ ἰδιότητες, ἐφ' ὧν ἐστηρίξαμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου, γενικεύονται εὐκόλως καὶ ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς.

1) *Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ εἰς τὸν μειωτέον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

2) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.*

Ἐὰν παραδείγματος χάριν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $15+6+20+9$,
δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 20 (ὅτε τὸ 20 γίνεται 8) καὶ τὸ προκύπτον ἄθροισμα $15+6+8+9$, θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Διότι κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (ἐδ. 23), ἐὰν προστεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ ἀφαιρετέος 12, προκύπτει ὁ μειωτέος.

3) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τούτου πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα

$$3+9+12$$

ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 30, φανερὸν εἶνε, ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς τὰς 24 μονάδας, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 3 μονάδας, ἔπειτα τὰς 9 καὶ τέλος τὰς 12 μονάδας· ἤτοι, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς ὅλον τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰ μέρη του τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο· ἀφαιρῶ λοιπὸν τὸν 3 ἀπὸ τοῦ μειωτέου 30 καὶ μένουν 27· ἔπειτα ἀπὸ τοῦ 27, ὅπερ ἔμεινεν, ἀφαιρῶ τὸν 9 καὶ μένουν 18· τέλος ἀπὸ τοῦ 18 ἀφαιρῶ καὶ τὸν 12 καὶ μένουν 6· τοῦτο εἶνε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

30. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων συνάγεται καὶ ἡ ἑξῆς.

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν 12—8 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 18.

Κατὰ τὴν πρώτην ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἡ ζητουμένη διαφορὰ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8· ἀλλὰ τότε ὁ μὲν μειωτέος 18 γίνεται 18+8, ὁ δὲ ἀφαιρετέος 12—8 γίνεται 12—8+8· ἤτοι 12· ὥστε ἔχομεν τώρα ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος 18+8, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12· τοῦτο δὲ καθιστᾷ φανερὰν τὴν προκειμένην ἰδιότητα.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶνε ἴσα.

Διότι, ἂν εἰς τὰ ὑπόλοιπα προστεθῶσι πάλιν οἱ ἀφαιρεθέντες ἴσοι, πρέπει νὰ προκύψωσιν ἴσοι ἀριθμοὶ (οἱ ἴσοι μειωτέοι)· τοῦτο ὅμως δὲν θὰ ἐγίνετο, ἂν τὰ ὑπόλοιπα ἦσαν ἄνισα· (ἰδὲ ἐδάφ. 15).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

31. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.*

Ἐὰν παραδείγματος χάριν ἐπαναλάβω τὸν 9 τρεῖς φοράς, 9 καὶ 9 καὶ 9, σχηματίζω ἐξ αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 27· τοῦτο δὲ εἶνε πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε *πρόσθεσις ἀλλεπάλληλος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του.*

Εἰς ἕκαστον πολλαπλασιασμὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· ἐκ τούτων ὁ μὲν εἷς πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ λέγεται διὰ τοῦτο *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἄλλος δεικνύει, πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος καὶ λέγεται *πολλαπλασιαστής.*

Ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον.*

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ 9, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 27.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται καὶ μὲ ἓν ὄνομα *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται *ἐπί*· οἷον 5×7 σημαίνει, ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 7· ἤτοι νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις· ἀναγινώσκεται δὲ *πέντε ἐπὶ ἑπτά.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι γίνεται ἐκ τούτου πολλάκις προστεθέντος εἰς ἑαυτόν. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός· διότι σημαίνει μόνον, ποσάκις θὰ ληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐὰν ἔχω, λόγου χάριν, νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 6 ἐπὶ 5· ἤτοι νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα

$$6+6+6+6+6$$

λέγω· 6 καὶ 6 κάμνουν 12, καὶ 6 κάμνουν 18, καὶ 6 κάμνουν 24, καὶ 6 γίνονται 30· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5 (ἤτοι τὸ 6×5), εἶνε 30. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Εἶνε δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα κατατεταγμένα εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις λέγεται πυθαγόρειος· διότι, ὡς λέγουσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς. Ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἤτοι τὰ διπλάσια αὐτῶν· ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, ἤτοι τὰ τριπλάσια αὐτῶν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειράν, τὸν δὲ πολλαπλασιαστὴν εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον· τὸ γινόμενον αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 35, τοῦ 5 ἐπὶ 7, εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται ἡ πέμπτη κατακόρυφος σειρὰ καὶ ἡ ἑβδόμη ὁριζοντία.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε 1, τὸ γινόμενον εἶνε ὁ πολλαπλασιαστέος ἅπαξ μόνον λαμβανόμενος· ἤτοι 5×1 εἶνε 5· 8×1 εἶνε 8, κτλ.

Παρατήρησις.

Πᾶς πολλαπλασιασμός, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀκολούθως, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ *εἰξεύρωμεν ἐκ στήθους* τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα γινόμενα.

Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίων ἀριθμῶν, εἶνε ἀνάγκη νὰ μάθωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐκφράζουσι τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

33. *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων· ἤτοι ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιαστής, καὶ τἀνάπαλιν.*

Λέγω παραδείγματος χάριν, ὅτι εἴτε τὸν 5 πολλαπλασιάσω ἐπὶ 7, εἴτε τὸν 7 ἐπὶ 5, τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἀναλύω τὸν 7 εἰς τὰς μονάδας του καὶ γράφω αὐτὰς εἰς μίαν σειράν, ἐπαναλαμβάνω δὲ τὴν σειρὰν ταύτην πέντε φοράς· ὡς ἑξῆς·

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ἐὰν τώρα θέλω νὰ εὕρω, πόσαι εἶνε αἱ μονάδες αὗται, δύναμαι νὰ ἀριθμήσω αὐτάς, ὡς ἑξῆς· ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ ἔχει 7 μονάδας καὶ ἡ δευτέρα ἄλλας 7, ἡ τρίτη ἄλλας 7, καὶ καθεξῆς· ὥστε αἱ μονάδες αὗται εἶνε $7+7+7+7+7$, ἤτοι 7×5.

Ἀλλὰ δύναμαι καὶ ἄλλως νὰ ἀριθμήσω τὰς αὐτὰς μονάδας, ὡς ἑξῆς· ἡ πρώτη κατακόρυφος στήλη ἔχει 5 μονάδας, ἡ δευτέρα ἄλλας 5 κτλ. ἄρα αἱ μονάδες αὗται εἶνε

$$5+5+5+5+5+5+5 \text{ ἤτοι } 5\times7.$$

Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας ταύτας, πάντοτε ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν· ἄρα θὰ εἶνε τὰ δύο γινόμενα 7×5 καὶ 5×7 εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· τουτέστιν

$$7\times5=5\times7$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

34 *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς προσθετέους 12, 8, 6, ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὰ τρία γινόμενα 12×3, 8×3, 6×3, νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ 3, πρέπει νὰ λάβω αὐτὸ τρίς, ἤτοι νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς ἄθροισμα·

$$\begin{array}{c}12+8+6\\12+8+6\\12+8+6\\\hline\end{array}$$

δηλονότι τὸ ἑξῆς· (ἰδ. 23)

$$12+12+12+8+8+8+6+6+6,$$

ἢ $$(12\times3+8\times3+6\times3)$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $12+8+6$ ἐπὶ 3 πα-

ρίσταται ὡς ἑξῆς: $(12+8+6)\times 3$· ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος:

$$(12+8+6)\times 3=(12\times 3)+(8\times 3)+(6\times 3).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

35. *Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ (χωρὶς νὰ τὸ εὕρω), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ τὰ γινόμενα 8×5, 8×7 καὶ 8×20 νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ ἐπὶ τὸν 8 καὶ θὰ εὕρω τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἀλλὰ τότε εὑρίσκω (κατὰ τὸ Β' θεώρημα)

$$(5\times 8)+(7\times 8)+(20\times 8)$$

ἢ $$(8\times 5)+(8\times 7)+(8\times 20).$$ (κατὰ τὸ Α' θεώρημα)

Τοῦτο λοιπὸν εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $8\times(5+7+20)$· ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος·

$$8\times(5+7+20)=(8\times 5)+(8\times 7)+(8\times 20)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

36. *Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων λήγῃ εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Λέγω παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 8500 καὶ 37 (τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς 85 καὶ 37 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω τὰ δύο μηδενικά, τὰ ὁποῖα παρέλειψα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν ἀριθμὸν 8500 καὶ ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν 37 (τοῦτο ἐπιτρέπεται κατὰ τὸ Α' θεώρημα).

ἐπὶ 4000, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 νὰ γράψω τὰ παραλειφθέντα πέντε μηδενικά.

Διότι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 1800 ἐπὶ 4000, ἀρκεῖ (κατὰ τὸ θεώρημα) νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4000 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω δύο μηδενικά. Ἀλλὰ πάλιν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4000 ἐπὶ 18, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4 ἐπὶ 18 καὶ νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου τρία μηδενικά. Θὰ ἔχω λοιπὸν νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 τὸ ὅλον πέντε μηδενικά.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

39. Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων· οἷον ὁ 7548 εἶνε ἄθροισμα 8 ἁπλῶν μονάδων καὶ 4 δεκάδων καὶ 5 ἑκατοντάδων καὶ 7 χιλιάδων· ἑπομένως (θεώρημα Β΄), *ἵνα πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ ἄλλον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του* (τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας, κτλ.) *καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3078 ἐπὶ τὸν 6.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομίας χάριν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 3078 \\ 6 \\ \hline 18468 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς 8 μονάδας ἐπὶ τὸν 6 λέγοντες 6 ἐπὶ 8 γίνονται 48· ἐπειδὴ δὲ αἱ 48 μονάδες κάμνουν 4 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, γράφομεν μόνον τὰς 8 μονάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας, τὰς ὁποίας θὰ δώσῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν 7 δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰς 7 δεκάδας ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 6· λέγοντες 6 ἐπὶ 7 γίνονται 42 δεκάδες καὶ 4 αἱ κρατούμεναι γίνονται 46· ἐπειδὴ δὲ 46 δεκάδες κάμνουν 6 δεκάδας καὶ 4 ἑκατοντάδας, γράφομεν τὰς 6 δεκάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας.

Τὰς 4 ταύτας ἑκατοντάδας γράφομεν ἀμέσως εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου· διότι ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἑκατοντάδας καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἔχωμεν γινόμενον ἑκατοντάδων.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς 3 χιλιάδας ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὑρίσκομεν 18 χιλιάδας· καὶ τὰ ψηφία ταῦτα γράφομεν ὄπισθεν τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ γινομένου.

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε λοιπὸν 18468.

40. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶνε μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἂν δὲ εἶνε διψήφιον, γράφομεν ἐκεῖ μόνον τὰς μονάδας του, τὰς δὲ δεκάδας ἑνώνομεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου· καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἀρχίζομεν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἐδόθη ἤδη εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

41. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ 782. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς 782 ἀναλυθῇ κατὰ τὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων του, εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 700 καὶ 80 καὶ 2, ἤτοι εἶνε $700+80+2$. Ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρημα Γ', ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ τὸν 782, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 700 καὶ ἐπὶ 80 καὶ ἐπὶ 2. καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ τρία μερικὰ γινόμενα.

Οἱ μερικοὶ οὗτοι πολλαπλασιασμοὶ

3722	3722	3722
700	80	2
2605400	297760	7444

ἐὰν παραλειφθῶσι τὰ μηδενικά, εἰς ἃ λήγουσιν οἱ πολλαπλασιασταὶ 700 καὶ 80 (κατὰ τὸ Δ' θεώρημα), καταντῶσι πολλαπλασιασμοὶ πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον, οἵτινες ἐκτελοῦνται, ὡς ἐμάθομεν ἤδη (καὶ ἀνάγονται εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον).

Συντομίας χάριν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

3722	πολλαπλασιαστέος
782	πολλαπλασιαστὴς
7444	μερικὸν γινόμενον τοῦ 2
297760	μερικὸν γινόμενον τοῦ 80
2605400	μερικὸν γινόμενον τοῦ 700
2910604	ἄθροισμα τῶν μερ. γινομένων, ἤτοι τὸ ὁλικὸν γινόμενον.

Τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων (τοῦ 700 καὶ 80), δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν· διὰ τοῦτο παραλείπομεν αὐτά· ἀφίνομεν ὅμως κενὸν τὸν τόπον αὐτῶν, ἵνα διατηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ἄλλων ψηφίων. Τότε δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον 3722 ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρῶτον ἐπὶ 2, ἔπειτα ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7, νὰ γράφωμεν δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ εἶνε ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν.

42. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ῥηθέντων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω ἄγομεν ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐφ' ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶνε ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐφ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν· μετὰ ταῦτα ἄγομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ προκύπτον ἄθροισμα εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματα

47082	1438	250004
33	801	30023
141246	1438	750012
141246	11504	500008
1553706	1151838	750012
		7505870092

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

43. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὸν λαμβάνοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ τἀνάπαλιν. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς πρώτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (θεώρημα Α΄).

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

44. *Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν* λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

5, 6, 7, 12,

τὸ ὁποῖον σημειοῦται ὡς ἑξῆς $5\times6\times7\times12$, πολλαπλασιάζω τὸν 5 ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὑρίσκω 30· ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν 30 ἐπὶ τὸν 7 καὶ εὑρίσκω 210, τέλος πολλαπλασιάζω τὸν 210 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκω 2520· τοῦτο δὲ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες λαμβάνωνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί, καὶ τὸ γινόμενον εἶνε ἀφῃρημένος ἀριθμός· ὅταν δὲ εἷς ἐκ τῶν παραγόντων λαμβάνηται ὡς συγκεκριμένος, οὗτος εἶνε ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ πολλαπλασιάζεται ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν ἄλλων, οἵτινες διὰ τοῦτο λαμβάνονται ἐν τῇ πράξει ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

45. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὰς ἑξῆς δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας, ἀπὸ τῶν ὁποίων πηγάζουσι πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες αὐτοῦ.

1) Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδ-
ποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.

2) Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶ
προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντ
τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τὴν μὲν δευτέραν ἀπεδείξαμεν ἤδη (θε-
ώρημα Β'), τὴν δὲ πρώτην ἀπεδείξαμεν διὰ δύο μόνον παράγοντας
(θεώρημα Α'). Ἵνα δὲ ἀποδείξωμεν καὶ ταύτην γενικῶς, ὅσοι δήποτε
καὶ ἂν εἶνε οἱ παράγοντες, ἔχομεν ἀνάγκην βοηθητικῶν τινων θεωρη-
μάτων· τουτέστι τῶν ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

46. *Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἄλλους, εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 8 πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 3 (ἤτοι πρῶτον ἐπὶ τὸν 4, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 3), εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των 4×3, ἤτοι ἐπὶ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ 4, εὑρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς·

$$8+8+8+8,$$

ὅταν δὲ καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3, εὑρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς.

$$\begin{array}{c}8+8+8+8\\8+8+8+8\\8+8+8+8\end{array}$$

ἀλλὰ τοῦτο σύγκειται ἐκ τοῦ 8 ληφθέντος 12 φορὰς καὶ διὰ τοῦτο εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸν 12.

ΘΕΩΡΗΜΑ

47. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀνταλλαχθῶσι δύο ἐφεξῆς παράγοντες.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ γινόμενον

$$8\times15\times2\times7\times9$$

δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἀνταλλάξω τοὺς δύο ἐφεξῆς παράγοντας 2 καὶ 7· δηλαδή, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἑξῆς $8\times15\times7\times2\times9$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἐκτελέσω τὸν πολλαπλασιασμὸν $8\times15\times2\times7\times9$ κατὰ τὴν δεδομένην τάξιν, πρέπει, ἀφοῦ εὕρω τὸ

8×15, ἤτοι 120, νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ πρῶτον ἐπὶ τα ἐπὶ 7. Ἀλλ' ἀντὶ τούτων δύναμαι κατὰ τὸ προηγούμε-:α νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×7, σον του 7×2. Καὶ πάλιν κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα, ἀντὶ νὰ ιιάσω τὸ 120 ἐπὶ τὸ γινόμενον 7×2, δύναμαι νὰ πολλαπλα-ὸ πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ι τῶν δύο ἐφεξῆς παραγόντων 2 καὶ 7 δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον. θεωρήματος τούτου συνάγεται ἡ πρώτη θεμελιώδης ἰδιό-ιλλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οίαν-ιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.

:ιξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν οὺς 4, 5, 8, 12, 6 κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν 4×5×8×12×6 ν νὰ μετατρέψωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην οἱανδήποτε, οἷον εἰς 8×5×4×6×12. Διὰ νὰ φέρωμεν τὸν 8 εἰς τὴν πρώτην ιλλάσσομεν αὐτὸν μετὰ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του (ὅτε 8 μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς) καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἀνταλλάσ-τὸν μετὰ τοῦ ἑκάστοτε προηγουμένου του, μέχρις οὗ γίνῃ ιοίως φέρομεν καὶ τὸν 5 εἰς τὴν δευτέραν θέσιν καὶ τὸν 4 την (ἐὰν εἶνε ἀνάγκη), καὶ οὕτω καθεξῆς.

ἀπαιτούμεναι ἀνταλλαγαί

4×5×8×12×6
4×8×5×12×6
8×4×5×12×6
8×5×4×12×6
8×5×4×6×12

ι εἰς ἑκάστην τῶν ἀνταλλαγῶν τούτων δὲν βλάπτεται τὸ συμπεραίνομεν, ὅτι εἴτε κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν ἐκτελε-λλαπλασιασμὸς εἴτε κατ' ἄλλην οἱανδήποτε, πάντοτε τὸ ροκύψῃ γινόμενον.

ΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι, ἐὰν πολλῶν πραγμάτων ἐπιτρέπηται ἡ ἀνταλλαγὴ δύο οἱωνδή-

ποτε ἐφεξῆς, ἡ σειρὰ τῶν πραγμάτων τούτων δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν.

49. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕπονται αἱ ἑξῆς.

1) Δυνάμεθα εἰς πᾶν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν. Δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἕνα μόνον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς

8, 12, 10, 4, 25·

λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν παραγόντων 10 καὶ 4 λάβωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 40· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 40, 25, θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὡς καὶ οἱ δοθέντες.

Ἀπόδειξις. Διότι κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4 θὰ εὕρω τὸ γινόμενον 40 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 40, 8, 12, 25· ἑπομένως τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἡ αὐτὴ ἰδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.

Τουτέστι νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

40, 8, 12, 25,

δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 40 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν γινόμενον.

2) Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $4 \times 7 \times 10 \times 12$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 8. Ἵνα γίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον· δηλαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γι-

νόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

4, 7, 10, 12, 8,

ἢ καὶ τῶν ἑξῆς 4, 56, 10, 12, (ἰδιότης 1)

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 8 ἐπολλαπλασίασεν ἕνα τῶν παραγόντων (τὸν 7) καὶ τοιουτοτρόπως ἐπολλαπλασίασε τὸ ὅλον γινόμενον.

3) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα

$5 \times 12 \times 8$ καὶ 7×22.

Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22·

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἤτοι εἰς τὸ $5 \times 12 \times 8 \times 7 \times 22$, ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 5, 12 καὶ 8 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $5 \times 12 \times 8$, ἔτι δὲ καὶ τοὺς παράγοντας 7, 22 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 7×22, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$5 \times 12 \times 8$ καὶ 7×22·

τουτέστι τὰ δύο γινόμενα· ὥστε τὸ γινόμενον τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22, εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ὁμοιότης τῶν ἰδιοτήτων τούτων πρὸς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως (ἰδὲ ἐδ. 23) εἶνε καταφανής. Ἐννοοῦμεν δὲ τοῦτο εὐκόλως, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι αἱ ἰδιότητες, περὶ ὧν ὁ λόγος, εἶνε ἀπόρροια τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν αἱ δύο αὗται πράξεις ἔχουσι· τουτέστι τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν ἐκτελοῦνται.

30. Ἐκ τῆς δευτέρας θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕπεται ἡ ἑξῆς.

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), *ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα

$3+5+10$ ἐπὶ $8+9$ (πρὶν ἢ εὕρωμεν αὐτά)·

λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εὑρεθῇ, ἂν προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς γινόμενα·

$$3\times8 \qquad 3\times9$$
$$5\times8 \qquad 5\times9$$
$$10\times8 \qquad 10\times9$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα Γ΄ τοῦ ἐδ. 35 διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν 3+5+10 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα 8+9 (χωρὶς νὰ τὸ εὕρω), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ 8 καὶ ἐπὶ 9 καὶ νὰ προσθέσω τὰ δύο γινόμενα· τὰ δύο ταῦτα γινόμενα εἶνε τὰ ἑξῆς·

$$(3+5+10)\times8 \quad \text{καὶ} \quad (3+5+10)\times9.$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρω τὰ γινόμενα ταῦτα, ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν· ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα Β΄ τοῦ ἐδ. 34, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἐκ τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ ἑνώσω τὰ μερικὰ γινόμενα· οὕτως εὑρίσκω, ὅτι τὸ γινόμενον $(3+5+10)\times8$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς γινομένων

$$3\times8 \text{ καὶ } 5\times8 \text{ καὶ } 10\times8.$$

Τὸ δὲ γινόμενον $(3+5+10)\times9$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς τριῶν

$$3\times9 \text{ καὶ } 5\times9 \text{ καὶ } 10\times9.$$

Ἑπομένως τὰ ἓξ ταῦτα γινόμενα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο ἀθροισμάτων.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

31. Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται (χωρὶς νὰ εὑρεθῇ προηγουμένως) κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἂς ὑποθέτωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν 18—6 ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτήν)· λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε $(18\times3)-(6\times3)$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὴν διαφορὰν ἐπὶ 3, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω αὐτὴν τρίς· τότε εὑρίσκω

$$(18-6)+(18-6)+(18-6).$$

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἔχω νὰ προσθέσω τὸν 18 τρεῖς φορὰς καὶ ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ, ὅστις εἶνε 18×3, νὰ ἀφαιρέσω τρεῖς φορὰς τὸν 6, ἤτοι τὸ 6×3· ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε $(18\times3)-(6\times3)$.

Περὶ τῶν δυνάμεων.

32. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς εἶνε ἴσοι, τὸ γινόμενον τοῦτο λέγεται *δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων. Καὶ ἂν μὲν οἱ παράγοντες εἶνε δύο, τὸ γινόμενον λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον*· ἂν δὲ τρεῖς, *τρίτη δύναμις* ἢ *κύβος*, ἂν δὲ τέσσαρες, *τετάρτη δύναμις*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον $5\times5\times5\times5$ λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ 5· τὸ δὲ γινόμενον 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις (ἢ τετράγωνον) τοῦ 3, καὶ τὸ γινόμενον $8\times8\times8$ λέγεται τρίτη δύναμις (ἢ κύβος) τοῦ 8.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως ὡς ἑξῆς· γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων· καλεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος *ἐκθέτης*.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ : $8\times8\times8$ γράφομεν 8^3.
ἀντὶ : $5\times5\times5\times5$ » 5^4.
ἀντὶ : 3×3 » 3^2.
καὶ 7^5 σημαίνει $7\times7\times7\times7\times7$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος αἱ μεγαλείτεραι τοῦ 10, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 100, 1000, 10000 κτλ., εἶνε αἱ διάφοροι δυνάμεις τῆς βάσεως 10.

Διότι εἶνε $10^2=10\times10=100$

$10^3=10\times10\times10=1000$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων.

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶνε γινόμενα, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν θὰ εὑρίσκωνται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶνε δὲ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἡ ἑξῆς.

33. *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε πάλιν δύ-*

γαμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθέτην δ' ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ **πολλαπλασιάσωμεν** τὰς δύο δυνάμεις 7^3 7^5

Ἡ πρώτη ἐκ τούτων εἶνε τὸ γινόμενον $7\times7\times7$, **ἡ δὲ δευτέρα** τὸ $7\times7\times7\times7\times7$· ἔχομεν λοιπὸν νὰ **πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον** ἐπὶ γινόμενον· καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα 3 (ἐδ. 49) **τὸ ζητούμενον** γινόμενον θὰ ἔχῃ 8 παράγοντας καὶ ἴσους τῷ 7, **ἤτοι θὰ εἶνε**

$$7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$$

ἢ συντομώτερον 7^8.

Ἄρα ἐδείχθη, ὅτι $7^3\times7^5=7^{3+5}=7^8$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ γινόμενον δύο οἰωνδήποτε ἀριθμῶν ἔχει τόσα **ψηφία, ὅσα** ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες, ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

Ἄν, λόγου χάριν, ὁ εἷς ἔχῃ 3 ψηφία, ὁ δὲ ἄλλος 5, **τὸ γινόμενόν** των θὰ ἔχῃ ἢ 8 ψηφία ἢ 7.

Διότι τὸ γινόμενον θὰ εἶνε μεγαλείτερον μὲν τοῦ 100×10000, ἤτοι τοῦ 1 000 000 (ἢ τουλάχιστον ἴσον πρὸς τοῦτο), **μικρότερον δὲ** τοῦ $1000\times100\,000$ ἤτοι τοῦ 100 000 000· ἄρα θὰ **ἔχῃ τουλάχιστον** 7 ψηφία· δὲν δύναται ὅμως νὰ ἔχῃ 9.

2) Ἐκ τοῦ πίνακος, δι' οὗ ἀποδεικνύεται, ὅτι $5\times6=6\times5$ (**ἰδὲ** ἐδ. 33), ἀποδεικνύεται προσέτι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

$$1+2+3+4+5 \text{ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου } 6\times5.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ γενικῶς, ὅτι τὸ ἄθροισμα $1+2+3+\ldots+\nu$ **εἶνε** τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου $\nu(\nu+1)$· οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν **εἶνε ὁ ν.**

3) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ὅταν εἰς ἕνα **παράγοντα** προστεθῇ μία μονάς, ἢ καὶ περισσότεραι;

4) Εἰς γινόμενόν τι πρόκειται νὰ αὐξηθῇ εἷς παράγων **κατὰ** μονάδα, ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ αὐξήσωμεν, ὥστε ἡ **αὔξησις τοῦ** γινομένου νὰ εἶνε μεγίστη;

5) Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν **αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν** δίδει ὡς γινόμενον τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων **αὐτῶν.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Διαίρεσις.

34. *Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μερίζομεν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.*

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, ἡ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν, εἶνε διαίρεσις.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ μερισθῇ, λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει εἰς πόσα μέρη θὰ μερισθῇ, λέγεται *διαιρέτης*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται *πηλίκον*.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος εἶνε ὁ 18, διαιρέτης δὲ ὁ 3 καὶ πηλίκον ὁ 6.

Ὁ μερισμὸς δὲν γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς*, ἀλλὰ περισσεύει πολλάκις ἀριθμός τις· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται *ὑπόλοιπον*.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ μοιράσω 16 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, βλέπω εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ μία δραχμή· εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διαιρετέος εἶνε ὁ 16, διαιρέτης ὁ 3, πηλίκον (ὄχι ἀκριβὲς) ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ ἑξῆς : (ὅπερ ἀπαγγέλλεται *διά*)· γράφεται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατόπιν τοῦ διαιρετέου καὶ μετ' αὐτὸ γράφεται ὁ διαιρέτης· οἷον 15 : 3 σημαίνει, ὅτι ὁ 15 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 3· ἀπαγγέλλεται δὲ 15 *διαιρούμενος διὰ* 3, ἢ συντομώτερον 15 *διὰ* 3.

35. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν· (ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν πρόσθεσιν).

Διότι, ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ μοιράσωμεν 45 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν κατὰ πρῶτον ἀνὰ μίαν δραχμὴν εἰς ἕκαστον· τότε θὰ μείνωσι 45—8, ἤτοι 37 δραχμαί· ἔπειτα ἐκ τῶν 37 δραχμῶν (αἱ ὁποῖαι ἔμειναν) νὰ δώσωμεν πάλιν εἰς ἕκαστον ἀνὰ μίαν δραχμήν· τότε θὰ μείνωσι 37—8, ἤτοι 29 δραχμαί· καὶ ἐκ τούτων πάλιν νὰ δώσωμεν ἀνὰ μίαν εἰς καθένα καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέ-

*) Ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ θὰ μάθωμεν, ὅτι πᾶσα διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς τῇ βοηθείᾳ τῶν κλασμάτων

λος, ἢ δὲν θὰ μείνῃ τίποτε, ἢ θὰ μείνῃ ἀριθμός τις δραχμῶν μικρότερος τοῦ 8. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως γίνεται φανερόν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς ἀφηρέσαμεν τὸν 8· δηλαδὴ ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 45 τὸν 8.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

56. *Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν, ποσάκις χωρεῖ εἰς ἀριθμὸς ἄλλον ἀριθμόν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε ἡ μονάς, τὸ πηλίκον εἶνε ἴσον πρὸς τὸν διαιρετέον· ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε ἴσος πρὸς τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶνε 1.

Τελεία διαίρεσις.

57. Ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ὅταν ὁ διαιρετέος μερίζηται εἰς ἴσα μέρη χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν ἡ διαίρεσις 18 : 3 εἶνε τελεία καὶ πηλίκον αὐτῆς εἶνε ὁ 6· διότι 18=6+6+6.

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἀναλύεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἕκαστον μέρος εἶνε ἴσον μὲ τὸ πηλίκον· τὰ μέρη δὲ ταῦτα, ὅταν ἑνωθῶσι πάλιν, θὰ ἀποτελέσωσι τὸν διαιρετέον· ἄρα *εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Ἀτελὴς διαίρεσις.

58. *Ἀτελὴς* λέγεται ἡ διαίρεσις, ἐὰν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον. Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις 17 : 3 εἶνε ἀτελής· διότι ἀφαιροῦντες τὸν 3 ἀπὸ τοῦ 17, ὅσας φορὰς εἶνε δυνατὸν (5 φοράς), εὑρίσκομεν, ὅτι μένει ὑπόλοιπον 2· ὥστε ἡ διαίρεσις 17 : 3 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν 17 : 3 ἀφηρέσαμεν τὸν 3 πέντε φορὰς [illegible] 17 καὶ ἔμεινε 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 17 σύγκειται ἐκ τοῦ [illegible] 5 φοράς, καὶ ἐκ τοῦ 2, ἤτοι εἶνε

[illegible] (3+3+3+3+3)+2

[illegible] +2.

Εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν, ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ προτασις αὕτη ἀληθεύει καὶ περὶ πάσης διαιρέσεως, ἀρκεῖ ὡς ὑπόλοιπον τῆς τελείας διαιρέσεως νὰ θεωρηθῇ τὸ 0. Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα (ἰδ. 55) τὸ ὑπόλοιπον εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Παρατήρησις.

60. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 53 διὰ τοῦ 9.

Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 9 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3 κτλ. κατὰ σειρὰν καὶ εὑρίσκω·

$$9\times1=9,\quad 9\times2=18,\quad 9\times3=27,\quad 9\times4=36,$$
$$9\times5=45,\quad 9\times6=54.$$

Ἐκ τούτων βλέπω, ὅτι ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 53 μόνον 5 φορὰς (διότι 9×5 εἶνε 45, ἀλλὰ 9×6 εἶνε 54· μεγαλήτερον δηλονότι τοῦ 53)· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ 53 ἀφαιρέσω τὸ 9 πέντε φοράς, εἶνε 8.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος οὗτος ὡς καὶ ὁ ἄλλος, ὅστις ἀπαιτεῖ ἀλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις, δὲν εἶνε κατάλληλος, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι, διότι καὶ χρόνον ἀπαιτοῦσι καὶ κόπον πολύν. Διὰ τοῦτο ἐπενόησαν ἄλλον τρόπον συντομώτερον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις, καὶ τὸν ὁποῖον θὰ μάθωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

61. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν, πρὶν ἀκόμη ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον, κάμνομεν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου· ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις 175 : 18.

Ἐὰν γράψω δεξιὰ τοῦ 18 ἓν μηδενικὸν (δηλαδὴ ἂν τὸν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10) γίνεται 180 καὶ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· ἐκ τού-

α νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

5 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχονται εἰς τὰς μονάδας ἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατον- ; αὐτοῦ· περιέχονται δὲ 7 φορὰς μόνον· (διότι τὸ 5 εἰς τὸ 38 ζεται 7 φοράς). Ἐκ τούτου συμπεραίνω, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν εἶνε ιήτερον τοῦ 7· ἀλλ' εἶνε ἢ 7 ἢ μικρότερον τοῦ 7· (διότι αἱ 5 ντάδες, ἤτοι ὁ 500, περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον 7 φοράς· ὁ 525 ὡς μεγαλήτερος τοῦ 500, δυνατὸν νὰ μὴ περιέχηται εἰς 7 φοράς).

α νὰ δοκιμάσω τὸ 7, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 3675, ἤτοι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. τούτου βλέπω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 7· ἀφαιρῶν δὲ ἀπὸ τοῦ δι- έου τὸ γινόμενον 3675 (τοῦ πηλίκου 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525), κω τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

ἰς δεύτερον παράδειγμα ἔστω ἡ διαίρεσις

$$8569 : 2854$$

ι πηλίκον εἶνε μονοψήφιον (διότι 2854×10 εἶνε 28540, ἤτοι λήτερον τοῦ διαιρετέου) καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω, παρατηρῶ, ὅτι αἱ ιάδες τοῦ διαιρέτου περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον (δηλαδὴ ις 8 χιλιάδας του) 4 φορὰς μόνον, ὥστε καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης δὲν περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον περισσότερον ἀπὸ 4 φοράς· νως τὸ πηλίκον εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2854 καὶ εὑρίσκω γι- ον 11416, ὅπερ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου· ὥστε τὸ πη- εἶνε μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3 πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 8562 μικρότερον τοῦ ιτέου· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶνε 3.

α νὰ εὕρω τὸ ὑπόλοιπον, ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 8569 τὸ ενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ἤτοι τὸ 8562, καὶ εὑρίσκω τόλοιπον 7· ὥστε ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

8. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

α νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶνε ψήφιον, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ δι' αὐτοῦ οῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἂν εἶνε ἰσοψήφιοι) *ἢ τὸ ον διψήφιον τμῆμα αὐτοῦ* (ἂν ἔχῃ ὁ διαιρετέος ἓν ψηφίον περισ-

σότερον)· τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν, θὰ εἶνε ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό, καὶ ἂν μὲν τὸ προκύπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ ψηφίον τοῦτο εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἐξῆς φαίνεται.

```
6083 | 703          50379 | 6902
5624 |----          48314 |-----
-----  8            -----   7
 459                 2065
```

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 5, εἶνε προτιμότερον νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὰ δύο πρῶτα)· διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον. Ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 8381 διὰ τοῦ 2954, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τεθέντα κανόνα θὰ διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ τοῦ 2· καὶ ἐπειδὴ τὸ 2 εἰς τὸ 8 περιέχεται 4 φοράς, θὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 2. τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἐὰν ἐσκεπτόμεθα, ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ ὅτι αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 μόνον φοράς· ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 2 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 2· (διότι ὁ διαιρέτης 2954, ὡς μικρότερος τοῦ 3000, ἐνδέχεται νὰ χωρῇ περισσοτέρας φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον).

Διαίρεσις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον.

66. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον· γίνεται δὲ τοῦτο, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν

$$52629 : 24,$$

ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 52629 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 24 ἀνθρώπους.

Λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον.

Ἐνταῦθα λαμβάνομεν τὰς 52 χιλιάδας καὶ μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
52'629 | 24
48       2
 4
```

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην μερικὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶνε 52 (χιλιάδες) διαιρέτης ὁ 24, πηλίκον 2 (χιλιάδες) καὶ ὑπόλοιπον 4 (χιλιάδες).

Αἱ 4 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 629 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 4629, ὅστις μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν (ὡς καὶ εἰς τὴν πρώτην) λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 46 ἑκατοντάδας· καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
46'29 | 24
24       1
22
```

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 1 ἑκατοντάδα καὶ ὑπόλοιπον 22 ἑκατοντάδας.

Αἱ 22 ἑκατοντάδες, αἵτινες ἔμειναν, ἑνωθεῖσαι μετὰ τῶν 29 μονάδων, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 2229, τὸν ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου (ἀπ' ἀρχῆς), ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 222 δεκάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
222'9 | 24
216      9
  6
```

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 6 δεκάδας.

Αἱ 6 δεκάδες, αἵτινες ἔμειναν, καὶ αἱ 9 μονάδες, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 69, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμη εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
69 | 24
48    2
21
```

σότερον)· τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν, θὰ εἶνε ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό, καὶ ἂν μὲν τὸ προκύπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ ψηφίον τοῦτο εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

6083	703	50379	6902
5624	8	48314	7
459		2065	

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 5, εἶνε προτιμότερον νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὰ δύο πρῶτα)· διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον. Ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 8381 διὰ τοῦ 2954, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τεθέντα κανόνα θὰ διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ τοῦ 2· καὶ ἐπειδὴ τὸ 2 εἰς τὸ 8 περιέχεται 4 φοράς, θὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 2. τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἐὰν ἐσκεπτόμεθα, ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ ὅτι αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 μόνον φοράς· ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 2 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 2· (διότι ὁ διαιρέτης 2954, ὡς μικρότερος τοῦ 3000, ἐνδέχεται νὰ χωρῇ περισσοτέρας φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον).

Διαίρεσις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον.

66. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον· γίνεται δὲ τοῦτο, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν

52629 : 24,

ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 52629 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 24 ἀνθρώπους.

Λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον.

Ἐνταῦθα λαμβάνομεν τὰς 52 χιλιάδας καὶ μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
52'629 | 24
48       2
 4
```

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην μερικὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶνε 52 (χιλιάδες) διαιρέτης ὁ 24, πηλίκον 2 (χιλιάδες) καὶ ὑπόλοιπον 4 (χιλιάδες).

Αἱ 4 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 629 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 4629, ὅστις μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν (ὡς καὶ εἰς τὴν πρώτην) λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 46 ἑκατοντάδας· καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
46'29 | 24
24      1
22
```

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 1 ἑκατοντάδα καὶ ὑπόλοιπον 22 ἑκατοντάδας.

Αἱ 22 ἑκατοντάδες, αἵτινες ἔμειναν, ἑνωθεῖσαι μετὰ τῶν 29 μονάδων, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 2229, τὸν ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου (ἀπ' ἀρχῆς), ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 222 δεκάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
222'9 | 24
216     9
  6
```

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 6 δεκάδας.

Αἱ 6 δεκάδες, αἵτινες ἔμειναν, καὶ αἱ 9 μονάδες, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 69, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμη εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

```
69 | 24
48   2
21
```

Ἡ διαίρεσις αὕτη δίδει πηλίκον μονοψήφιον, τὸ 2, καὶ κατάλοιπον τὸ 21.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν εὑρήκαμεν 2 χιλιάδας, 1 ἑκατοντάδα, 9 δεκάδας, καὶ 2 μονάδας, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2192· ὑπόλοιπον δὲ 21.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ, ὡς ἕπεται·

52'629	24
48	2000
46'29	100
24	90
222'9	2
216	
69'	
48	
21	

Παρατηρήσεις περὶ τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως.

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 4 δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην μερικὴν διαίρεσιν, ἤτοι τὰ 629, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἤτο τὸ 6, διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν μερικὴν διαίρεσιν· διότι εἰς αὐτὴν μόνον τὸ 46 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 4629 τὰ ἀφίνομεν. Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 22 δυνάμεθα νὰ καταβιβάζωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων, ἤτοι τὸ 2, διότι τὰ ἄλλα δὲν χρειάζονται εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν. Διὰ ταῦτα εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειράν.

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 2, ἵνα σημαίνῃ 2 χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 1, ἵνα σημαίνῃ μίαν ἑκατοντάδα καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, διὰ νὰ σημαίνῃ 9 δεκάδας, τὰ μηδενικά, λέγω, ταῦτα δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τὴν τάξιν, καθ' ἣν εὑρίσκονται, ἤτοι 2192· διότι τότε τὸ 2 σημαίνει χιλιάδας καὶ τὸ 1

σημαίνει ἑκατοντάδας καὶ τὸ 9, δεκάδας. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

```
52'629 | 24
48       2192
 46
 24
 222
 216
   69
   48
   21
```

Ἀλλ' ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὰ ἑξῆς.

Ἂν εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν εὕρωμεν πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης δὲν χωρῇ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), τότε *πρέπει νὰ γράφωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου· τοῦτο δέ, ἵνα διατηρῆται ἡ ἀξία αὐτῶν*. Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

```
355'68 | 171
342      208
 1368
 1368
    0
```

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ ψηφίον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

3) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε μονοψήφιος, ἀφαιροῦμεν τὰ γινόμενα αὐτοῦ χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· ἡ πρᾶξις τότε λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν·

```
58'74 | 8        21014 | 7
 27     734       0014   3002
  34                 0
   2
```

Ἡ διαίρεσις αὕτη δίδει πηλίκον μονοψήφιον, τὸ 2, καὶ κατάλοιπον τὸ 21.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν εὑρήκαμεν 2 χιλιάδας, 1 ἑκατοντάδα, 9 δεκάδας, καὶ 2 μονάδας, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2192· ὑπόλοιπον δὲ 21.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ, ὡς ἕπεται·

```
52'629 | 24
48     |------
------   2000
 46'29    100
 24        90
------      2
 222'9
 216
 -----
  69'
  48
  ---
  21
```

Παρατηρήσεις περὶ τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως.

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 4 δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην μερικὴν διαίρεσιν, ἤτοι τὰ 629, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἤτο τὸ 6, διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν μερικὴν διαίρεσιν· διότι εἰς αὐτὴν μόνον τὸ 46 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 4629 τὰ ἀφίνομεν. Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 22 δυνάμεθα νὰ καταβιβάζωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων, ἤτοι τὸ 2, διότι τὰ ἄλλα δὲν χρειάζονται εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν. Διὰ ταῦτα εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειράν.

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 2, ἵνα σημαίνῃ 2 χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 1, ἵνα σημαίνῃ μίαν ἑκατοντάδα καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, διὰ νὰ σημαίνῃ 9 δεκάδας, τὰ μηδενικά, λέγω, ταῦτα δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τὴν τάξιν, καθ' ἣν εὑρίσκονται, ἤτοι 2192· διότι τότε τὸ 2 σημαίνει χιλιάδας καὶ τὸ 1

σημαίνει ἑκατοντάδας καὶ τὸ 9, δεκάδας. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

```
52'629 | 24
48       2192
--
 46
 24
 --
 222
 216
 ---
   69
   48
   --
   21
```

Ἀλλ' ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὰ ἑξῆς.

Ἂν εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν εὕρωμεν πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης δὲν χωρῇ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), τότε *πρέπει νὰ γράφωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου· τοῦτο δέ, ἵνα διατηρῆται ἡ ἀξία αὐτῶν.* Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

```
355'68 | 171
342      208
---
 1368
 1368
 ----
    0
```

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ ψηφίον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

3) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε μονοψήφιος, ἀφαιροῦμεν τὰ γινόμενα αὐτοῦ χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· ἡ πρᾶξις τότε λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν·

```
58'74 | 8        21014 | 7
 27     734       0014   3002
  34                 0
   2
```

Κανὼν τῆς διαιρέσεως.

67. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, χωρίζομεν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον (πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἢ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἓν περισσότερον)· *διαιροῦμεν τὸ χωρισθὲν μέρος διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον διῃρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.*

Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον διῃρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμὸν διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Ἐὰν δὲ εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν τὸ ἁρμόδιον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιρῆται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Συντομίαι.

1η)

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε 10, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς.

Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ χωρισθὲν ψηφίον εἶνε τὸ ὑπόλοιπον.

Οἷον ἡ διαίρεσις 15489 : 10 δίδει πηλίκον 1548 καὶ ὑπόλοιπον 9· ἡ δὲ διαίρεσις 8750 : 10 δίδει πηλίκον 875 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ὁ λόγος τούτου εἶνε ὁ ἑξῆς.

Διὰ νὰ διαιρέσω τὸν 15489 διὰ τοῦ 10, πρέπει νὰ εὕρω πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 15489, ἤτοι πόσας δεκάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 15489· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει τὸ ὅλον 1548 δεκάδας καὶ 9 μονάδας· ἄρα τὸ πηλίκον εἶνε 1548, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶνε αἱ 9 μονάδες.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε 100, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς. *Χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου·* τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα εἶνε τὸ ὑπόλοιπον.

Οἷον ἡ διαίρεσις 5897 : 100 δίδει πηλίκον 58 καὶ ὑπόλοιπον 97.

Διότι τὸ πηλίκον δεικνύει, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 100 εἰς τὸν 5897· ἤτοι πόσας ἑκατοντάδας τὸ ὅλον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 5897· ἔχει δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 58 ἑκατοντάδας (διότι αἱ 5 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 50 ἑκατοντάδας).

Καὶ γενικῶς: *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, χωρίζομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης·* τότε τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ ὑπόλοιπον.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ κανόνος τούτου γίνεται ὡς καὶ τῶν δύο προηγουμένων.

2α)

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, παραλείπομεν δὲ καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου· τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον τότε εὑρίσκομεν, εἶνε τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, πρέπει δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς συντομευθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου μὲ τὴν σειράν των.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 759431 διὰ τοῦ 18000. Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 759431, ὅσας φορὰς δύναμαι. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ μονάδων, οὔτε ἀπὸ δεκάδων οὔτε ἀπὸ ἑκατοντάδων, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τῶν 759 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου ὅσας φορὰς δύναμαι· τουτέστι πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 759 διὰ τοῦ 18, διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρτίζηται ἐκ τῶν χιλιάδων, αἵτινες ἐνδέχεται νὰ μείνωσι, καὶ ἐκ τῶν 431 μονάδων, τὰς ὁποίας παρελείψαμεν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

```
875(4 | 25(0          487(08 | 4(00
75      35            8        121
125                   7
125                   308
 04
```

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὴν συντομίαν ταύτην ὑπάγεται προδήλως καὶ ἡ πρώτη· ἀναφέρομεν δ' αὐτὴν ἰδιαιτέρως χάριν μείζονος σαφηνείας.

3η)

Ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶνε πάντα 9, ἡ διαίρεσις συντομεύεται ὡς ἀκολούθως.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 589875421 διὰ τοῦ 999.
τουτέστι νὰ μοιράσωμεν 589875421 δραχμὰς εἰς 999 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν διαίρεσιν παραδέχομαι ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον καὶ γίνονται 1000· τότε (κατὰ τὴν 1ην συντομίαν) θὰ λάβῃ ἕκαστος 589875 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσωσι 421.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ εἷς ἄνθρωπος δὲν ὑπάρχει, τὸ μερίδιόν του, ἤτοι αἱ 589875 δραχμαί, ἔμεινε· τοῦτο δὲ ἑνούμενον μετὰ τοῦ ὑπολοίπου 421 δίδει 590296 δραχμάς, αἱ ὁποῖαι πρέπει ἀκόμη νὰ μοιρασθῶσιν εἰς τοὺς 999 ἀνθρώπους· γίνεται δὲ τοῦτο διὰ νέας διαιρέσεως 590296 : 999.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν κάμνω τὴν αὐτὴν συντομίαν καὶ εὑρίσκω ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν 999 ἀνθρώπων 590 καὶ θὰ μείνωσι καὶ 886 δραχμαί.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ ἔδωκε πηλίκον 589875+590, ἤτοι 590465, κατάλοιπον δὲ 886.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

```
 589507 | 9999          175603 | 99
9507      58                 3   1756
9565                      1759     17
                            59   1773 πηλίκον
                            76
```

Δι' ὁμοίου τρόπου ἐσυντομεύθη καὶ ἡ ἑπομένη διαίρεσις (εἰς τὴν ὁποίαν παρεδέχθην 2 ἀνθρώπους)·

```
21508954 | 998
21508      21508
  954         43
43970          1
43         21552 πηλίκον
 970
1056
   1
  56
  58 ὑπόλοιπον
```

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία, εἶνε δὲ καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πίνακα περιέχοντα τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμοὺς κατὰ σειράν· τότε δι' ἁπλῆς ἐπόψεως τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον καὶ ἑπομένως εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου· ὥστε ἡ διαίρεσις καὶ συντομώτερον ἐκτελεῖται καὶ ἀσφαλέστερον.

Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμνωμεν, καὶ ὅταν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαιρέσεις· διότι τότε ὁ πίναξ, τὸν ὁποῖον ἅπαξ ἐσχηματίσαμεν, χρησιμεύει εἰς ἁπάσας τὰς διαιρέσεις ταύτας.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

68. *Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον* (ἐὰν ὑπάρχῃ)· *ἐὰν τότε εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους* (ἰδὲ ἐδ. 59).

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

69. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην, ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν βλάπτεται, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω ἡ διαίρεσις 58 : 9, ἥτις δίδει πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 4· λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, τὸ μὲν πηλίκον μένει πάλιν 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 γίνεται 4×5.

Ἀπόδειξις. Ὅσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὸν 9 ἀπὸ τοῦ 58, τόσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω καὶ τὸ 9+9+9+9+9 ἀπὸ τοῦ 58+58+58+58+58· διότι ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρῶ ἕκαστον 9 ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου 58 (τὸ πρῶτον 9 ἀπὸ τοῦ πρώτου 58, τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς)· ὡς ἑξῆς φαίνεται·

$$\begin{array}{r} 58+58+58+58+58 \\ 9+\ 9+\ 9+\ 9+\ 9 \\ \hline 49+49+49+49+49 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ἀλλ' ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ 9 ἀπὸ τοῦ 58, μένει ὑπόλοιπον 4· ἄρα ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ 9+9+9+9+9 ἀπὸ τοῦ 58+58+58+58+58, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 4+4+4+4+4.

Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι τὸ γινόμενον 9×5 περιέχεται 6 φορὰς εἰς τὸ γινόμενον 58×5, μένει δὲ ὑπόλοιπον 4×5, ὅπερ εἶνε προφανῶς μικρότερον τοῦ 9×5.

Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία, βλέπομεν, ὅτι θὰ μείνῃ τελεία καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν· ὅθεν ἕπεται ἡ πρότασις.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τελείας διαιρέσεως ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται καὶ ἡ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς τελείας διαιρέσεως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις 36 : 4, ἥτις δίδει πηλίκον 9. Κατὰ τὴν ἰδιότητα πάσης τελείας διαιρέσεως (ἐδ. 57) θὰ εἶνε 36=4×9· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς (τὸν 36 καὶ τὸν

$4\times9)$ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, πάλιν μένουσιν ἴσοι· ὅθεν ἕπεται $36\times5=(4\times9)\times5$

ἢ $36\times5=(4\times5)\times9$ (ἐδ. 49, ἰδιότ. 2)

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 36×5 σύγκειται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 4×5 ἐννεάκις ληφθέντος· ἤτοι περιέχει αὐτὸν ἐννέα φοράς· ἐπομένως ὁ 36×5 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4×5 καὶ δίδει πηλίκον 9.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δι' ὁμοίου τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 59)· ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἀπόδειξις εἶνε δυσκολωτέρα.

Ἵνα δώσωμεν ἐφαρμογήν τινα τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 5, ἔστω τὸν 857505· ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται, ἀλλ' ὁ διαιρέτης γίνεται 10 καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἁπλούστατα· οὕτως εὑρίσκομεν πηλίκον 171501. Ὁμοίως, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' 100.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

70. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ* (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς).

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ γινόμενον

$$5\times12\times8\times7$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4· λέγω, ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα παράγοντα αὐτοῦ, οἷον τὸν 12, διὰ τοῦ 4, ἤτοι ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶνε

$$5\times3\times8\times7$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος τετράκις ληφθεὶς δίδει τὸν διαιρετέον.

Τῷ ὄντι κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49) εἶνε $(5\times3\times8\times7)\times4=5\times(3\times4)\times8\times7=5\times12\times8\times7$.

Πόρισμα

71. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Διότι, ἂν λόγου χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $18\times4\times12\times9\times7$ διὰ τοῦ 9, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παράγοντα 9 διὰ τοῦ διαιρέτου 9· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε

$$18\times4\times12\times1\times7$$

ἢ

$$18\times4\times12\times7,$$

διότι ἡ μονὰς 1 ὡς παράγων δύναται νὰ παραλείπηται.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

72. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου* (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς).

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$· ἐὰν πρῶτον εὕρω τὸ γινόμενον τοῦτο (ὅπερ εἶνε 30) καὶ ἔπειτα ἐκτελέσω τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκω πηλίκον 12· λέγω δέ, ὅτι τὸ αὐτὸ πηλίκον θὰ εὕρω, καὶ ἂν διαιρέσω τὸν 360 πρῶτον διὰ 2, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διαιρέσω διὰ 3 καὶ ἔπειτα τὸ νέον πηλίκον διὰ 5.

Ἀπόδειξις. Ὁ διαιρετέος 360 εἶνε ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου $2\times3\times5$, ἐπὶ τὸ πηλίκον 12.

ἤτοι

$$360=(2\times3\times5)\times12$$

ἢ

$$360=2\times3\times5\times12$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 360 (ἢ τὸ ἴσον αὐτοῦ γινόμενον) διὰ 2, θὰ εὕρωμεν πηλίκον (ἐδ. 71) τὸ ἑξῆς $3\times5\times12$· ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ 3, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ 5×12· ἐὰν δὲ τὸ νέον τοῦτο πηλίκον διαιρέσωμεν διὰ 5, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ 12, τουτέστι τὸ αὐτὸ πηλίκον, ὅπερ εὕρομεν διαιρέσαντες τὸν 360 διὰ μιᾶς διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

73. *Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθενται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, λόγου χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα

$12+20+40$ διὰ τοῦ 4 (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτό)·

ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν προσθετέον 12 διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν πηλίκον 3, ἐὰν δὲ τὸν 20, εὑρίσκομεν πηλίκον 5, καὶ τέλος ὁ 40 δίδει πηλίκον 10· λέγω δέ, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε

$$3+5+10$$

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει (ἐδ. 34)

$$(3+5+10)\times 4=(3\times 4)+(5\times 4)+(10\times 4)=12+20+40.$$

τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἴσοι ἀριθμοὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρούμενοι δίδουσιν ἴσα πηλίκα (ἡ διαίρεσις ὑποτίθεται τελεία). Διότι, ἂν τὰ πηλίκα πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, πρέπει νὰ δίδωσιν ἴσα γινόμενα (τοὺς ἴσους διαιρετέους)· τοῦτο ὅμως δὲν θὰ ἐγίνετο, ἂν τὰ πηλίκα ἦσαν ἄνισα· διότι τῶν ἀνίσων τὰ ἰσοπολλαπλάσια εἶνε ἄνισα.

Παρατήρησις.

74. Ἡ διαίρεσις ὡς ἐξ ἀρχῆς εἴδομεν, δύναται νὰ ὁρισθῇ ἢ ὡς *μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἴσα*, ἢ *ὡς εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσας φορὰς χωρεῖ ἀριθμός τις ἄλλον*. Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις ἐμφανίζεται ὑπὸ δύο διαφόρους ὄψεις, αἵτινες ὡς πρὸς τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶνε ἐντελῶς ἀδιάφοροι, διακρίνονται ὅμως σαφέστατα ἀπ' ἀλλήλων ἐν τοῖς προβλήμασιν.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα.

1) Πόσον ἀξίζει 1 πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 15 πήχεις ἀξίζουν 75 δραχμάς;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν εἰς 15 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον μέρος θὰ εἶνε ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχεως.

Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ὁ διαιρετέος 75 δραχμαὶ εἶνε συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ δὲ διαιρέτης 15 εἶνε ἀφῃρημένος· τὸ δὲ πηλίκον, ὡς *μέρος* τοῦ 75, εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.

2) *Μὲ 75 δραχμὰς πόσους πήχεις δύναμαι νὰ ἀγοράσω ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς πωλεῖται 15 δραχμάς;*

Διὰ νὰ ἀγοράσω 1 πῆχυν, πρέπει νὰ δώσω 15 δραχμάς, τότε μοὶ μένουν 75—15, ἤτοι 60 δραχμαί· διὰ νὰ ἀγοράσω καὶ ἄλλον, πρέπει ἐκ τῶν 60 δραχμῶν νὰ δώσω πάλιν 15, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐντεῦθεν βλέπω, ὅτι τόσους πήχεις θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 75 τὸν 15· ὥστε πάλιν θὰ διαιρέσω τὸν 75 διὰ 15. Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ 75 καὶ 15 θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως εἶνε ἐπίσης ἀφῃρημένος ἀριθμός, λαμβάνει δὲ ἔπειτα τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἥτις δύναται νὰ εἶνε οἱαδήποτε.

Ὅταν θέλω νὰ διακρίνω τὰς δύο ταύτας διαιρέσεις ἀπ' ἀλλήλων, θὰ λέγω τὴν μὲν πρώτην *μερισμὸν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς *μερίδιον*, τὴν δὲ δευτέραν *μέτρησιν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς λόγον· (ὑποθέτω τὰς διαιρέσεις τελείας).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶνε τόσα, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου, ἢ ἀκόμη ἕν.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν ἀριθμὸν 21 νὰ δίδῃ γινόμενον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία νὰ εἶνε ὅμοια· λόγου χάριν 5.

('Απ. Ὑπάρχουσιν ἄπειροι τοιοῦτοι ἀριθμοί· ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν εἶνε ὁ 26455).

3) Πότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι; καὶ πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ αὐξήσῃ τὸ πηλίκον κατὰ μίαν μονάδα;

4) Ἐὰν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης μείνῃ ὁ αὐτός, ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

5) Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου· νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶνε ἢ ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου τῆς πρώτης διαιρέσεως· καὶ ἴσον μὲν θὰ εἶνε, ἂν τὰ

ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶνε μικρότερον τοῦ πηλίκου αὐτῆς· μεγαλήτερον δέ, ἂν τοὐναντίον.

6) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 853 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ὀκταδικοῦ.

Αἱ 853 ἁπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ ἀπαρτίζουσι τόσας μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως (ἤτοι ὀκτάδας), ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 853· διότι 8 μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀπαρτίζουσι μίαν τῆς ἑπομένης· διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 853 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἀπαρτίζονται 106 μονάδες δευτέρας τάξεως καὶ μένουσιν ἁπλαῖ μονάδες 5.

Αἱ 106 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως, ἀπαρτίζουσιν ὁμοίως τόσας μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 106, ἤτοι 13· μένουσι δὲ καὶ 2 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 13 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως ἀπαρτίζουσι μίαν τῆς τετάρτης τάξεως καὶ περισσεύουν καὶ 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, συνάγεται, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 853 θὰ γράφηται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἑξῆς· 1525.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

```
853 | 8
 53   106 | 8
  5    26   13 | 8
        2    5   1
```

Ἐπειδὴ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἐν τῷ ὀκταδικῷ συστήματι εἶνε αἱ ἑξῆς·

$1, \quad 8, \quad 8\times8, \quad 8\times8\times8, \quad 8\times8\times8\times8$, κτλ.

ἢ $1, \quad 8, \quad 8^2, \quad 8^3, \quad 8^4$. κτλ..

ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς παρίσταται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$5+8\times2+8^2\times5+8^3\times1\cdot$$

εἰς δὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα παρίσταται ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς·

$$3+10\times5+10^2\times8.$$

7) Νὰ τραπῇ ὁ εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα γεγραμμένος ἀριθμὸς 1202· εἰς τὸ κοινὸν σύστημα.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$2+3^2\times2+3^3\times1, \text{ ἤτοι τῶν } 2+18+27$$

καὶ ἑπομένως εἶνε ὁ 47.

———

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ.

Ὁρισμός.

78. *Διαιρετὸς* λέγεται ἀριθμός τις δι' ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤτοι χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον). Οἷον ὁ 15 εἶνε διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, κτλ. Ὁ δὲ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται *διαιρέτης* αὐτοῦ· παραδείγματος χάριν, ὁ 5 εἶνε διαιρέτης τοῦ 15, ὁ 4 εἶνε διαιρέτης τοῦ 20, κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται *πολλαπλάσιον* ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνηται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον ὁ 15 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times3$), ὁ 24 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times4$), κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος παράγει ἄλλον, λέγεται *παράγων* αὐτοῦ· οἷον ὁ 5 εἶνε παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶνε παράγων τοῦ 24, κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ ταῦτα μόνα.

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶνε οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἀριθμός τις διαιρεῖ ἄλλον, ἐννοοῦμεν, ὅτι διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Θεωρήματα περὶ τῆς διαιρετότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

76. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 25 καὶ 30· λέγω, ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10+25+30$.

Ἀπόδειξις. Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 10, 25 καὶ 30 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἤτοι σύγκειται ἐκ πολλῶν 5·

καὶ ὁ μὲν 10 εἶνε $5+5$,
ὁ δὲ 25 εἶνε $5+5+5+5+5$,
ὁ δὲ 30 εἶνε $5+5+5+5+5+5$·
ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10+25+30$ εἶνε
$5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5$,

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὸ ἐκ πολλῶν 5· ὥστε εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Πόρισμα.

77. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι

27×2, 27×3, 47×4, . . .
Διότι τὸ 27×2 εἶνε $27+27$,
τὸ 27×3 εἶνε $27+27+27$, κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

78. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 21 καὶ 12· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $21-12$.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ 21 εἶνε $3+3+3+3+3+3+3$·
ὁ δὲ 12 εἶνε $3+3+3+3$.
ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε $3+3+3$·

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὴ ἐκ πολλῶν 3· ὥστε εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ.

Ὁρισμός.

78. *Διαιρετὸς* λέγεται ἀριθμός τις δι᾽ ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι᾽ αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤτοι χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον). Οἷον ὁ 15 εἶνε διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, κτλ. Ὁ δὲ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται *διαιρέτης* αὐτοῦ· παραδείγματος χάριν, ὁ 5 εἶνε διαιρέτης τοῦ 15, ὁ 4 εἶνε διαιρέτης τοῦ 20, κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται *πολλαπλάσιον* ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνηται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον ὁ 15 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times3$), ὁ 24 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times4$), κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος παράγει ἄλλον, λέγεται *παράγων* αὐτοῦ· οἷον ὁ 5 εἶνε παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶνε παράγων τοῦ 24, κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ ταῦτα μόνα.

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶνε οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἀριθμός τις διαιρεῖ ἄλλον, ἐννοοῦμεν, ὅτι διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Θεωρήματα περὶ τῆς διαιρετότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

76. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 25 καὶ 30· λέγω, ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10+25+30$.

Ἀπόδειξις. Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 10, 25 καὶ 30 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἤτοι σύγκειται ἐκ πολλῶν 5·

καὶ ὁ μὲν 10 εἶνε $5+5$,
ὁ δὲ 25 εἶνε $5+5+5+5+5$,
ὁ δὲ 30 εἶνε $5+5+5+5+5+5$·
ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10+25+30$ εἶνε
$5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5$,

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὸ ἐκ πολλῶν 5· ὥστε εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Πόρισμα.

77. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι

27×2, 27×3, 47×4,...
Διότι τὸ 27×2 εἶνε $27+27$,
τὸ 27×3 εἶνε $27+27+27$, κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

78. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 21 καὶ 12· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $21-12$.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ 21 εἶνε $3+3+3+3+3+3+3$·
ὁ δὲ 12 εἶνε $3+3+3+3$.
ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε $3+3+3$·

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὴ ἐκ πολλῶν 3· ὥστε εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

79. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον.*

Διότι ὁ δεύτερος οὗτος ἀριθμὸς εἶνε ἡ διαφορά, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τὸν πρῶτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄

80. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ αὐτοῦ οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.*

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται, ὅταν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν. Ἂν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, μετά τινας ἀφαιρέσεις θὰ εὕρωμεν πάλιν τὸν πρῶτον διαιρετέον, ἑπομένως καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἡ ἀφαίρεσις αὕτη εἶνε μ[illegible] τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κάμωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον· καὶ διὰ τοῦτο δὲν βλάπτει αὐτό.

Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 8 καὶ 125, 3 καὶ 9, καὶ 11. Χαρακτηριστικὰ διαιρετότητος δι᾽ αὐτῶν.

Πολλάκις εἶνε ὠφέλιμον νὰ εἰξεύρωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν· (μάλιστα δὲ διὰ τοὺς ἀνωτέρω μικροὺς ἀριθμούς), καὶ ἂν δὲν εἶνε διαιρετός, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Εἰς τοῦτο χρησιμεύουσι τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 2 καὶ 5).

81. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου του.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ τυχὼν ἀριθμός, ὁ 9438· λέγω ὅτι, ἂν διαιρεθῇ διὰ 2 ἢ διὰ 5, θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφίνει

καὶ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 8· ἐπομένως, ἂν διὰ 5 διαιρεθῇ, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 3, ἂν δὲ διὰ 2, θὰ ἀφήσῃ 0.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη δεκὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 (διότι εἶνε $10=2\times5$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πάσας τὰς δεκάδας του ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 ἢ διὰ 5 δὲν βλάπτεται (ἰδ. 80). Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει 943 δεκάδας καὶ 8 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς δεκάδας του ἀνὰ μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 8 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν 8 μονάδων του εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

1) Οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε

0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8.

διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· λέγονται δὲ οἱ διὰ τοῦ 2 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ *ἄρτιοι*.

Οἱ δὲ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε

1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9

δὲν εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, (ἀλλ' ἀφίνουσιν ὑπόλοιπον 1)· λέγονται δὲ οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ *περιττοί*.

2) *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 5, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του εἶνε ἢ 0 ἢ 5.*

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 4 καὶ 25).

82. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ διὰ 25 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ 459386· λέγω, ὅτι, εἴτε τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὅλον διαιρέσωμεν διὰ 4, εἴτε μόνον τὸν 86 (ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Ὅμοιον δὲ θὰ συμβαίνῃ, ἂν διαιρέσωμεν διὰ 25.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 25 (διότι $100=4\times25$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πάσας τὰς ἑκατοντάδας του ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ διὰ 25 δὲν βλάπτεται (ἰδ. 80). Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει

4593 ἑκατοντάδας καὶ 86 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς ἑκατοντάδας του ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 86 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν 86 μονάδων του εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

83. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 (ἢ διὰ 25), ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 (ἢ διὰ 25).* Ἑπομένως διὰ 25 διαιροῦνται ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουσιν εἰς 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 8 καὶ 125).

84. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 75 429 804· λέγω, ὅτι, εἴτε τοῦτον ὅλον διαιρέσωμεν διὰ 8 εἴτε μόνον τὸν 804 (τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν των), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ 125.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη χιλιὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 125 (διότι $1000=8\times125$) ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πάσας τὰς χιλιάδας του ἀπὸ μίαν μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 δὲν βλάπτεται. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 75429 χιλιάδας καὶ 804 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς χιλιάδας του ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 804 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 804 εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

85. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 8 (ἢ διὰ 125), ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 (ἢ διὰ 125).*

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 9 καὶ 3).

86. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ διὰ*

3 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 4758· λέγω, ὅτι, εἴτε τοῦτον διαιρέσωμεν διὰ 9, εἴτε τὸ ἄθροισμα 4+7+5+8 (ἤτοι 24), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 3.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ 475 δεκάδων καὶ ἐξ 8 ἁπλῶν μονάδων· ἂν ἐκ μιᾶς δεκάδος (ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 10) ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ δεκὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ· ἂν λοιπὸν ἐκ τῶν 475 δεκάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστης τὸ 9, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 475 μονάδες καὶ 8 μονάδες· ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 475+8. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 47 δεκάδων τοῦ 475 ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 47+5+8. Ἐὰν δὲ τέλος ἐξ ἑκάστης τῶν 4 δεκάδων τοῦ 47 ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

4+7+5+8, ἤτοι ὁ 24.

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὕρομεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πολλάκις τὸ 9· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό· (ὅταν διαιρεθῶσι δι' 9).

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει, καὶ ὅταν διαιρέσωμεν διὰ 3· διότι ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμός, ὡς συγκείμενος ἐκ πολλῶν 9, εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3.

Πόρισμα.

87. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 3.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 849 408 διαιρεῖται διὰ 3· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶνε 33 καὶ εἶνε διαιρετὸν διὰ 3· διὰ τοῦ 9 δὲ διαιρούμενος θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 6 (ὅσον ἀφίνει καὶ ὁ 33).

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 941 608 διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 (ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ 3 κατὰ τὸ πόρισμα 77), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶνε 36, δηλαδὴ διαιρετὸν διὰ 9.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς ἀθροίσεως τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 9 (ἢ διὰ τοῦ 3)· δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἐφαρμόζοντες τὸ

αὐτὸ θεώρημα, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα ἓν ψηφίον, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται ἀμέσως. Παραδείγματος χάριν τοῦ ἀριθμοῦ 598 432 803 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 42· τούτου δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 6· ὥστε 6 εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9· διὰ δὲ τοῦ 3 διαιρεῖται ἀκριβῶς.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι, ἀθροίζοντες τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὰ 9, ἢ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9· διότι ἡ παράλειψις αὐτῶν δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον· ὥστε διὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ἀριθμὸν ἐργαζόμεθα συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

5 καὶ 8 κάμνουν 13 (ἔξω τὰ 9) 4, 4 καὶ 4 . . . 8, 8 καὶ 3 . . . 11 (ἔξω τὰ 9) 2, 2 καὶ 2, . . . 4, 4 καὶ 8 . . . 12 (ἔξω τὰ 9) 3, 3 καὶ 3 . . . 6.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 11).

88. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀναλύοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς διψήφια τμήματα* (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) *καὶ προσθέτοντες τὰ τμήματα ταῦτα.*

Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον.

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμός, ὁ 6 574 158· ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τὰ τμήματα 58, 41, 57 καὶ 6, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τούτων, ἤτοι τὸ $6+57+41+58$, διαιρούμενον διὰ 11 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐξ 65 741 ἑκατοντάδων καὶ ἐκ 58 μονάδων· ἂν ἐκ μιᾶς ἑκατοντάδος (ἢ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 100) ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φορὰς (ἤτοι, ἂν ἀφαιρέσωμεν 11×9 ἤτοι 99), μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ ἑκατοντὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ. Ἂν λοιπὸν ἐξ ἑκάστης τῶν 65 741 ἑκατοντάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 65 741 μονάδες καὶ 58 μονάδες, τουτέστι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $65741+58$. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 657 ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 65741 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

$$657+41+58$$

Ἐὰν δὲ τέλος ἐξ ἑκάστης τῶν 6 ἑκατοντάδων τοῦ 657 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, μένει ὁ ἀριθμὸς

$$6+57+41+58$$

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὑρήκαμεν ἀφαιρέσαντες πολλάκις τὸ 11 ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· ἄρα (ἐδ. 80) τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό, ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 11.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς διαιρέτας 33 καὶ 99. Διότι ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 99 καὶ κατ' ἀκολουθίαν πολλαπλάσιον τοῦ 33.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα $6+57+41+58$ παραλείψωμεν ἐξ ἑκάστου μέρους τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, τὸ ὑπόλοιπον δὲν βλάπτεται, εὑρίσκομεν δὲ ἄθροισμα τὸ $6+2+8+3$, ἤτοι 19· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο διαιρούμενον διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 8, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 8.

Πόρισμα

89. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς δι' 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται* (ἐκ δεξιῶν), *εἶνε διαιρετὸν δι' 11.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 859584 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 84, 95 καὶ 85 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε $85+95+84$, ἤτοι 264.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον 264, εὑρίσκομεν τὰ τμήματα 64 καὶ 2, ἅτινα δίδουσιν ἄθροισμα 66· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 11, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 358970412 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 12, 04, 97, 58 καὶ 3, ταῦτα δὲ ἔχουσιν ἄθροισμα

$$3+58+97+4+12$$

καὶ παραλειπομένων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 11, τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται

$$3+3+9+4+1 \text{ ἤτοι } 20\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ 20 ἀφίνει ὑπόλοιπον 9, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ 11, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 9.

* Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσ διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 11.

Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύνα γίνῃ καὶ διὰ τῶν ὑπολοίπων· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν ἑπομένων μάτων περὶ τῶν ὑπολοίπων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. *Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀθροίσματος, ὡς πρὸς οἱονδήποτε τὴν, δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον προσθετέον ὑπολοίπου του* (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἔστω τυχὸν ἄθροισμα 12+25+32· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπ τοῦ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 7 δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τὸ ὑπόλοιπόν του (ἤτοι τὸ 5) καὶ ἀντὶ τοῦ 25 τὸ ὑπόλοιπόν καὶ ἀντὶ τοῦ 32 τὸ ὑπόλοιπόν του 4· λέγω δηλαδή, ὅτι εἴτε θὲν ἄθροισμα 12+25+32 διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7, εἴτε τὸ 5+ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν.

Ἀπόδειξις. Διότι ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος πλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 7· τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον (ἐ

ΘΕΩΡΗΜΑ

91. *Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέ βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον παράγοντα διὰ τοῦ ὑ που του* (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἔστω τυχὸν γινόμενον τὸ 52×684· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπ τοῦ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 11 δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀ παράγοντος 52 τὸ ὑπόλοιπόν του 8 καὶ ἀντὶ τοῦ παράγοντ τὸ ὑπόλοιπόν του 2.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον 52×684 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθ 52+52+52+....+52 (οὕτινος οἱ προσθετέοι εἶνε ἑξακόσ δοήκοντα τέσσαρες)· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀντὶ ἑκάστου τέου θέσωμεν τὸ ὑπόλοιπόν του (ἤτοι τὸ 8), δὲν βλάπτεται τ λοιπον τοῦ ἀθροίσματος καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα

8+8+8+...+8, ἤτοι τὸ 8×684.

Καὶ πάλιν τὸ γινόμενον 8×684 εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα

$684+684+\ldots+684$ (ὅπερ ἔχει ὀκτὼ προσθετέους)· καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν πάλιν τὸ προηγούμενον θεώρημα, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $2+2+\ldots+2$, ἤτοι τὸ 2×8, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 11.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὰ ἡ ὀρθότης τοῦ ἑπομένου κανόνος.

92. *Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην, εὑρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν δύο παραγόντων ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην τοῦτον καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτά· τότε δὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ὑπολοίπων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἔχωσιν ἴσα ὑπόλοιπα.*

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμόν, τὸν ὁποῖον δοκιμάζομεν διὰ τοῦ 9·

```
     5207
      331
     ----
     5207            5 | 7
   15621             8 | 8
  15621
  -------
  1723517
```

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ γράψωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας ἐν σχήματι σταυροῦ, σημειοῦμεν εἰς τὰς δύο ἄνω γωνίας τὰ ὑπόλοιπα, 5 καὶ 7, τῶν δύο παραγόντων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα, 5×7, καὶ γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 35, ἤτοι τὸ 8, εἰς μίαν τῶν ὑποκάτω γωνιῶν· τέλος εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 1723517, τὸ ὁποῖον πρέπει (ἂν δὲν ἔγινε λάθος) νὰ εἶνε καὶ αὐτὸ 8, καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν τελευταίαν γωνίαν.

Ὁμοία δοκιμὴ γίνεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν. *Λαμβάνομεν τὰ ὑπόλοιπα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως· ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς πρέπει* (ἂν δὲν ἔγινε λάθος τι) *νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ δίδει καὶ ὁ διαιρετέος.*

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91, ἔτι δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφ. 59. Τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ παραλείπομεν, ὡς εὐκόλως εὑρισκομένην.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ διὰ τῶν ὑπολοίπων δοκιμὴ μικρὰν ἔχει ἀξίαν· διότι, καὶ ὅταν ἐπιτυγχάνῃ, δὲν δυνάμεθα μετὰ βεβαιότητος νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος· ἂν λόγου χάριν ἔγινε λάθος τι καὶ εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἡ διὰ τοῦ 9 δοκιμὴ δὲν δύναται νὰ ἐξελέγξῃ αὐτὸ (ὡς λόγου χάριν, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου μείνωσι μὲν τὰ αὐτά, ἀλλάξωσιν ὅμως θέσιν)· διότι παραλείπει τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9.

Αἱ ἄλλαι δοκιμαὶ (ἐδ. 43 καὶ 68) εἶνε ἀσφαλέστεραι, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὰς ἐνδέχεται νὰ ὑποπέσῃ τις εἰς νέα λάθη. Διὰ τοῦτο νομίζομεν, ὅτι ἡ ἀρίστη δοκιμὴ ἑκάστης ἀριθμητικῆς πράξεως εἶνε ἡ μετὰ προσοχῆς ἐπανάληψις αὐτῆς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδουσιν ὑπόλοιπα ἴσα.

Διότι διαφέρουσι κατὰ τὸν διαιρέτην (ἰδὲ ἐδ. 80).

2) Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ 4.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται εἰς τὸ ἑξῆς· ἂν ἀπὸ μιᾶς δεκάδος ἀφαιρέσωμεν τὸ 4 δίς, ἡ δεκὰς γίνεται 2.

3) Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 8.

4) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων εἶνε διαιρετὸν διὰ 6.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000,.... διαιρούμενοι διὰ 6 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4.

5) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶνε 0, ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Εἰς τὴν πρότασιν ταύτην φθάνομεν, ἐάν, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων), προσθέσωμεν εἰς

έκαστον τμήμα τόσας μονάδας, όσας έχει αυτό δεκάδας, συνάμα δε αφαιρέσωμεν τας προστεθείσας μονάδας (άν λόγου χάριν το τμήμα είνε 68, θα γράψωμεν 66 + 8 — 6).

6) Αριθμός οιοσδήποτε είνε διαιρετός διά του 7, εάν το άθροισμα του ψηφίου των μονάδων και του τριπλασίου του όλου αριθμού των δεκάδων του είνε διαιρετόν διά 7.

Η απόδειξις στηρίζεται εις τούτο, ότι εκάστη δεκάς γίνεται 3, όταν αφαιρεθή απ' αυτής ο 7.

7) Αριθμός οιοσδήποτε είνε διαιρετός διά 37, εάν το άθροισμα των τριψηφίων τμημάτων, εις ά αναλύεται (από των απλών μονάδων), είνε διαιρετόν διά του 37· (το τελευταίον προς τα αριστερά τμήμα δύναται να έχη δύο μόνον ψηφία, ή και εν μόνον).

Η απόδειξις στηρίζεται εις τούτο, ότι εκάστη χιλιάς (ήτοι ο 1000) γίνεται απλή μονάς, όταν αφαιρεθή απ' αυτής πολλαπλάσιόν τι του 37 $(999=37\times27)$.

8) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών δεν δύναται να είνε διαιρετόν διά του 7, εάν εκάτερος των αριθμών τούτων δεν είνε διαιρετός διά του 7.

Η απόδειξις της προτάσεως ταύτης στηρίζεται επί των θεωρημάτων 90 και 91 και επί τούτου, ότι δεν υπάρχουσι δύο αριθμοί μικρότεροι του 7, των οποίων τα τετράγωνα προστιθέμενα να αποτελώσιν αριθμόν διαιρετόν διά του 7.

9) Το γινόμενον τριών εφεξής αριθμών είνε πάντοτε διαιρετόν διά του 6.

10) Το γινόμενον δύο εφεξής αριθμών και του αθροίσματος αυτών είνε πάντοτε διαιρετόν διά του 6.

11) Εάν αριθμός διαιρή δύο άλλους, θα διαιρή και το υπόλοιπον της διαιρέσεως αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὁρισμοί.

93. *Κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν διαιρῇ αὐτοὺς πάντας ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

16. 24. 36. 20

κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 2· διότι διαιρεῖ αὐτοὺς πάντας· τῶν αὐτῶν δὲ ἀριθμῶν κοινὸς διαιρέτης εἶνε καὶ ὁ 4.

94. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται, ὡς δεικνύει καὶ τὸ ὄνομά του, ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 16. 24. 40 ἔχουσι τοὺς ἑξῆς κοινοὺς διαιρέτας· 1. 2. 4. 8· καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶνε ὁ 8.

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

Τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 3, 5 καὶ 9.

Θεωρήματα περὶ τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

95. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἐξ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀφαιρεθῇ ἄλλος.*

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς τυχόντας ἀριθμοὺς

40 128 320 72·

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν βλάπτονται, ἂν λόγου χάριν ἀπὸ τοῦ 320 ἀφαιρέσω τὸν 72·

λέγω δηλαδή, ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν

40. 128. 320. 72.

καὶ οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν 40. 128. 248. 72.

εἶνε οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθ-

θμῶν ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 320 καὶ 72, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 248 (ἰδὲ ἐδ. 78)· ἐπομένως θὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς. Καὶ πάλιν, πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας σειρᾶς, ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 248 καὶ 72, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 320 (ἐδ. 76)· ἐπομένως θὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

Πόρισμα

96. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του δι' ἄλλου μικροτέρου.*

Διότι, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τοῦ μεγαλητέρου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ μικροτέρου· δὲν θὰ βλαφθῶσι δὲ οἱ κοινοὶ διαιρέται· διότι εἰς ἑκάστην τῶν ἀφαιρέσεων τούτων δὲν βλάπτονται.

Παραδείγματος χάριν, χωρὶς νὰ βλάψω τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, δύναμαι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν

	40	128	320	72.	νὰ λάβω
τοὺς ἑξῆς	40	128	248	72,	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	40	128	176	72.	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	40	128	104	72.	καὶ τέλος ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	40	128	32	72,	

εἶνε δὲ ὁ 32 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 320 διὰ 72.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0, παραλείπεται.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ	120	40	32
καὶ οἱ	80	40	32
καὶ οἱ	40	40	32
ἤτοι οἱ		40	32

ἔχουσι προδήλως τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.*

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς ἀριθμοὺς 40, 80, 120, 8, ἐξ ὧν ὁ μικρότερος (ὁ 8) διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶνε ὁ 8.

Ἀπόδειξις. Ὁ 8 εἶνε κοινὸς διαιρέτης· διότι διαιρεῖ ἑαυτὸν (καὶ δίδει πηλίκον 1), διαιρεῖ δὲ καὶ τοὺς ἄλλους πάντας· ἄλλος ὅμως ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ 8 δὲν δύναται νὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8· διότι δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 8 ὡς μικρότερόν του· ἄρα ὁ 8 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

98. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν προηγουμένων προτάσεων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καί, ἐὰν μὲν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, ὁ μικρότερος εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρημα 97). Ἐὰν δὲ μείνῃ ὑπόλοιπον, λαμβάνομεν αὐτὸ ἀντὶ τοῦ μεγαλητέρου καὶ οὕτως ἔχομεν δύο ἄλλους ἀριθμούς· τουτέστι τὸ ῥηθὲν ὑπόλοιπον καὶ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δύο δοθέντες (Πόρισμα 96)· ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Καὶ ἐπὶ τούτων ποιοῦμεν τὰ αὐτὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως ἀλλάσσοντες τοὺς ἀριθμούς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο ἀριθμούς, ἐξ ὧν ὁ μεγαλήτερος νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ μικροτέρου ἀκριβῶς· τότε ὁ μικρότερος οὗτος θὰ εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἑξῆς ἀριθμοί: 72 καὶ 414.

Διαιροῦντες τὸν 414 διὰ 72, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 54· ὥστε ἀντ' αὐτῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς δύο: 72 καὶ 54.

Διαιροῦντες τὸν 72 διὰ τοῦ 54 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 18· ὥστε ἀντὶ τούτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς δύο: 54 καὶ 18.

Διαιροῦντες τὸν 54 διὰ 18, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ 18 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 414 καὶ 72.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομίας χάριν ὡς ἑξῆς·

	5	1	3
414	72	54	18
54	18	0	

Αἱ διαιρέσεις εἶνε διατεταγμέναι κατὰ τὸν συνήθη τρόπον μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ πηλίκον ἑκάστης γράφεται ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου αὐτῆς, ἡ δὲ ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου θέσις φυλάσσεται διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἑπομένης διαιρέσεως.

Ἐὰν εὑρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἡ μονάς, τοῦτο σημαίνει, ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παράδειγμα.

	19	1	1	7	2
414	32	17	15	2	1
32	15	2	1	0	
305					
288					
17					

Κανών.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

99. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἔπειτα, ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*

Παρατήρησις. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦτον εἰς δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, θὰ εὕρωμεν ἐξ ἅπαντος μετά τινας διαιρέσεις ὑπόλοιπον 0· διότι τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν, προβαίνουσιν ἐλαττούμενα· ὅταν δὲ ἀριθμός τις ἐξακολουθῇ νὰ ἐλαττῶται, ἐπὶ τέλους καταντᾷ μηδέν, καὶ κατὰ μίαν μονάδα ἂν γίνηται ἡ ἐλάττωσις.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ὅσων ἀριθμῶν.

100. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν αὐτῶν προτάσεων (ἐδ. [illegible] νάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὅσων[illegible] θμῶν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τ[illegible] ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε 0, ὁ ἀρι[illegible] διῃρέσαμεν, εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θε[illegible] δὲ μή, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ὧν τὰ ὑπόλοιπα ἕκαστον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του· καὶ ἔχομεν οὕτω νέαν σειρ[illegible] οἵτινες (κατὰ τὸ πόρισμα 96) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινο[illegible] οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δοθέντες· ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐ[illegible] κοινὸν διαιρέτην. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐργαζόμεθα [illegible] τῶν πρώτων· καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτο[illegible] φθάσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα, ὅστις νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς [illegible] ἕως· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς [illegible]

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς πα[illegible]
(Αἱ διαιρέσεις ἐκτελοῦνται χωριστά.)

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ	132	[illegible]	[illegible]
διὰ 60	12	[illegible]	[illegible]
διὰ 12	12		

ὥστε ὁ 12 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν [illegible].

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις οἱ ἑξῆς ἀριθμοί.

	36	[illegible]	[illegible]
διὰ [illegible]	12	[illegible]	
διὰ [illegible]	[illegible]	[illegible]	
διὰ [illegible]	[illegible]	[illegible]	

ὥστε ὁ [illegible] εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

101. Ἡ εὕρεσις τοῦ [illegible]

[illegible]

του, ὧν τινες δυνατὸν νὰ εἶνε εὐκολώτεροι τῶν ἄλλων, ἂν καὶ πάντες φέρουσι προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἄξιος ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶνε ὁ ἑξῆς τρόπος.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ πόρισμα 96 εἰς δύο μόνον ἀριθμούς, διατηρῶμεν δὲ τοὺς ἄλλους ἀμεταβλήτους, φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ὅστις ἑπομένως δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτούς, χωρὶς νὰ βλαφθῶσιν οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἄρα οὐδὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς αὐτοὺς καὶ προηγουμένως ἀριθμοὺς

	432	504	324	60·	ἀντὶ τούτων
λαμβάνω τοὺς ἑξῆς	432	72	324	60	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	0	72	324	60,	

εἶνε δὲ ὁ 72 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 432 καὶ 504.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

102. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Οὐ μόνον δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, ἀλλὰ καὶ πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται διατηροῦνται ἀμετάβλητοι εἰς τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην.

103. Δυνάμεθα κατ' ἀκολουθίαν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην πολλῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκοντες πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τούτου καὶ ἑνὸς ἄλλου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς (ὡς καὶ εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων)· ὁ τελευταῖος εὑρισκόμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ ζητούμενος.

Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ συνήθως περισσοτέρας πράξεις ἢ ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθείς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικατασταθῶσιν ὁσοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

104. *Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶνε μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ οἱ ἑξῆς 336, 168, 144, 96, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 24, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

336	168	144	96
48	72	48	96
48	24	0	0
0	24	0	0

Λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν ἔχουσιν ἄλλους κοινοὺς διαιρέτας ἢ μόνον τοὺς διαιρέτας τοῦ 24.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἵνα εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 24, ἀντικατεστήσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν 48, 72, 96· τοῦτο δὲ δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινοὺς διαιρέτας αὐτῶν (Πόρισμα 96)· ἔπειτα πάλιν ἀντικατεστήσαμεν καὶ τούτους διὰ τῶν 48, 24, ὅπερ καὶ τοῦτο δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινοὺς διαιρέτας· ἐπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε διαιρέται τοῦ 24.

Καὶ πάντες δὲ οἱ διαιρέται τοῦ 24 εἶνε κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε πολλαπλάσια τοῦ 24.

ΘΕΩΡΗΜΑ

105. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα ἀριθμόν, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοί, οἱ 60 καὶ 204, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 12· ὡς ἑξῆς φαίνεται·

204	60
24	60
24	12
0	12

λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 8, τὰ γινόμενα αὐτῶν 204×8 καὶ 60×8 θὰ

ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12×8, καὶ αἱ πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀπαιτούμεναι ἀντικαταστάσεις εἶνε αἱ ἑξῆς

204×8	60×8
24×8	60×8
24×8	12×8
0	12×8

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 69, ὅταν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 204×8 διὰ τοῦ 60×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ 24×8· (ὁ 24 εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 204 διὰ τοῦ 60)· καὶ ἂν ἔπειτα διαιρέσωμεν τὸ 60×8 διὰ τοῦ 24×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ 12×8 (12 εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ 24)· καὶ τέλος, ἂν διαιρέσωμεν τὸ 24×8 διὰ τοῦ 12×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 204×8 καὶ 60×8 εἶνε 12×8.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους ἀριθμούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

106. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἂς λάβωμεν τοὺς τυχόντας ἀριθμούς, οἷον τοὺς

42 70 182,

οἵτινες ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14. Λέγω, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 7, τὰ πηλίκα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβωμεν, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 6, 10, 26, θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τοῦ 14 διὰ 7, ἤτοι τὸν 2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 26 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ μ· τότε τῶν ἀριθμῶν 6×7, 10×7, 26×7 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης θὰ εἶνε ὁ μ×7 (ἐδ. 105)· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 6×7, 10×7, 26×7, εἶνε αὐτοὶ οἱ ληφθέντες 42, 70, 182, (διότι 6, 10 καὶ 26 εἶνε τὰ πηλίκα αὐτῶν διαιρουμένων δι' 7) καὶ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14· ὥστε θὰ εἶνε μ×7=14.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ μ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 14 διὰ 7· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται ἐνίοτε νὰ συντομευθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου. Διότι, ἂν εἰξεύρωμεν ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τούτου, καὶ ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν εὑρεθέντων πηλίκων· ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν αὐτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν δ καὶ ἔχομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 1500, 1800, 7500 (οἵτινες διαιροῦνται πάντες διὰ 100), εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν

15, 18, 75, ὅστις εἶνε 3,

καὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἐπὶ 100· ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 300 θὰ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

107. *Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλίκα θὰ εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ἂς παραστήσωμεν τρεῖς τυχόντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν διὰ τοῦ Μ, τὰ δὲ πηλίκα αὐτῶν (ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Μ) διὰ α, β, γ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διῃρέθησαν διὰ Μ, καὶ ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης Μ διῃρέθη διὰ Μ καὶ ἐπομένως ἔγινεν 1. Ἄρα οἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντες ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα· ἤτοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατήρησις.

Διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου παριστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ἐφ' ὧν σκεπτόμεθα, ὅταν οἱ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους κάμνομεν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, μένωσιν οἱ αὐτοί, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοί. Ἡ παράστασις αὕτη τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ σαφεστέραν τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων, ἐν ᾧ, ὅταν λαμβάνωμεν ὡρισμένους ἀριθμούς, ἡ ἀπόδειξις φαίνεται, ὡς ἂν ἐγίνετο μόνον διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἐπίσης παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων τοὺς ἀριθμούς, ὅταν εἶνε ἄγνωστοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

108. *Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ κοινοῦ τινος αὐτῶν διαιρέτου δίδωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ διαιρέτης οὗτος εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τυχόντες ἀριθμοί, δ κοινός τις αὐτῶν διαιρέτης, καὶ α, β, γ τὰ πηλίκα τῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διὰ δ· λέγω, ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης δ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ α×δ, β×δ, γ×δ, τουτέστιν οἱ Α, Β, Γ, θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 1×δ, ἤτοι δ· (ἐδ. 105)· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς ἕκαστον θεώρημα διακρίνομεν *ὑπόθεσιν* καὶ *συμπέρασμα*. Τοῦ θεωρήματος τούτου ὑπόθεσις εἶνε, *ὅτι τὰ πηλίκα α, β, γ, ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διαιρεθέντες διὰ δ, εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα*, συμπέρασμα δὲ εἶνε, *ὅτι ὁ διαιρέτης, δ, ὁ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ διαιρέσας, εἶνε ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης*. Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχει ὑπόθεσιν μέν, *ὅτι ὁ διαιρέτης δ, ὁ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ διαιρέσας, εἶνε ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης*, συμπέρασμα δέ, *ὅτι τὰ πηλίκα α, β, γ, ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διαιρεθέντες διὰ δ, εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα*. Ὅταν δύο θεωρήματα εἶνε τοιαῦτα, ὥστε *ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς νὰ εἶνε συμπέρασμα τοῦ ἄλλου*, καὶ τἀνάπαλιν, τὰ θεωρήματα ταῦτα λέγονται *ἀντίστροφα* πρὸς ἄλληλα. Τοιαῦτα εἶνε τὰ δύο τελευταῖα θεωρήματα.

Θεμελιῶδες θεώρημα.

Περὶ τῶν διαιρετῶν τοῦ γινομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

109. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, διαιρεῖ τὸν ἄλλον.*

Ἔστω τὸ τυχὸν γινόμενον Α×Β καὶ ἄς διαιρῇ αὐτὸ ὁ ἀριθμὸς Δ· ἄς εἶνε δὲ ὁ Δ πρῶτος πρὸς τὸν Α· λέγω, ὅτι ὁ Δ θὰ διαιρῇ τὸν Β

'Απόδειξις. Οἱ ἀριθμοὶ Δ καὶ Α ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $\Delta \times B$ καὶ $A \times B$ θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ $1 \times B$, ἤτοι τὸ Β. (ἰδ. 105).

'Επειδὴ δὲ ὁ Δ διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς $\Delta \times B$, $A \times B$ (τὸν μὲν πρῶτον ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸν δὲ δεύτερον ἐξ ὑποθέσεως), θὰ διαιρῇ (ἰδ. 104) καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, τουτέστι τὸν Β. τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. 'Αριθμός τις δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, χωρὶς νὰ διαιρῇ μήτε τὸν ἕνα μήτε τὸν ἄλλον· οἷον ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 6×4· ἐνῷ δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸν 6 οὔτε τὸν 4.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) 'Εὰν δύο ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν θὰ εἶνε ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

2) 'Εὰν δύο ἀριθμοὶ Α, Β εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $A+B$ καὶ ἡ διαφορὰ $A-B$ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἢ 1 ἢ 2.

3) 'Εὰν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκύπτον γινόμενον εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν $A \times \Gamma$, $A \times \Delta$, $B \times \Gamma$, $B \times \Delta$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 5, ἄθροισμα δὲ τὸν 90. ('Απ. (5, 85) ἢ (25, 65) ἢ (35, 55)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

110. *Πρῶτος ἀριθμὸς* λέγεται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶνε πρῶτοι ἀριθμοί.

Σύνθετος δὲ λέγεται ὁ μὴ πρῶτος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶνε *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*, χωρὶς νὰ εἶνε *πρῶτοι* καθ' ἑαυτούς· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 6, 25, 49 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶνε πρῶτος.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

111. *Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον παραγόντων πρώτων.*

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Μ· λέγω, ὅτι ὁ Μ εἶνε γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ Μ ὡς σύνθετος θὰ διαιρῆται ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου του (ἐκτὸς τῆς μονάδος)· ἄρα θὰ εἶνε γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλητέρων ὅμως τοῦ 1)· καὶ ἂν μὲν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε πρῶτοι, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· ἂν δέ τις ἐξ αὐτῶν εἶνε σύνθετος, ἀναλύεται καὶ αὐτὸς ἐπίσης εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλητέρων ὅμως τοῦ 1)· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δέ, ὅσον προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταύτην, οἱ παράγοντες, ἐξ ὧν γίνεται ὁ Μ, γίνονται μικρότεροι, ἀλλ' ὄχι μικρότεροι τοῦ 2 (διότι πάντοτε ὑπερβαίνουσι τὴν μονάδα), ἕπεται, ὅτι θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς παράγοντας μὴ δυναμένους πλέον νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα ἀριθμῶν μικροτέρων των καὶ οἵτινες διὰ τοῦτο θὰ εἶνε πρῶτοι.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 6 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, οἵτινες εἶνε πρῶτοι· ἤτοι $6=2\times3$.

Ὁ 24 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον 4×6· καὶ ὁ μὲν 4 ἀναλύεται πάλιν εἰς τὸ γινόμενον 2×2, ὁ δὲ 6 εἰς τὸ 2×3· ὥστε εἶνε

$$24=4\times6=2\times2\times2\times3,$$
$$\text{ἢ καὶ } 24=2^3\times3.$$

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 56 ἔχομεν

$$56=7\times8=7\times2\times4=7\times2\times2\times2,$$
$$\text{ἢ καὶ } 56=2^3\times7.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ μάθωμεν γενικήν τινα μέθοδον τῆς ἀναλύσεως ταύτης τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶνε τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα, ἐξ ὧν γίνονται πάντες οἱ ἀριθμοὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτῶν ἔχουσι τὴν μεγίστην ῥοπὴν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Πρὶν ὅμως προβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν αὐτῶν, πρέπει νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκονται.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.

112. Ἡ ἑξῆς μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῶν ἄλλων, λέγεται *κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους*.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000.

Γράφομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν·

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.....1000

καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν καὶ διαγράφομεν πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ὁ 2 εἶνε προφανῶς πρῶτος ἀριθμός. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 δὲν εἶνε πρῶτοι ἀριθμοί· ὅθεν διαγράφομεν αὐτά· πρὸς τοῦτο ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀριθμοῦ 3 ἀριθμοῦμεν ἀνὰ δύο καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν δεύτερον ἀριθμόν, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 4. 6. 8. 10...

Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ἀριθμός, ὁ 3, εἶνε πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ τριπλασίου 3×3, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 9· διότι τὸ διπλάσιον τοῦ 3, ἤτοι 3×2, εἶνε ἤδη διαγεγραμμένον ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2· καὶ διαγράφομεν, ἀπὸ τοῦ 9 καὶ ἐφεξῆς, πάντα τρίτον ἀριθμόν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 12. 15. 18 κτλ. ἤτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον θὰ διαγράφωνται ἐκ δευτέρου καί τινες ἤδη διαγεγραμμένοι ἀριθμοί· τοῦτο ὅμως δὲν βλάπτει.

Ὁ ἀριθμὸς 4 διεγράφη ἤδη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2· διεγράφησαν δὲ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν πολλαπλασίων παντὸς συνθέτου ἀριθμοῦ· διότι ταῦτα εἶνε πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται ὁ σύνθετος· ὥστε ἀρκεῖ νὰ διαγράφωμεν μόνον τὰ πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Ὁ μετὰ τὸν 3 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμός, ὁ 5, εἶνε πρῶτος ἀριθμός· διότι δὲν εἶνε πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 5×5, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 25, (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 5, ἤτοι $5\times2, 5\times3, 5\times4$, εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα πέμπτον ἀριθμόν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 25, 30, 35, 40, . . ., ἤτοι πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 (ὧν τινα εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα).

Ὁ μετὰ τὸν 5 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμός, ὁ 7, εἶνε πρῶτος ἀριθμός· διότι δὲν εἶνε πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 7×7· ἤτοι ἀπὸ τοῦ 49· (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 7, ἤτοι τὰ 7×2, 7×3, 7×4, 7×5, 7×6, εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 7) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα ἕβδομον ἀριθμόν.

Παρατηρητέον δὲ ἐν γένει, ὅτι, ὅταν μέλλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια οἱουδήποτε πρώτου ἀριθμοῦ, τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπαντήσωμεν, εἶνε τὸ τετράγωνόν του· διότι τὰ μικρότερα θὰ εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων. Ὅταν π. χ. ἔλθωμεν εἰς τὸν 11 καὶ θέλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ πολλαπλάσια $11\times2, 11\times3, .., 11\times10$ θὰ εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 11· ὥστε πρῶτον θὰ ἀπαντήσωμεν καὶ θὰ διαγράψωμεν τὸ 11×11, ἤτοι τὸ 121. Ὁμοίως, ὅταν ἔλθωμεν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 13, θὰ ἀρχίσωμεν νὰ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 13×13, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 169· διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια αὐτοῦ θὰ εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγεται, ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 περιλαμβανομένους, ἀρκεῖ κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37, (τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 1369 εἶνε μεγαλείτερον τοῦ 1000). Διότι τότε οἱ ἀπομείναντες ἀριθμοὶ δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν, καὶ ἑπομένως δὲν εἶνε πολλαπλάσια οὐδενὸς ἀριθμοῦ· ἄρα εἶνε πρῶτοι.

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ μεταξὺ 1 καὶ 1000 περιεχόμενοι πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ γεγραμμένοι ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Περὶ τοῦ πλήθους τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

113. *Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶνε ἄπειρον·* λέγω δηλαδή, ὅτι, ὅσους καὶ ἂν εὕρῃ τις πρώτους ἀριθμούς, πάντοτε ὑπάρχουσι καὶ ἄλλοι.

'Απόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρήκαμεν πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἑξῆς A, B, Γ, Δ, . . . ,Π.
ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενόν των A×B×Γ×Δ×. . . ×Π καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν μίαν μονάδα, προκύπτει ἀριθμός τις

$$\text{ὁ} \quad (A\times B\times \Gamma\times \Delta\times \ldots \times \Pi)+1,$$

ὃν παριστῶ διὰ τοῦ Ω.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος Ω θὰ διαιρῆται διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ (δι' ἑαυτοῦ, ἂν εἶνε πρῶτος, δι' ἄλλου δὲ μικροτέρου, ἂν εἶνε σύνθετος)· ἀλλ' οὐδεὶς ἐκ τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ,.. ,Π, δύναται νὰ διαιρῇ τὸν Ω· Διότι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὸ γινόμενον A×B×Γ×Δ×...×Π (ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ)· ἂν λοιπὸν διῄρει καὶ τὸν Ω, θὰ διῄρει καὶ τὴν διαφορὰν των, ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὑπάρχει καὶ ἄλλος τις πρῶτος ἀριθμὸς ἐκτὸς τῶν δοθέντων, δηλαδὴ ἐκεῖνος, ὅστις διαιρεῖ τὸν Ω.

5

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. *Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶνε πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμὸν μὴ διαιρούμενον δι' αὐτοῦ.*

Ἂς λάβωμεν τὸν τυχόντα πρῶτον ἀριθμόν, ἔστω τὸν 7, καὶ ἄλλον οἱονδήποτε ἀριθμὸν A μὴ διαιρετὸν δι' αὐτοῦ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ A εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

'Απόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς 7, ὡς πρῶτος, δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας ἢ 1 καὶ 7· ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ A δὲν δύνανται νὰ εἶνε ἄλλοι ἢ 1 καὶ 7. Ἀλλ' ὁ 7 δὲν εἶνε κοινὸς διαιρέτης· διότι ἐξ ὑποθέσεως δὲν διαιρεῖ τὸν A· ἄρα ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε ἡ μονάς· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ A εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΘΕΩΡΗΜΑ

115. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενόν τι, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Ἔστω τὸ γινόμενον A×B καὶ ἂς διαιρῇ αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π. Λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων A, B·

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν μὲν ὁ Π διαιρῇ τὸν Α, τὸ θεώρημα εἶνε ἀποδεδειγμένον· ἂν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν Α, θὰ εἶνε πρῶτος πρὸς αὐτὸν (ἰδ. 114) καὶ διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν Β (ἰδ. 109).

Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ δύο παράγοντας· μένει δ' ἔτι νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ περισσοτέρους.

Ἂς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὸ γινόμενον Α×Β×Γ τῶν τριῶν παραγόντων Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον Α×Β×Γ θὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο μόνον παραγόντων (Α×Β) καὶ Γ, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δυο παράγοντας Α, Β διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν (ἰδ. 19)· ἑπομένως ὁ Π θὰ διαιρῇ ἢ τὸν Γ, ἢ τὸν ἀριθμὸν Α×Β. Ἀλλ' ἐὰν διαιρῇ τὸ γινόμενον Α×Β, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β.

Ἄρα ὁ Π διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας.

Πόρισμα 1ον

116. [illegible] τινος. Θὰ [illegible]

[illegible] Α. [illegible]

[illegible] Α.

Πόρισμα 2ον

[illegible]

[illegible]

οτέρων εἶνε οἱ αὐτοί· καὶ ἕκαστος περιέχεται εἰς ἀμφότερα ἰσάκις.
ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἴσων γινομένων ἔχει τὸν πα-
α 7· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν παράγοντα καὶ
ταράγοντας 7 ἔχει τὸ ἕν, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο.
όδειξις. Διότι ὁ 7 ὡς παράγων τοῦ πρώτου γινομένου θὰ δι-
ὑτό· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον ὡς ἴσον τῷ πρώτῳ. Ἀλλ'
ριθμὸς πρῶτος (ὡς ὁ 7) διαιρῇ τὸ γινόμενον παραγόντων πρώ-
ἶνε ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 117)· ἄρα καὶ τὸ δεύτερον γινόμε-
ἔχῃ τὸν παράγοντα 7.
ὅσους παράγοντας ἴσους τῷ 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους θὰ
ὶ τὸ ἄλλο. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἔχει τρεῖς παράγον-
τὸ δὲ ἄλλο δύο μόνον. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα
ὁ 7 δὶς (ὅπερ γίνεται, ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων ἐξαλείψωμεν δύο πα-
ας 7), πρέπει νὰ εὕρωμεν γινόμενα ἴσα. Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν
ούτων γινομένων εἶνε ἀδύνατος· διότι τὸ μὲν ἓν θὰ ἔχῃ τὸν πα-
α 7 ἅπαξ, τὸ δὲ ἄλλο δὲν θὰ ἔχῃ αὐτόν. Ἄρα ὅσους παρά-
7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους ἔχει καὶ τὸ ἄλλο.
είχθη λοιπόν, ὅτι, ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶνε
παράγοντες ἀμφοτέρων εἶνε οἱ αὐτοὶ καὶ μόνον κατὰ τὴν τά-
ανται νὰ διαφέρωσι.

Πόρισμα

19. *Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρ.*

ῶς ἐκτελεῖται ἡ ἀνάλυσις τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

20. Ἡ μέθοδος, δι' ἧς ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν ἀνάλυσιν τῶν
ων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, φαίνεται ἐκ
ομένου παραδείγματος.
ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθη πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 504.
πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ
λοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 252· ὅθεν εἶνε

$$504 = 2 \times 252$$

Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας δεικνύει σαφέστερον τὰς ἰδιότητας αὐτῶν καὶ καθιστᾷ ἁπλουστάτην τὴν λύσιν πολλῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων· μάλιστα δὲ τῶν ζητημάτων τῆς διαιρετότητος.

Α΄) ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

121. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας ἐκτελεῖται κατὰ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἰδ. 49) καὶ τὸ γινόμενον προκύπτει καὶ αὐτὸ ἀναλελυμένον εἰς πρώτους παράγοντας.

Παράδειγμα. Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς 360 καὶ 336, εὑρίσκομεν

$$360=2^3\times3^2\times5$$

$$336=2^4\times3\times7,$$

ὅθεν $$360\times336=2^3\times3^2\times5\times2^4\times3\times7.\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 2^3, 2^4 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 2^7 (ἰδ. 53), καὶ τοὺς παράγοντας 3^2, 3 διὰ τοῦ γινομένου των 3^3, θὰ ἔχωμεν

$$360\times336=2^7\times3^3\times5\times7$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

122. *Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν* (ἤτοι εἰς τὸ τετράγωνον), *ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν παραγόντων του· εἰς τὴν τρίτην, ἂν τριπλασιασθῶσι· καὶ ἐν γένει εἰς τὴν μνοστήν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ μ.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παράγων τις δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ἵνα ἀληθεύῃ ἡ πρότασις αὕτη, πρέπει νὰ θεωρῆται ἐκθέτης αὐτοῦ ἡ μονὰς 1. Τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ πάσας τὰς ἑπομένας προτάσεις, ἐν αἷς γίνεται λόγος περὶ ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 308.

Ἀναλύοντες αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας εὑρίσκομεν

$$308=2^2\times7\times11\cdot$$ ὅθεν

$$308\times308=2^2\times7\times11\times2^2\times7\times11=2^2\times2^2\times7\times7\times11\times11$$

$$\text{ἢ}\ 308^2=2^4\times7^2\times11^2.$$

Ὁμοίως εἶνε

$$308\times308\times308=2^2\times7\times11\times2^2\times7\times11\times2^2\times7\times11=$$
$$=2^2\times2^2\times2^2\times7\times7\times7\times11\times11\times11$$

ἤτοι

$$308^3=2^6\times7^3\times11^3.$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ πάντα ἐκθέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ

123. *Ἀριθμὸς εἶνε τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 2· καὶ τότε μόνον· κύβος δέ, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 3· καὶ τότε μόνον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ $2^6\times3^2\times7^4\times13^2$, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσιν ἐκθέτας ἀρτίους. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε τετράγωνον τοῦ ἑξῆς ἀριθμοῦ $2^3\times3\times7^2\times13$, (ὃν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας πάντας διὰ 2). Διότι τὸ τετράγωνον τούτου κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εὑρεθῇ, ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων του· τότε δὲ προκύπτει ὁ $2^6\times3^2\times7^4\times13^2$, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Ἔστω πάλιν τυχὼν ἀριθμός, ὁ $5^3\times7^2\times11^2$, τοῦ ὁποίου οἱ πρῶτοι παράγοντες δὲν ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας ἀρτίους· (ὁ 5 ἔχει ἐκθέτην μὴ ἄρτιον).

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶνε τετράγωνον ἄλλου· διότι παντὸς τετραγώνου οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσι τοὺς ἐκθέτας πάντας ἀρτίους ὡς προκύπτοντας ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $3^6\times5^3\times7^9\times11^3$, οὗτινος οἱ παράγοντες ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας διαιρετοὺς διὰ 3, εἶνε κύβος· εἶνε δὲ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ $3^2\times5\times7^3\times11$, ὃν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας αὐτοῦ πάντας διὰ τοῦ 3.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^5\times3^8\times7^6$ δὲν εἶνε κύβος οὐδενὸς ἀριθμοῦ· διότι οἱ ἐκθέται αὐτοῦ δὲν εἶνε πάντες διαιρετοὶ διὰ 3· ἀλλ' οἱ ἐκθέται παντὸς κύβου εἶνε πάντες διαιρετοὶ διὰ 3· διότι προκύπτουσιν ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ τριπλασιασμοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν δύναμιν καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

Β΄) ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πότε ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς δι' ἄλλου.

Ἔχοντες δύο ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ διακρίνωμεν, ἂν ὁ εἷς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ ἄλλου· τὸ δὲ γνώρισμα τῆς διαιρετότητος μανθάνομεν ἐκ τοῦ ἑξῆς θεμελιώδους θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

124. *Διὰ νὰ εἶνε ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἄλλου, πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τοσάκις τοὐλάχιστον, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.*

Ἀπόδειξις. Ὅταν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου· ἤτοι (ἰδ. 49, ἰδιότ. 3) εἶνε τὸ γινόμενον πάντων τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου καὶ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ πηλίκου· ἄρα ὁ διαιρετέος θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον τοὐλάχιστον τοσάκις, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης. (Δύναται δὲ καὶ ἄλλους παράγοντας νὰ περιέχῃ μὴ ὑπάρχοντας ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἢ νὰ περιέχῃ παράγοντά τινα περισσοτέρας φορὰς ἢ ὁ διαιρέτης. Οἱ τοιοῦτοι θὰ εἶνε παράγοντες τοῦ πηλίκου). Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ὄχι ὀλιγώτερον ἢ ὁ διαιρέτης, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς. Διότι, ἂν ἀπὸ τῶν παραγόντων τοῦ διαιρετέου ἐξαλείψωμεν πάντας, ὅσους ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ἰσάκις ἕκαστον, οἱ μένοντες παράγοντες τοῦ διαιρετέου θὰ ἀποτελῶσι τὸ πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11^3 \times 17$
εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $2^2 \times 3 \times 5 \times 11^3$.
(διότι ὁ πρῶτος περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ ἕκαστον οὐχὶ ὀλιγώτερον ἢ ὁ δεύτερος).

Τὸ δὲ πηλίκον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων· ἐκ τοῦ 2 δίς, ἐκ τοῦ 3 ἅπαξ καὶ ἐκ τοῦ 17· εἶνε λοιπὸν $2^2 \times 3 \times 17$.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς	$3^5 \times 7^2 \times 11 \times 13^2$
εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ	$7^2 \times 11 \times 13$
καὶ τὸ πηλίκον εἶνε	$3^5 \times 13$.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7^2$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $2^2 \times 3 \times 5^2$· διότι ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 5 ἅπαξ μόνον, ἐνῷ ὁ διαιρέτης ἔχει αὐτὸν δίς.

* Εὕρεσις πάντων τῶν διαιρετῶν δοθέντος ἀριθμοῦ.

125. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 1008· ἀναλύοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$.

Διὰ νὰ εὕρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς 2, 3, καὶ 7· καὶ τὸν μὲν 2 δύναται νὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ, ἢ δίς, ἢ τρίς, ἢ τετράκις· ὥστε ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων·

$$1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4,$$

διότι, ὅταν μηδόλως περιέχῃ τὸν 2, δύναμαι νὰ γράψω εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ τὴν μονάδα ὡς παράγοντα· τὸν δὲ 3 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ ἢ δίς· ὥστε ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων·

$$1, \quad 3, \quad 3^2.$$

τὸν δὲ 7 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ μόνον· ὥστε θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων $\quad 1, \quad 7.$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 θὰ εἶνε γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐξ ὧν

ὁ μὲν πρῶτος εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν	1,	2,	2^2,	2^3,	2^4,
ὁ δὲ δεύτερος εἷς ἐκ τῶν	1,	3,	3^2,		
ὁ δὲ τρίτος εἷς ἐκ τῶν	1,	7.			

Διὰ νὰ εὕρω λοιπὸν ἕνα διαιρέτην τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ λάβω ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῆς τρίτης· ἔπειτα νὰ σχηματίσω τὸ γι-

νόμενον τῶν τριῶν ληφθέντων ἀριθμῶν· τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ εἶνε διαιρέτης τοῦ 1008· διότι ὁ 1008 περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ καὶ ἕκαστον ἐξ ἴσου ἢ καὶ περισσότερον. Καὶ διὰ νὰ εὕρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τῶν προκυπτόντων γινομένων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς· τὰ τελευταῖα ταῦτα γινόμενα θὰ εἶνε πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Πολλαπλασιάζων ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, εὑρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1,	2,	2^2	2^3	2^4
3,	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$	$2^4\times3$
3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	$2^4\times3^2$

Πολλαπλασιάζων δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τριτης σειρᾶς, εὑρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$	$2^4\times3$
3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	$2^4\times3^2$
7	2×7	$2^2\times7$	$2^3\times7$	$2^4\times7$
3×7	$2\times3\times7$	$2^2\times3\times7$	$2^3\times3\times7$	$2^4\times3\times7$
$3^2\times7$	$2\times3^2\times7$	$2^2\times3^2\times7$	$2^3\times3^2\times7$	$2^4\times3^2\times7$

ταῦτα δὲ εἶνε πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμούς, εὑρίσκομεν

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
7	14	28	56	112
21	42	84	168	336
63	126	252	504	1008

126. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζομεν πίνακα συγκείμενον ἐκ τόσων ὁριζοντίων σειρῶν, ὅσοι εἶνε οἱ διάφοροι πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑκάστη δὲ τῶν σειρῶν τούτων περιέχει πρώτην τὴν μονάδα· ἔπειτα ἕνα πρῶτον παράγοντα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὰς

δυνάμεις αὐτοῦ κατὰ σειρὰν μέχρι τῆς ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ περιεχομένης.

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας· ἔπειτα ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τελευταῖα γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς, εἶνε πάντες οἱ διαιρέται τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ 1008 εἶνε $5\times3\times2$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι, πόσους ἀριθμοὺς ἔχει ἑκάστη σειρά. Τοῦτο ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Γ'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς διαιρετότητος (ἐδ. 124) ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα τὰ ἑξῆς θεωρήματα περὶ τῶν πρὸς ἀλλήλους πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ον

127. *Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οὐδένα ἔχουσι πρῶτον παράγοντα κοινόν·* καὶ ἀντιστρόφως· *οἱ μηδένα ἔχοντες πρῶτον παράγοντα κοινὸν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ $2\times3\times5^2$, $2^2\times7$, $11^3\times7$ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι οὐδένα δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ον

128. *Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι κἀνένα πρῶτον παράγοντα κοινόν, οὐδὲ αἱ δυνάμεις αὐτῶν θὰ ἔχωσι τοιοῦτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ον

129. *Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται δι' ἄλλων ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν $2^3\times7$, $3\times5^2\times11$, 13×17^2, οἵτινες ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἔχουσιν ὅλως διαφόρους παράγοντας (ὁ αὐτὸς δηλαδὴ

πρῶτος παράγων δὲν εὑρίσκεται εἰς δύο ἀριθμούς)· λέγω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ Α πρέπει νὰ περιέχῃ (ἐδ. 124) πάντας τοὺς παράγοντας 2^3, 3^2, 5, 7, 11, 13, 17, τουτέστι πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου τούτου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, (ἢ διὰ πολλῶν ἄλλων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο) δυνατὸν νὰ μὴ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 72 διαιρεῖται διὰ τοῦ 24 καὶ διὰ τοῦ 12, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 288.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εὐκολύνει τὴν εὕρεσιν τῶν γνωρισμάτων τῆς διαιρετότητος, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε σύνθετος· παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ διαιρῆται ἀριθμός τις διὰ τοῦ 6, ἤτοι διὰ 2×3, ἀνάγκη νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ. (Διότι οἱ 2 καὶ 3 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους).

Ἐπίσης διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δ' ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται κατὰ τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

130. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε γινόμενον περιέχον μόνον τοὺς κοινοὺς αὐτῶν πρώτους παράγοντας, ἕκαστον δὲ μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην του.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν : 360, 900, 672.

Ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν

$$360=2^3\times3^2\times5$$
$$900=2^2\times3^2\times5^2$$
$$672=2^5\times3\times7$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν εἶνε ὁ 2 (δίς) καὶ ὁ 3 (ἅπαξ)· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε τὸ γινόμενον $2^2 \times 3$, ἤτοι ὁ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^2 \times 3$ εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶνε πρόδηλον· διότι πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ περιέχονται εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ἢ ἰσάκις ἢ περισσάκις. Ὅτι δὲ εἶνε καὶ ὁ μέγιστος, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Διὰ νὰ εἶνε ἀριθμός τις κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς εἰς πάντας κοινούς· τουτέστι τὸν 2 καὶ τὸν 3· (διότι, ἂν περιέχῃ οἱονδήποτε ἄλλον πρῶτον παράγοντα, δὲν θὰ διαιρῇ πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς· ἂν λόγου χάριν περιέχῃ τὸν 5, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 7, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 360, οὐδὲ τὸν 900· ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῇ κανένα)· καὶ τὸν μὲν 2 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ περισσότερον ἢ δίς, τὸν δὲ 3 μόνον ἅπαξ (διότι, ἂν περιέχῃ τὸν 2 τρίς, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 900, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 3 δίς, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672). Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ κοινὸς διαιρέτης $2^2 \times 3$ περιέχει πάντας τοὺς δυνατοὺς παράγοντας καὶ οὐδεμίαν πλέον αὔξησιν ἐπιδέχεται, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης· ἄρα εἶνε ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι πρώτους παράγοντας κοινούς, λαμβάνεται ὡς κοινὸς παράγων αὐτῶν ἡ μονάς· οἱ ἀριθμοὶ τότε εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ε΄. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ.
ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΥΤΟΥ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁρισμοί.

131. *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾽ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 24 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6· διότι διαιρεῖται δι᾽ ἑκάστου τούτων ἀκριβῶς.

Κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 5, 8, ὑπάρχουσιν ἄπειρα· διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν $3 \times 5 \times 8$ ἢ 120 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον· καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τούτου εἶνε πολλαπλάσιον κοινὸν τῶν 3, 5, 8 (ἰδ. 77).

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα δεικνύει) τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶνε τὸ 12· διότι οὐδεὶς μικρότερος τοῦ 12 ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἔχουσι πάντοτε ἐλάχιστόν τι κοινὸν πολλαπλάσιον· διότι οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον δύναται νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας γίνεται κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

132. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας* (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς)· *καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην του.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

$$720, \quad 240, \quad 462.$$

Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$$

Οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶνε οἱ ἑξῆς· 2, 3, 5, 7, 11. Καὶ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ μὲν 2 εἶνε ὁ 4, τοῦ δὲ 3 εἶνε ὁ 2, τῶν δὲ 5, 7, 11 ἡ μονὰς (ἐδ. 122, Σημ.)· λέγω δέ, ὅτι τὸ γινόμενον

$$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶνε προφανές· διότι περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας ἑκάστου καὶ ὄχι ὀλιγώτερον (ἐδ. 124)· ὅτι δὲ εἶνε καὶ τὸ ἐλάχιστον, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἐξ ἅπαντος θὰ πε-

ριέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (διότι, ἂν λόγου χάριν δὲν περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 462· καὶ ἂν δὲν περιέχῃ τὸν 2, δὲν θὰ διαιρῆται δι' οὐδενός) καὶ θὰ περιέχῃ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ὄχι μικρότερον ἢ οὗτοι (διότι, ἂν λόγου χάριν ἔχῃ τὸν 2 τρὶς μόνον, ἤτοι ἂν ἔχῃ τὸν 2^3, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τῶν 720 καὶ 240, ἂν δὲ ἔχῃ τὸν 3 ἅπαξ μόνον, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 720)· ὥστε ἕκαστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ τοὺς ἑξῆς παράγοντας 2^4, 3^2, 5, 7, 11.

Ἄρα τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον $2^4\times3^2\times5\times7\times11$, ὅπερ ἔχει μόνους τούτους παράγοντας, τοὺς ἀναγκαίως ὑπάρχοντας εἰς πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶνε τὸ ἐλάχιστον.

Πόρισμα 1ον

133. *Κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶνε μόνα τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον Π θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας, ἐξ ὧν γίνεται τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε· ἑπομένως τὸ Π θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ Ε, ἤτοι θὰ εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ Ε· ὅτι δὲ καὶ ἀντιστρόφως πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ Ε εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶνε προφανές.

Πόρισμα 2ον

134. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶνε τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Διότι οὐδεὶς πρῶτος παράγων εἶνε κοινὸς εἰς δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων, ὥστε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

$$3\times5^2\times7,\qquad 2^3\times11^2,\qquad 13\times17^2$$

εἶνε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$3\times5^2\times7\times2^3\times11^2\times13\times17^2,$$

ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶνε μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτῶν.

*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ ἄνευ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας· στηρίζεται δὲ ἡ εὕρεσις αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

135. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντες ἀριθμοί, Δ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι εἶνε

$$Ε \times Δ = Α \times Β.$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν ἀναλύσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς Α καὶ Β εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην Δ καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν Ε κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα (ἐδ. 130 καὶ 132), εἰς μὲν τὸν Ε θὰ περιέχωνται οἱ μὴ κοινοὶ παράγοντες καὶ οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μεγαλήτερον ἐκθέτην αὐτῶν· εἰς δὲ τὸν Δ θὰ περιέχωνται οἱ ἐπίλοιποι παράγοντες, τουτέστιν οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην των· ὥστε ἐκ τῶν παραγόντων τῶν δύο ἀριθμῶν Α, Β τινὲς μὲν ἀπαρτίζουσι τὸν Ε, οἱ δὲ λοιποὶ τὸν Δ· ἐπομένως εἶνε $Δ \times Ε = Α \times Β$.

Πόρισμα

136. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε $Α \times Β$ ἢ καὶ $Δ \times Ε$· ἐὰν δὲ τοῦτο διαιρεθῇ διὰ Δ θὰ δώσῃ πηλίκον τὸ Ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

137. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ οἱ ἑξῆς·

A, B, Γ, Δ

καὶ E τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν A καὶ B· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ, Δ

καὶ οἱ E, Γ, Δ

ἔχουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ, ὡς κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν A καὶ B, θὰ εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ E (ἰδ. 133)· ἄρα θὰ εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν E, Γ, Δ. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν E, Γ, Δ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ E, θὰ εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τῶν A καὶ B (ἰδ. 77)· ἄρα θὰ εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν (ὡς καὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν). Πρὸς τοῦτο, δοθέντων τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον E τῶν A, B· ἔπειτα τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Z τῶν E, Γ· καὶ τέλος τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον H τῶν Z, Δ. Τὸ H θὰ εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ μικρότεροι τοῦ 20 ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.

2) Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἀριθμῶν (ἢ καὶ περισσοτέρων).

Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν (ἰδ. 104).

3) Νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 45 ἢ διὰ διὰ 18 (ἰδ. 129, Παρατήρησις).

4) Τὸ διπλάσιον τετραγώνου δὲν εἶνε τετράγωνον, οὐδὲ τὸ τριπλάσιον· καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐπὶ ἄλλον, ὅστις εἶνε τετράγωνον, δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον (ἰδ. 123).

5) Νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (ἐδ. 104, 105, 106, 107, 108) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

6) Νὰ δειχθῇ ἡ ἑξῆς πρότασις. «Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶνε πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον»· καὶ ἀντιστρόφως «ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς γινόμενον εἶνε πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου» (ἐδ. 127).

7) Ἐκ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν καὶ ἐκ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμούς.

Τὸ δοθὲν κοινὸν πολλαπλάσιον Ε ὀφείλει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου Δ καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλήτερον (ἐδ. 132)· τουτέστιν ὀφείλει νὰ εἶνε Ε διαιρετὸν διὰ Δ. Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἐν γένει πολλὰς λύσεις· ἂν λόγου χάριν δοθῇ $\Delta=2^2\times3$ καὶ $E=2^5\times3^2\times7$, ἑκάτερος τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θὰ περιέχῃ ὡς παράγοντα τὸν Δ (ἤτοι τὸν 12) θὰ περιέχῃ δὲ καὶ τὸν ἕνα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης τῶν ἑξῆς σειρῶν·

$$1,\quad 2^3$$
$$1,\quad 3$$
$$1,\quad 6$$

ὥστε αἱ λύσεις εἶνε αἱ ἑξῆς τέσσαρες·

$A=12=\Delta$	$A=12\times3$	$A=12\times8$	$A=12\times24$
$B=12\times168=E$	$B=12\times56$	$B=12\times21$	$B=12\times7$

8) Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων θὰ εἶνε πάντοτε ἴσον τῷ ἀριθμῷ.

9) Ἐὰν ἀριθμὸς δὲν εἶνε διαιρετὸς δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε πρῶτος (ἐδ. 112).

Ἔστω τοιοῦτος ἀριθμὸς ὁ Α· ἐὰν δὲν εἶνε πρῶτος, θὰ ἀναλύηται εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν· ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι εἶνε $A=\Pi\times\Pi'$, τότε

$$A^2=\Pi^2\times\Pi'^2.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶνε ἀδύνατος· διότι ἑκάτερον τῶν τετραγώνων Π^2, Π'^2 ὑπερβαίνει τὸν Α· ἄρα τὸ δεύτερον μέρος ὑπερβαίνει τὸ $A\times A$, ἤτοι τὸ A^2.

10) Εὑρεῖν δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἔχοντας γινόμενον μὲν 24, ἄθροισμα δὲ 11.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γʹ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρῶται ἔννοιαι.

138. Ἐὰν τὸ πρᾶγμα, ὅπερ παριστᾷ ἡ μονὰς 1, μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν μερῶν τούτων, ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὅλον θεωρούμενον, πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ νέου ἀριθμοῦ. Καὶ ἂν μὲν τὸ πρᾶγμα μοιρασθῇ εἰς δύο ἴσα, ἑκάτερον ἐκ τούτων λέγεται *ἥμισυ* καὶ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $\frac{1}{2}$· ἂν δὲ εἰς τρία ἴσα μοιρασθῇ, ἕκαστον λέγεται *ἓν τρίτον* καὶ γράφεται: $\frac{1}{3}$, ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, ἕκαστον λέγεται *ἓν τέταρτον* $\left(\frac{1}{4}\right)$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὰ δύο ἡμίση ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσι (ὅταν ἑνωθῶσι) τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶνε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Καὶ τὰ τρία τρίτα ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσι τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶνε $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Ὁμοίως εἶνε $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, κτλ.

Ὥστε οἱ νέοι ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,.. εἶνε μέρη τέλεια τῆς μονάδος 1· ἤτοι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῆς, ἂν διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ὁρισμοί.

139. *Κλασματικὴ μονὰς* λέγεται πᾶν μέρος τέλειον τῆς μονάδος 1· τουτέστι πᾶν μέρος αὐτῆς, ὅπερ πολλάκις ληφθὲν δίδει αὐτήν. αὐτὴ δὲ ἡ μονὰς 1 λέγεται *ἀκεραία*.

140. *Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ* λέγονται οἱ ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1

διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γινόμενοι, ὡς $1+1$ ἢ 2, $1+1+1$ ἢ 3, κτλ. ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς 1.

Κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἢ ἁπλῶς *κλάσματα*, λέγονται οἱ γινόμενοι ἐκ μιᾶς κλασματικῆς μονάδος δι' ἐπαναλήψεως· οἷον $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ (δύο τρίτα)· $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ (τρία πέμπτα)· ἔτι δὲ καὶ αὐταὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

Ὥστε *πᾶς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς.*

Γραφὴ τῶν κλασμάτων.

141. Ἕκαστον κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος δεικνύει πόσας μονάδας (κλασματικὰς) ἔχει τὸ κλάσμα· ὁ δὲ δεύτερος δηλοῖ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τούτων, ἤτοι δεικνύει, εἰς πόσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ δεύτερος (ὁ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων δηλῶν) λέγεται *παρονομαστής*· οἱ δύο δὲ ὁμοῦ λέγονται *ὅροι* τοῦ κλάσματος. Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστὴς ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ γραμμῆς· οἷον·

τὸ ἓν πέμπτον γράφεται (ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν): $\frac{1}{5}$

ὁ ἀριθμὸς δύο τρίτα, ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, γράφεται $\frac{2}{3}$

ὁ ἀριθμὸς τρία δεύτερα, ἤτοι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, γράφεται $\frac{3}{2}$

κτλ. κτλ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὸ κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς τακτικόν· οἷον τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$, πέντε ἕβδομα $\left(\frac{5}{7}\right)$ κτλ.

Παρατήρησις.

142. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶνε ἴσοι, ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, ..., τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα· διότι $\frac{2}{2}$ εἶνε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{3}{3}$ εἶνε $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$· ταῦτα δέ, ὡς ἐμάθομεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὴν μονάδα 1.

Όταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος. Διότι π. χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$· χρειάζεται λοιπὸν ἀκόμη δύο πέμπτα, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Όταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Διότι π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{6}$ σύγκειται ἐξ 6 ἕκτων (ἅτινα ἀποτελοῦσιν 1) καὶ ἐξ ἑνὸς ἕκτου· ὥστε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

143. Ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἴσους ὅρους· ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ κτλ.

Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἐὰν αἱ μονάδες αὐτοῦ τραπῶσιν εἰς κλάσματα.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς πέμπτα (ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5), ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα· ἄρα αἱ 8 μονάδες θὰ ἔχωσιν 8 φορὰς 5 πέμπτα, ἤτοι 5×8 πέμπτα· ὥστε εἶνε

$$8=\frac{5\times8}{5}=\frac{40}{5}.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.

Περὶ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ αὐτῶν εἰς κλάσματα.

144. *Μικτὸς ἀριθμὸς* λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· οἷον $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{6}$ κτλ.

Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικόν· διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του τρέπεται εἰς κλάσμα.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{3}{4}$· διὰ νὰ τρέψω αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ τρέψω τὸ ἀκέραιον μέρος 5 εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 4 (διότι καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἔχει παρονομαστὴν 4). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα ὁ ἀκέραιος 5 τρεπόμενος εἰς τέταρτα γίνεται

$$\frac{5\times4}{4} \text{ ἢ } \frac{20}{4}.$$

ὥστε ὁ μικτὸς $5\frac{3}{4}$ γίνεται $\frac{20}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

ἀλλὰ 20 τέταρτα καὶ 3 τέταρτα ἀποτελοῦσιν 23 τέταρτα (καθὼς 20 μῆνες καὶ 3 μῆνες ἀποτελοῦσιν 23 μῆνας, 20 δραχμαὶ καὶ 3 δραχμαὶ ἀποτελοῦσιν 23 δραχμάς, κτλ.)· ὥστε εἶνε

$$5\frac{3}{4}=\frac{23}{4}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

145 Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας (ὅτε ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ), δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτάς.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{12}{5}$, ὅπερ περιέχει ἀκεραίας μονάδας· διότι ὁ ἀριθμητὴς 12 ὑπερβαίνει τὸν παρονομαστὴν 5.

Ἐπειδὴ 5 πέμπτα ἑνούμενα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἂν ἀπὸ τῶν 12 πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἐξ αὐτῶν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ ἀκόμη 12—5, ἤτοι 7 πέμπτα· ἐὰν δὲ καὶ ἐκ τῶν 7 τούτων πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ μένουν ἀκόμη 2 πέμπτα (τὰ ὁποῖα δὲν ἀποτελοῦσιν ἀκεραίαν μονάδα)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{12}{5}$ ἀνελύθη εἰς 2 ἀκέραια καὶ $\frac{2}{5}$ ἤτοι εἶνε

$$\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}, \text{ ἢ } 2\frac{2}{5}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τόσαι ἀκέραιαι μονάδες σχηματίζονται ἐκ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμητής του τὸν παρονομαστήν του· ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δοθέντος κλάσματος εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν τὸν εἰς κλάσμα περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε ὁ ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενος ἀκέραιος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) *εἶνε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος* (ὅπερ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος).

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἰδὲ ἐδ. 143).

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

146. *Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$· λέγω, ὅτι, ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 (ἤτοι ἐπαναληφθῇ πέντε φοράς), θὰ δώσῃ γινόμενον 3.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ καὶ ἐπαναληφθὲν 5 φορὰς δίδει

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

Ἕκαστον μέρος τοῦ $\frac{3}{5}$ λαμβάνεται πεντάκις· ὥστε γίνεται 1 ἀκέραιον· ἄρα τὸ $\frac{3}{5}$ θὰ γίνῃ 3 ἀκέραια.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι εἶνε $\frac{3}{5}\times5=3$.

Πόρισμα.

147. *Πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{5}{6}$ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ τοῦ 6.

Διότι τὸ $\frac{5}{6}$ ἑξάκις ληφθὲν γίνεται 5, ἤτοι

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=5 \cdot$$

ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 5 ἐμοιράσθη εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον ἐκ τούτων εἶνε $\frac{5}{6}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἂν πρόκειται νὰ μοιράσωμεν τὸν 5 εἰς 6 ἴσα μέρη, φανερὸν εἶνε, ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἑκάστην μονάδα αὐτοῦ εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ πέντε πηλίκα· ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστης μονάδος προκύπτει πηλίκον $\frac{1}{6}$, θὰ ἔχωμεν πηλίκον $\frac{5}{6}$.

Παρατήρησις.

148. Ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται νῦν τελεία διὰ τῶν κλασμάτων· καὶ τὸ πηλίκον παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· ὥστε, ἂν μὲν ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶνε κλάσμα μὴ περιέχον ἀκεραίας μονάδας· ἂν δὲ τοὐναντίον ὁ διαιρετέος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον ἔχει ἀκεραίας μονάδας· καὶ θὰ εἶνε ἀκέραιον μέν, ἂν ἡ διαίρεσις (ἐκτελουμένη ὡς ἐν τῷ Α' Βιβλίῳ ἐμάθομεν) δὲν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, μικτὸν δέ, ἂν τοὐναντίον.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 10 εἶνε $\frac{8}{10}$.

Τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ 3 εἶνε $\frac{24}{3}$, ἤτοι 8 ἀκέραια·

τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 25 διὰ 8 εἶνε $\frac{25}{8}$, ἤτοι $3\frac{1}{8}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων (ἣν ἐμάθομεν ἐν τῷ Α' Βιβλίῳ) ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, τὸ ἀκριβὲς πηλίκον σύγκειται ἐκ τοῦ διὰ τῆς πράξεως εὑρισκομένου ἀκεραίου πηλίκου καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κλασμάτων.

'Ορισμοί.

149. *Ἴσα* λέγονται δύο κλάσματα, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενα (τουτέστιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαζόμενα) γίνονται ἀκέραιοι ἴσοι.

Ἄνισα δὲ λέγονται, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μεγαλήτερον λέγεται τὸ παράγον τὸν μεγαλήτερον ἀκέραιον, μικρότερον δὲ τὸ παράγον τὸν μικρότερον.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$· ἐὰν λάβωμεν ἑκάτερον τούτων δὶς (ἤτοι ἂν διπλασιάσωμεν αὐτά), γίνονται

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}. \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

ἤτοι γίνονται ἀμφότερα 1.

ἄρα ἑκάτερον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος 1· διότι διπλασιασθὲν ἔδωκε τὴν μονάδα 1· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν αὐτὰ ὡς ἴσα· (ἄλλως θὰ εἶχεν ἡ μονὰς 1 δύο διάφορα ἡμίση).

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ $\frac{1}{2}$· διότι λαμβανόμενα ἑξάκις γίνονται ἀμφότερα ἀκέραια· καὶ τὸ μὲν $\frac{2}{3}$ γίνεται 4, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ γίνεται 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀνάγεται ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὡς $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης αὐτῶν γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

150. *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἴσον· ἐπίσης καὶ ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν· οἷον τὸν 3· τότε ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$· λέγω δέ, ὅτι εἶνε $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$.

Ἀπόδειξις. Ἂν λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$ 15 φορὰς (ἤτοι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 15), θὰ προκύψῃ ὁ ἀκέραιος 6·
ἀλλὰ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἰσάκις ληφθὲν δίδει 6· διότι,

ἂν ληφθῇ πέντε φοράς, δίδει	2
ἂν δέκα φοράς, δίδει	2×2 ἢ 4
ἂν δεκαπέντε φοράς, δίδει	2×3 ἢ 6.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι εἶνε $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$.

Ἔστω ἐπίσης τυχὸν κλάσμα, οὗτινος ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην, οἷον τὸ $\frac{8}{10}$· λέγω, ὅτι, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 2, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{4}{5}$ εἶνε ἴσον τῷ $\frac{8}{10}$.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ $\frac{8}{10}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{4}{5}$, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τούτου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2· ἄρα $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

151. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· καὶ ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται, ἤτοι μοιράζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.*

Λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ τὸ κλάσμα διπλασιάζεται· ἂν τριπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ τὸ κλάσμα τριπλασιάζεται· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{8}$· ἂν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του γίνεται $\frac{6}{8}$, φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι τὰ 6 ὄγδοα εἶνε διπλάσια τῶν 3 ὀγδόων· ὁμοίως τὸ $\frac{9}{8}$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$· διότι ἐτριπλασιάσθη ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του (ἀπὸ 3 ἔγινεν 9).

Ἔστω καὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$· ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του διὰ 3, γίνεται $\frac{2}{7}$· εἶνε δὲ τὸ $\frac{2}{7}$ τὸ τρίτον τοῦ $\frac{6}{7}$· διότι τὸ $\frac{6}{7}$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{7}$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξάνῃ, καὶ τὸ κλάσμα αὐξάνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

152. *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ ἂν ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται.*

Λέγω δηλαδή, ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς διπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2, ἤτοι γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ πρίν· ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τριπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 3, ἤτοι γίνεται τὸ τρίτον τοῦ πρίν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 5 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, οἷον τὸν 8· τότε προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{5\times8}$ ἢ $\frac{2}{40}$· λέγω, ὅτι τὸ $\frac{2}{5\times8}$ εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$· ἤτοι, ἂν ληφθῇ 8 φοράς, θὰ δώσῃ τὸ $\frac{2}{5}$.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{5\times8}$ λαμβανόμενον 8 φοράς, ἤτοι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 8, γίνεται (ἐδ. 151) $\frac{2\times8}{5\times8}$· τοῦτο δὲ (κατὰ τὸ Α' Θεώρημα) εἶνε ἴσον τῷ $\frac{2}{5}$· ἄρα τὸ $\frac{2}{5\times8}$ εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται διὰ 4· λέγω, ὅτι, ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 8 διὰ τοῦ 4, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{3}{2}$ θὰ εἶνε τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος $\frac{3}{8}$, ἤτοι $\frac{3}{8}\times4=\frac{3}{2}$.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 4 πολλαπλασιαζόμενον δίδει (ἐδαφ. 151) $\frac{3\times4}{8}$ ἤτοι $\frac{3\times4}{2\times4}$ ἤτοι $\frac{3}{2}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξάνῃ, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται· διότι αἱ μονάδες του γίνονται μικρότεραι.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

Ἁπλοποίησις τοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Ἡ ἁπλοποίησις γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην· διότι διαιροῦντες δι' αὐτοῦ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους καὶ ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Παραδείγματος χάριν τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἁπλοποιεῖται, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος 5· γίνεται δὲ $\frac{3}{4}$.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως ἀποκτῶμεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν κλασμάτων· διότι π. χ. σαφεστέραν ἰδέαν ἔχομεν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἢ τοῦ ἴσου του $\frac{45}{60}$ ἢ τοῦ $\frac{39}{52}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ὡς $\frac{6}{3}$, $\frac{10}{2}$, κτλ.) ἁπλοποιοῦντες τὸ κλάσμα λαμβάνομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα $\left(\frac{2}{1}, \frac{5}{1} \text{ κτλ.}\right)$· ἀλλὰ τότε τὸ κλάσμα παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἐδ. 143). Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, προκύπτει κλάσμα, οὗ τινος οἱ ὅροι εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 107)· τὸ τοιοῦτο δὲ κλάσμα λέγεται, ὅτι εἶνε *ἀνηγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους* ἢ ὅτι εἶνε *ἀνάγωγον*· διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους· ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

153. *Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματός τινος εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶνε ἀνάγωγον· τουτέστι δὲν ὑπάρχει ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν κλάσμα ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, οἷον τὸ $\frac{5}{8}$, καὶ ἄλλο οἱονδήποτε κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό, τὸ $\frac{\alpha}{\ }$.

Ἔστω δηλαδὴ $$\frac{5}{8} = \frac{\alpha}{\ }.$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ β καὶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8, τὰ προκύπτοντα κλάσματα θὰ εἶνε ἐπίσης ἴσα, ὡς ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα· ὅθεν ἕπεται

$$\frac{5\times 6}{8\times 6}=\frac{\alpha\times 8}{6\times 8}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, δὲν δύνανται νὰ εἶνε ἴσα, ἂν δὲν ἔχωσιν ἀριθμητὰς ἴσους·

ἄρα εἶνε $5\times 6=\alpha\times 8$·

ἐπειδὴ δὲ ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha\times 8$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον 5×6· καὶ ἐπειδὴ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα 5, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα 6 (ἰδ. 109)· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 6 διὰ 8, θὰ ἔχωμεν

$$6=8\times\pi\cdot$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα $5\times 6=\alpha\times 8$ τὸν 6 διὰ τοῦ γινομένου $8\times\pi$, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα

$$5\times 8\times\pi=8\times\alpha$$

καὶ διαιροῦντες τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν

$$\alpha=5\times\pi.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οἱ ὅροι α, 6 παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$ εἶνε ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{5}{8}$· ἄρα δὲν δύνανται νὰ εἶνε μικρότεροι· ἑπομένως οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{5}{8}$ καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Πόρισμα 1ον

184. *Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶνε ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν θὰ εἶνε ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ὡσαύτως ἴσοι.*

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{6}$ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{5}{8}$, θὰ εἶνε

$$\alpha=5\times\pi \quad \text{καὶ} \quad 6=8\times\pi\cdot$$

διὰ νὰ εἶνε δὲ καὶ τοῦτο ἀνάγωγον, ἀνάγκη ὁ π (ὅστις εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων του α καὶ 6) νὰ εἶνε 1· ἀλλὰ τότε εἶνε $\alpha=5$ καὶ $6=8$.

Πόρισμα 2ον

185. *Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα προκύπτουσιν ἐξ ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4,...*

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

156. *Ὁμώνυμα* λέγονται ὅσα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· τουτέστιν, ὅσα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος· οἷον $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ κτλ.

Ἑτερώνυμα δὲ λέγονται, τὰ ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς· τουτέστιν, ὅσα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, οἷον $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ κτλ.

157. Ἔχοντες ἑτερώνυμα κλάσματα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα (ἓν πρὸς ἓν) καὶ ὁμώνυμα· τοῦτο δὲ λέγεται *τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα ἢ ἀναγωγὴ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν*.

Ἡ τροπὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδ. 150 καὶ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

1ος) Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Διότι τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα εἶνε ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα, ἕκαστον πρὸς τὸ ἐξ οὗ προέκυψεν (ἐδ. 150)· ἔχουσι δὲ καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$.
ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον κανόνα, εὑρίσκομεν

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times8}{5\times8}=\frac{16}{40}$$
$$\frac{3}{8}=\frac{3\times5}{8\times5}=\frac{15}{40}$$

2ος) Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶνε, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Διότι διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐξ ἑκάστου κλάσματος προκύπτει ἄλλο ἴσον· ἔχουσι δὲ τὰ νέα κλάσματα πάντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων παρονομαστῶν.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{8}$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times7\times8}{5\times7\times8}=\frac{224}{280}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times5\times8}{7\times5\times8}=\frac{120}{280}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1\times5\times7}{8\times5\times7}=\frac{35}{280}\cdot$$

3ος) *Ἐὰν ἔχωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ κοινὸν παρονομαστήν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν αὐτὸ δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει τὸν παρονομαστὴν τοῦτον.*

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$.

Ὁ ἀριθμὸς 36 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 2, 3, 9, καὶ 12· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦτον, εὑρίσκομεν

$36:\ 2=18$ $\qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times18}{2\times18}=\frac{18}{36}$

$36:\ 3=12$ $\qquad \frac{2}{3}=\frac{2\times12}{3\times12}=\frac{24}{36}$

$36:\ 9=\ 4$ $\qquad \frac{5}{9}=\frac{5\times4}{9\times4}=\frac{20}{36}$

$36:12=\ 3$ $\qquad \frac{7}{12}=\frac{7\times3}{12\times3}=\frac{21}{36}\cdot$

Συμβαίνει δὲ νὰ ἔχωσι πάντα τὰ νέα κλάσματα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 36· διότι ἕκαστος ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας αὐτὸς εἶνε διαιρέτης, διαιρετέος δὲ ὁ 36 (ἐδ. 57).

Ὅταν εἷς ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν εἶνε διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν, καθιστῶμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{15}$.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 15 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 5 καὶ 15, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν

$$15:5=3 \qquad \frac{3}{5}=\frac{3\times3}{5\times3}=\frac{9}{15}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{15}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}$

τρέπονται εἰς εἰκοστὰ τέταρτα $\frac{4}{24}, \frac{16}{24}, \frac{6}{24}, \frac{5}{24}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον περιλαμβάνονται καὶ οἱ δύο προηγούμενοι. Διότι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν εἶνε προφανῶς κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν· τοῦτο δὲ γίνεται κοινὸς παρονομαστὴς κατὰ τὸν πρῶτον καὶ κατὰ τὸν δεύτερον κανόνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

158. *Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶνε ἀνάγωγα, ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται νὰ ἀποκτήσωσιν, εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{18}$, ἅτινα εἶνε ἀνάγωγα καὶ τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ 5, 8, 12, 18 ἔχουσιν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τὸν 360· λέγω, ὅτι δὲν δύνανται νὰ γίνωσιν ὁμώνυμα μὲ παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ 360.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶν κλάσμα ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{1}{5}$ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν πολλαπλάσιον τι τοῦ 5 (ἐδ. 155)· ὁμοίως πᾶν κλάσμα ἴσον τῷ ἀναγώγῳ $\frac{3}{8}$ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 8, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωσι τὰ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα κλάσματα, θὰ εἶνε ἐξ ἀνάγκης κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν 5, 8, 12, 18· ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, θὰ λάβωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 360.

Παρατήρησις.

Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν, ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν, καὶ 2) εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν εὐκόλως τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα αὐτῶν· διότι ἐκ δύο κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλήτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μεγαλήτερον ἀριθμητήν.

ΠΡΑΞΕΙΣ

Ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Α') ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

159. *Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.*

Αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶνε ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ἄθροισμα ἢ *κεφάλαιον* λέγεται καὶ πάλιν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως· οἱ δὲ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*.

Διὰ νὰ προστεθῶσι δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, πρέπει νὰ εἶνε ὁμώνυμα· ἤτοι νὰ γίνωνται πάντα ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, *ἐὰν δὲν εἶνε ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα.*

Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων ἐκτελεῖται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

160. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητάς των, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$

εἶνε φανερὸν ὅτι 1 ὄγδοον καὶ 3 ὄγδοα καὶ 5 ὄγδοα κάμνουν 1+3+5 ἤτοι 9 ὄγδοα (καθὼς 1 βιβλίον καὶ 3 βιβλία καὶ 5 βιβλία κάμνουν 9 βιβλία)· ὥστε

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8} \qquad (\text{ἰδ. } 145).$$

Παραδείγματα.

1) Νὰ προστεθῶσι τὰ δύο κλάσματα $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{6}$.

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω

$$\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{5}{30}$$

καὶ προσθέτων εὑρίσκω $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$

2) Νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$.

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

ὅθεν προσθέτων εὑρίσκω $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος εἶνε μικτὸς ἀριθμός· οἷον $1+\frac{1}{2}$ γράφεται ὡς ἑξῆς $1\frac{1}{2}$.

Πρόσθεσις μικτῶν.

161. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$$3\frac{5}{8} \qquad 10\frac{2}{9}.$$

Οἱ ἀκέραιοι χωριστὰ προστιθέμενοι δίδουσι 13· τὰ δὲ κλάσματα γίνονται κατὰ πρῶτον ὁμώνυμα

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{72}, \qquad \frac{2}{9}=\frac{16}{72}$$

ἔπειτα προστιθέμενα δίδουσιν ἄθροισμα $\frac{61}{72}$.

ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων μικτῶν εἶνε $13\ \frac{61}{72}$.

διότι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐσχηματίσαμεν ἑνώσαντες τὰς μονάδας των.
Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς

$$2\ \frac{1}{2} \text{ καὶ } 5\ \frac{5}{6}$$

τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶνε 7,

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶνε $\frac{8}{6}=1\ \frac{2}{6}=1\ \frac{1}{3}$.

ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων μικτῶν εἶνε $7+1+\frac{1}{3}=8\ \frac{1}{3}$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν

$$5\ \frac{1}{2} \text{ καὶ } 6\ \frac{2}{3} \text{ καὶ } 15\ \frac{5}{6} \text{ εἶνε } =28.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ

οἷον $5\ \frac{1}{6}+2=7\frac{1}{6}$.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸ κλάσμα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ·

οἷον $5\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=5+1=6, \qquad 3\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=3\ \frac{1}{2}$.

Παρατήρησις.

Ἡ πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἴτε ἀκεραίων εἴτε κλασματικῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Διότι πάντες οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ γίνωσι κλάσματα καὶ μάλιστα ὁμώνυμα· τότε δὲ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν καταντᾷ πρόσθεσις τῶν ἀριθμητῶν των. Διὰ τοῦτο ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (ἰδ. 23) μένει ἀληθής, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶνε οἱ προσθετέοι· ἑπομένως μένουσιν ἀληθεῖς καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι ἰδιότητες καὶ ἀποδεικνύονται ἐξ αὐτῆς ἀπαραλλάκτως (ἰδ. 23, 1, 2, 3).

Β') ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

162. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τὰς μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.*

Αἱ μονάδες δυνατὸν νὰ εἶνε ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται καὶ πάλιν *μειωτέος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἀφαιρετέος*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, θὰ ἀποτελέσωμεν προδήλως τὸν μειωτέον· ὅθεν ὁ *μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου.*

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

163. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ὡς ἄθροισμα τὸν πρῶτον.*

Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλου, πρέπει νὰ εἶνε ὁμώνυμον πρὸς αὐτό. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου, *ἐὰν δὲν εἶνε ὁμώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.*

Ἡ ἀφαίρεσις γίνεται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

164. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{7}{12}$· φανερὸν εἶνε, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ 7 δωδέκατα ἀφαιρέσωμεν 5 δωδέκατα, θὰ μείνωσι 2 δωδέκατα (καθώς, ἐὰν ἀπὸ 7 μῆνας ἀφαιρέσωμεν 5 μῆνας, μένουσι 2 μῆνες)·

ἄρα $$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12} \text{ ἢ } =\frac{1}{6}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{1}{6}$ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{5}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα· καὶ ὁ μὲν ἀφαιρετέος $\frac{1}{6}$ γίνεται $\frac{}{30}$, ὁ δὲ μειωτέος $\frac{1}{5}$ γίνεται $\frac{6}{30}$· ὥστε ἡ διαφορὰ εἶνε $\frac{1}{30}$.

ἤτοι $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{30}-\frac{5}{30}=\frac{1}{30}$.

Ἀφαίρεσις μικτῶν.

165. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰς δύο διαφοράς.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7\frac{2}{5}$, ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους χωριστά: 7—2=5· ἔπειτα τὰ κλάσματα: $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$.

ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε $5\frac{1}{15}$.

166. Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε μεγαλήτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν γίνεται. Ἵνα ἄρωμεν τὸ ἐμπόδιον τοῦτο, *λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{1}{5}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$ καὶ τρέψωμεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$. καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{15}$ (τοῦ ἀφαιρετέου) δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπο τοῦ $\frac{2}{15}$ (τοῦ μειωτέου), λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς δέκατα πέμπτα· τότε θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ τοῦ $7+\frac{15}{15}+\frac{2}{15}$, ἤτοι ἀπὸ τοῦ $7\frac{17}{15}$. Ἀφαιροῦντες τότε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $4\frac{14}{15}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $8\frac{1}{3} - 4\frac{1}{5} = 3\frac{8}{15}$

$12\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3} = 3\frac{5}{6}$

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν, καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ ἀκεραίου (ἢ καὶ κλάσμα ἀπὸ ἀκεραίου)· οἷον

$5 - 2\frac{1}{3} = 4 + \frac{3}{3} - 2\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$· $8 - \frac{2}{7} = 7 + \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = 7\frac{5}{7}$·

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον, ἀφαιροῦμεν τοῦτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μικτοῦ· οἷον

$5\frac{1}{3} - 2 = 3\frac{1}{3}$· $8\frac{2}{5} - 8 = \frac{2}{5}$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ·

οἷον $2\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = 2\frac{8}{40} - \frac{5}{40} = 2\frac{3}{40}$.

Ὁμοίως $4\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 3 + \frac{6}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = 3\frac{5}{6}$.

Παρατήρησις.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Διὰ τοῦτο αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 29) ἀληθεύουσι καὶ περὶ πάσης ἀφαιρέσεως.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

167. Μέχρι τοῦδε ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἐσήμαινε *τὴν ἐπανάληψιν ἑνὸς ἀριθμοῦ*, ἡ δὲ διαίρεσις *τὸν μερισμὸν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη*· αὗται δὲ εἶνε αἱ πρῶται, αἱ φυσικαί, τῶν πράξεων τούτων ἔννοιαι.

Ἀλλ' ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὁδηγούμενοι οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τὴν ἰδέαν νὰ γενικεύσωσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμὸς ἄλλην σημασίαν, γενικωτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρίν.

Εἰς τὴν γενίκευσιν ταύτην φθάνομεν ὡς ἑξῆς· ἂν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα. «Πόσον ἀξίζουν 5 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 12 δραχμάς;» φανερὸν εἶνε, ὅτι θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 12 πέντε φοράς· τουτέστι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ κάμωμεν

πολλαπλασιασμὸν 12×5. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἀπὸ 5 γίνῃ $5\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{5}{8}$, πάλιν θέλομεν ἡ πρᾶξις, δι' ἧς λύεται τὸ πρόβλημα, νὰ λέγηται πολλαπλασιασμός, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν· (τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων).

Διὰ νὰ εὕρω, πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ ἡ ὅλη ὀκᾶ ἀξίζει 12 δραχμὰς

τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς θὰ ἀξίζῃ τὸ ὄγδοον τῶν 12 δρ. ἤτοι $\frac{12}{8}$ τῆς δραχμῆς (κατὰ τὸ ἐδ. 148)·

καὶ ἑπομένως τὰ 5 ὄγδοα αὐτῆς θὰ ἀξίζουν $\frac{12}{8} \times 5$ ἢ $\frac{12 \times 5}{8}$ δρ. (κατὰ τὸ ἐδ. 151).

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἔγιναν τώρα δύο πράξεις· πρῶτον μὲν ἐμερίσθη ὁ ἀριθμὸς 12 εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη· ἔπειτα δὲ ἐλήφθη τὸ ἓν μέρος 5 φοράς, ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 5. Αἱ δύο αὗται πράξεις ὁμοῦ πρέπει νὰ ὀνομασθῶσι τώρα πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ (κατὰ τὴν νέαν, τὴν γενικὴν σημασίαν τῆς λέξεως), διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ ἀνωτέρω εἰρημένος κανών, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων εἶνε κλασματικός.

168. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶνε ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.

Ποῖον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος· ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

Ὥστε γενικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε (ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν) πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς.

169. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν*

ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ, καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.

Ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου μέρος, ἢ τὸ ὅλον, θὰ ἐπαναλάβωμεν, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μᾶς δεικνύει, ποῖα καὶ πόσα μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ λάβωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἐξαγόμενον, λέγεται *πολλαπλασιαστής*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται *γινόμενον*.

Σχηματίζομεν δὲ τὸ γινόμενον, ὅταν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί, κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

170. *Δι' ἑκάστην ἀκεραίαν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνομεν ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον, δι' ἑκάστην δὲ κλασματικὴν λαμβάνομεν τὸ ὁμώνυμον μέρος αὐτοῦ*·

οἷον $\alpha \times 4$ σημαίνει $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$· διότι $4=1+1+1+1$·

$\alpha \times \frac{2}{3}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}$· διότι $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

ἔνθα α εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ $\frac{\alpha}{3}$ τὸ τρίτον αὐτοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ μερισμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μία κλασματικὴ μονάς.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶνε $12 \times \frac{1}{4}=\frac{12}{4}=3$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι σύγκειται ἐξ αὐτοῦ ἢ ἔκ τινος μέρος αὐτοῦ. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν νέον τοῦτον πολλαπλασιασμὸν ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζεται, αὐξάνει μέν, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μεγαλήτερος τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μικρότερος αὐτῆς (μένει δὲ ὁ αὐτός, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1).

Καὶ τῷ ὄντι· διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{3}$, πρέπει νὰ λάβω τὸ τρίτον τοῦ 8 (ἤτοι τὸ $\frac{8}{3}$) πέντε φοράς· ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 5 φοράς, θὰ δώσῃ περισσότερον τοῦ 8. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω δὲ τὸν 8 ἐπὶ $\frac{3}{5}$ πρέπει νὰ

λάβω τρεῖς φορὰς τὸ πέμπτον τοῦ 8· ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ 8 πρέπει νὰ ληφθῇ πέντε φορὰς διὰ νὰ δώσῃ τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 3 φορὰς μόνον, θὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τοῦ 8.

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

171. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

Ἀς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 20 ἐπὶ τὰ κλάσμα $\frac{3}{8}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ 20 καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ 20 εἶνε $\frac{20}{8}$ (ἐδ. 148)

καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{20}{8}$ εἶνε $\frac{20\times3}{8}$ (ἐδ. 151)·

ὅθεν $$20\times\frac{3}{8}=\frac{20\times3}{8} \text{ ἢ } \frac{60}{8}, \text{ ἤτοι } 7\frac{4}{8} \text{ ἢ } 7\frac{1}{2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ 20 καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ τριπλασίου τοῦ 20 εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· τοῦτο δὲ ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

172. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.*

Ἀς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἕβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Τὸ ἕβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ εἶνε $\frac{4}{5\times7}$ (ἐδ. 152)

τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ $\frac{4}{5\times7}$ εἶνε $\frac{4\times3}{5\times7}$ (ἐδ. 151)

ἄρα εἶνε $\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4\times3}{5\times7}$ ἤτοι $\frac{12}{35}$.

Παρατήρησις.

Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τούτου γίνεται ἀμέσως φανερόν, ὅτι εἶνε

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}\cdot$$

ὡσαύτως εἶνε $20\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\times20\cdot$

ὥστε καὶ ὁ νέος πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων περιλαμβάνονται καὶ οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον (ἐδ. 151) καὶ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα (ἐδ. 171). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παριστῶνται οἱ ἀκέραιοι ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Καὶ τῷ ὄντι εἶνε $5\times\frac{7}{9}=\frac{5}{1}\times\frac{7}{9}=\frac{5\times7}{1\times9}=\frac{5\times7}{9}$.

$$\frac{8}{15}\times3=\frac{8}{15}\times\frac{3}{1}=\frac{8\times3}{15\times1}=\frac{8\times3}{15}.$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ.

173. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα.*

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ εἶνε ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικός, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1) Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\ \frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4· τὸ γινόμενον θὰ εἶνε

$$\left(7\ \frac{5}{8}\right)+\left(7\ \frac{5}{8}\right)+\left(7\ \frac{5}{8}\right)+\left(7\ \frac{5}{8}\right)$$

ἢ $7+7+7+7+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}$

ἤτοι $7\times4+\frac{5}{8}\times4.$

2) Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\ \frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$.

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ καὶ νὰ λάβωμεν τοῦτο δίς.

Ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ εἶνε $\frac{7}{3}+\frac{5}{8\times3}$· διότι τοῦτο τρεῖς φορὰς λαμβανόμενον, ἤτοι ἐπὶ 3 πολλαπλασιαζόμενον, κατὰ τὰ ἀνωτέρω δίδει τὸν μικτὸν $7+\frac{5}{8}$. Τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{3}+\frac{5}{8\times3}$ εἶνε

$$\frac{7\times2}{3}+\frac{5\times2}{8\times3}$$

τοῦτο δὲ εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέρους 7 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ κλασματικοῦ μέρους $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ $\frac{2}{3}$· ἄρα ἔχομεν

$$\left(7\frac{5}{8}\right)\times\frac{2}{3}=7\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}.$$

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς γενικωτέρα πρότασις.

174. *Ἄθροισμα οἱονδήποτε πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα* (παράβαλ. ἰδ. 45, 2).

Παραδείγματος χάριν εἶνε

$$\left(3+\frac{1}{8}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}\right)\times8=24+1+\frac{16}{7}+\frac{24}{10}=29+\frac{24}{35}.$$

$$\left(5+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{8}=\frac{5\times7}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}.$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.

175. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μικτούς, πολλαπλασιάζομεν*

1) τοὺς δύο ἀκεραίους,

2) τὰ δύο κλάσματα,

3) τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου,

4) τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου·

καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο μικτοὺς

$$\left(4\frac{2}{5}\right)\times\left(8\frac{7}{10}\right)$$

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ γίνῃ κλάσμα, θὰ ἔχωμεν πολλαπλασιασμὸν μικτοῦ ἐπὶ κλασματικόν, καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶνε

$$\left(4\ \frac{2}{5}\right)\times\left(8\ \frac{7}{10}\right)=4\times\left(8\frac{7}{10}\right)+\frac{2}{5}\left(8\frac{7}{10}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τάξις τῶν παραγόντων εἶνε ἀδιάφορος ὡς πρὸς τὸ γινόμενον (ἐδ. 172, Παρ.), θὰ εἶνε

$$\left(4\frac{2}{5}\right)\times\left(8\frac{7}{10}\right)=\left(8\frac{7}{10}\right)\times 4+\left(8\frac{7}{10}\right)\times\frac{2}{5}$$

καὶ ἑπομένως

$$\left(4\ \frac{2}{5}\right)\times\left(8\ \frac{7}{10}\right)=8\times4+\frac{7}{10}\times4+8\times\frac{2}{5}+\frac{7}{10}\times\frac{2}{5}.$$

Τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα εἶνε

$$32,\ \frac{28}{10}\ \text{ἢ}\ 2\ \frac{8}{10},\qquad \frac{16}{5}\ \text{ἢ}\ 3\ \frac{1}{5},\qquad \frac{14}{50}.$$

ἄρα τὸ γινόμενον τῶν μικτῶν εἶνε $37+\frac{8}{10}+\frac{1}{5}+\frac{14}{50}$· ἤτοι

$$37+\frac{40}{50}+\frac{10}{50}+\frac{14}{50},\ \text{ἢ}\ 38\ \frac{15}{50},\ \text{ἢ}\ 38\ \frac{7}{25}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ οἱ μικτοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, δύναταί τις νὰ ἀποφύγῃ τὰς πράξεις τῶν μικτῶν, ἐὰν τρέπῃ αὐτοὺς πρὶν εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐκτελῇ τὰς πράξεις· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε δυσκολώτερον· ὅθεν προτιμότερον εἶνε νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις τῶν μικτῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς γενικωτέρα πρότασις.

176. *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα* (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), *ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα* (παράβαλε ἐδ. 50).

Παραδείγματος χάριν εἶνε

$$\left(\frac{2}{5}+6+\frac{7}{10}\right)\times\left(10+\frac{5}{7}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\times10+6\times10+\frac{7}{10}\times10+\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}+6\times\frac{5}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{5}{7}=$$

$$=4+60+7+\frac{2}{7}+\frac{30}{7}+\frac{1}{2}=76\frac{1}{14}.$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

177. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν τινες ἢ καὶ πάντες εἶνε κλασματικοί, ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἰδ. 44) καὶ σημειοῦται ὁμοίως.

Ἀς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν· $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{7}$.

τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶνε $\frac{2\times3}{3\times10}$

τὸ δὲ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τρίτου εἶνε $\frac{2\times3\times7}{3\times10\times8}$

καὶ τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶνε $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times10\times8\times7}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι

Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Τοῦτο ἀληθεύει, καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἀρκεῖ νὰ γράφωνται ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συμβαίνουσιν ἐνίοτε ἁπλοποιήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμνωμεν.

Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον, ἤτοι εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times10\times7\times8}$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 3, ἔπειτα διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἁπλούστερον κλάσμα

$$\frac{2\times1}{10\times8}.$$

ἐὰν δὲ καὶ τούτου τοὺς ὅρους διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἔτι ἁπλούστερον $\frac{1}{10\times4}$ ἢ $\frac{1}{40}$.

τοῦτο δὲ εἶνε τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ γινόμενον· ἂν λοιπὸν ἀριθμός τις εἶνε καὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστής, παραλείπεται.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν διατηρεῖ πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· διότι ἔχει τὰς δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτοῦ (ἰδ. 45). Ἐκ τούτων τὴν μὲν δευτέραν εὕρομεν ἤδη (ἰδ. 174), ἡ δὲ πρώτη ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

178. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

Ἂν πάντες οἱ παράγοντες εἶνε ἀκέραιοι, τὸ θεώρημα εἶνε ἀποδεδειγμένον (ἰδ. 48), εἰ δὲ μή, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν (οἱ τυχὸν ὑπάρχοντες ἀκέραιοι παράγοντες ὑποτίθενται ἔχοντες παρονομαστὴν τὸ 1)· τὰ δύο δὲ ταῦτα γινόμενα, ὡς γινόμενα ἀκεραίων ἀριθμῶν, δὲν ἀλλάσσουσι, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοί. Ὥστε τὸ γινόμενον θὰ ἔχῃ πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

179. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς, (αἵτινες ἀποδεικνύονται ἀπαράλλακτα ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν).

1) Δυνάμεθα εἰς πᾶν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν· ἢ καὶ τοὐναντίον· *δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον·* δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἕνα μόνον, ἢ καὶ τοὐναντίον νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3}\times 5\times\frac{3}{2}\times 8\times\frac{5}{8}$$

δύναμαι νὰ ἀντικαταστήσω τοὺς δύο παράγοντας $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 1, καὶ τοὺς 8, $\frac{5}{8}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 5· οὕτως εὑρίσκω

$$5\times 5 \text{ ἤτοι } 25.$$

2) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Π. χ. ἵνα πολλαπλασιάσω τὸ γινόμενον $\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}$ ἐπὶ 7 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν παράγοντα $\frac{2}{7}$ ἐπὶ 7· οὕτως εὑρίσκω $\frac{1}{5}\times2\times\frac{4}{9}$

3) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{9} \qquad \frac{8}{9}\times\frac{5}{7}$$

εἶνε

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{5}{7} \text{ ἢ } \frac{3\times8}{2\times9\times9} \text{ ἢ } \frac{4}{3\times9} \text{ ἤτοι } \frac{4}{27}.$$

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

180. *Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν

$$\frac{7}{8}-\frac{4}{9} \qquad \text{ἐπὶ} \qquad \frac{2}{3}.$$

Ἡ διαφορὰ αὕτη, ἐὰν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, γίνεται

$$\frac{7\times9}{8\times9}-\frac{4\times8}{9\times8} \quad \text{ἢ} \quad \frac{7\times9-4\times8}{8\times9}.$$

Τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{2}{3}$ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων· ἵνα δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 ὁ ἀριθμητής, ὅστις εἶνε διαφορὰ δύο ἀκεραίων, ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 51· οὕτως εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον

$$\frac{7\times9\times2-8\times4\times2}{8\times9\times3}$$

τοῦτο δὲ εἶνε ἡ διαφορὰ δύο κλασμάτων, ἡ ἑξῆς.

$$\frac{7\times9\times2}{8\times9\times3}-\frac{8\times4\times2}{8\times9\times3} \text{ ἤτοι τῶν } \frac{7\times2}{8\times3}-\frac{4\times2}{9\times3}.$$

ὅθεν ἔχομεν

$$\left(\frac{7}{8}-\frac{4}{9}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{7\times2}{8\times3}-\frac{4\times2}{9\times3}=\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}.$$

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων (ἰδ. 52) καὶ σημειοῦνται ὁμοίως.

181. *Ἵνα ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$, ἤτοι τὸ γινόμενον $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times3}{5\times5}=\frac{3}{5^2}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ σημειοῦται ὡς ἑξῆς $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, ἕπεται

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}.$$

Παρατήρησις.

Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως (ἰδ. 53).

Παραδείγματος χάριν εἶνε

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)^4=\left(\frac{3}{8}\right)^6.$$

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

182. *Ἴσοι ἀριθμοὶ ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι γινόμενα ἴσα.*

Ἔστω $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε καὶ $\alpha\times\gamma=\beta\times\delta$.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ἴσοι ἀριθμοὶ α καὶ β ἑπταπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 4 (ἴδε ἰδ. 149), οἱ δὲ ἴσοι γ καὶ δ δεκαπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 12. Ἐὰν τότε πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα $\alpha\times\gamma$ καὶ $\beta\times\delta$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 7×10, εὑρίσκομεν (κατὰ τὰς γενικὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰδιότητας), ὅτι ἀμφότερα γίνονται 4×12, τουτέστιν ἀκέραιοι ἴσοι· ἄρα τὰ γινόμενα ταῦτα εἶνε ἴσα.

Ὁμοίως δεικνύεται, καὶ ὅτι *ἄνισοι ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι μένουσιν ἄνισοι.*

Γενίκευσις τῆς διαιρέσεως.

Τὴν διαίρεσιν ὁρίζομεν γενικῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

183. *Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.*

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον*. Ἐκ δὲ τῶν δοθέντων ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς διαιρέσεως *ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Παραδείγματα.

Ἡ διαίρεσις 12 : 3 σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3 νὰ δίδῃ γινόμενον 12· φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται, ἂν μερισθῇ ὁ 12 εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἡ δὲ διαίρεσις $5 : \frac{1}{3}$ σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{1}{3}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 5· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ὁ 15· διότι $15 \times \frac{1}{3} = 5$.

Κανὼν γενικὸς τῆς διαιρέσεως.

184. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{5}$· τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{3}{5}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν $\frac{4}{9}$.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{3}{5}$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον αὐτοῦ τρεῖς φοράς· ἤτοι τὰ τρία πέμπτα αὐτοῦ·
ἄρα τὰ τρία πέμπτα τοῦ ζητουμένου πηλίκου θὰ εἶνε $\frac{4}{9}$·
ἑπομένως τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{4}{9 \times 3}$ (ἤτοι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{4}{9}$).
καὶ τὰ πέντε πέμπτα τοῦ πηλίκου, ἤτοι ὅλον τὸ πηλίκον, θὰ εἶνε πενταπλάσιον τοῦ $\frac{4}{9 \times 3}$, ἤτοι $\frac{4 \times 5}{9 \times 3}$.

τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{4\times5}{9\times3}$ ἢ $\frac{4}{9}\times\frac{5}{3}$.

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τοῦτο εἶνε τὸ πηλίκον, ἐξελέγχεται εὐκόλως· διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{5}$ εἶνε

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{5} \text{ ἤτοι } \frac{4}{9}\cdot \quad \text{τουτέστιν ὁ διαιρετέος.}$$

Παραδείγματα.

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$12:\frac{2}{3}=12\times\frac{3}{2}=18$$

$$3\frac{1}{4}:\frac{5}{6}=\left(3+\frac{1}{4}\right)\times\frac{6}{5}=3\times\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{18}{5}+\frac{3}{10}=\frac{39}{10}=3\frac{9}{10}.$$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι διὰ τῆς γενικεύσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω ἀποδειχθεὶς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δι' ἀκεραίου· ἀρκεῖ ὁ ἀκέραιος διαιρέτης νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Παραδείγματος χάριν $\frac{3}{5}:8=\frac{3}{5}:\frac{8}{1}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{5\times8}$.

Παρατήρησις

188. [illegible] ἄλλως [illegible]

Παραδείγματος χάριν [illegible] $=\frac{16}{5}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

186. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{2}{5} : \frac{3}{8}$ δὲν βλάπτεται, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι, διαιρετέος καὶ διαιρέτης, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5×8· τότε ὁ διαιρετέος γίνεται 2×8, ὁ δὲ διαιρέτης 3×5· ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶνε $\frac{2\times8}{3\times5}$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχω νὰ διαιρέσω $3 : 2\frac{1}{2}$, πολλαπλασιάζω διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 2 καὶ γίνονται $6 : 5$· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε $\frac{6}{5}$ ἢ $1\frac{1}{5}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

187. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἂν λόγου χάριν ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον $8\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$ διὰ τοῦ 4, διαιρῶ τὸν παράγοντα 8 καὶ εὑρίσκω τὸ πηλίκον $2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$.

Πόρισμα

188. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{3}{5}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{20}$ διὰ $\frac{8}{9}$ εἶνε $\frac{3}{5}\times\frac{1}{20}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

189. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου* (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς).

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

190. *Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν,

δύνανται τὰ θεωρήματα ταῦτα νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ διὰ τῶν θεωρημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

191. Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ μειωτέος αὐτῆς καὶ ὁ ἀφαιρετέος χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Περὶ κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

192. Διὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν κλασμάτων, τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· οἷον τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ τοῦ 8 παρίσταται ὡς ἑξῆς : $\frac{12}{8}$.

Ἐάν, χάριν τῆς γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὴν παράστασιν ταύτην τοῦ πηλίκου δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, φθάνομεν εἰς παραστάσεις τοιαύτας:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \qquad \frac{4}{\frac{2}{5}} \qquad \frac{\frac{5}{6}}{8} \qquad \frac{2\frac{1}{2}}{3}$$

ἀντὶ $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$, $\quad 4:\frac{2}{5}$, $\quad \frac{5}{6}:8 \quad 2\frac{1}{2}:3$.

Αἱ παραστάσεις αὗται λέγονται *κλάσματα σύνθετα*· ἐκλήθησαν δὲ κλάσματα, διότι ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων, ὡς ἀμέσως θὰ δειχθῇ.

Πρέπει ὅμως νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ταῦτα οὐδὲν ἄλλο σημαίνουσιν ἢ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

193. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{\beta}$, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, λέγεται κλάσμα· σημαίνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β.

194. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ἀμέσως, ὅτι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}\times\beta=\alpha$· τοῦτο δὲ εἶνε ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων (ἐδ. 146).

195. Ἐκ τοῦ Α' θεωρήματος (ἐδ. 186) τῆς διαιρέσεως συνάγεται ἀμέσως $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\gamma}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ γ,

ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐν τῷ ἐδ. 150 ἀποδειχθεῖσα γενικὴ ἰδιότης τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ἀληθεύει περὶ πάντων

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ὡς καὶ τὰ ἁπλᾶ (κατὰ τοὺς κανόνας 1ον καὶ 2ον).

Ἂν δηλαδὴ ἔχωμεν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}, \qquad \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma\times\beta}{\delta\times\beta}.$$

196. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων τούτων γίνεται ὡς καὶ τῶν ἁπλῶν, ἀφ' οὗ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Δηλαδὴ εἶνε $\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\delta}$ (κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ ἐδ. 190).

$$\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha-\beta}{\delta} \text{ (κατὰ τὸ ἐδ. 191).}$$

197. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῶν ἁπλῶν κλασμάτων.

Διότι ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\alpha:\beta$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τι π (ἀκέραιον ἢ κλασματικόν)· ἐπίσης, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\gamma:\delta$, θὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον ἀριθμόν τινα ρ. Διὰ ταῦτα θὰ εἶνε

$$\alpha=\beta\times\pi, \qquad \gamma=\delta\times\rho,$$

ἄρα (ἐδ. 182) $\alpha\times\gamma=\beta\times\pi\times\delta\times\rho=(\beta\times\delta)\times(\pi\times\rho)$,

καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}=\pi\times\rho=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\times\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$.

Ἀφ' οὗ ἀπεδείχθη ὁ κανὼν διὰ δύο κλάσματα, ἀποδεικνύεται δι' ὁσαδήποτε (κατὰ τὸν συνήθη τρόπον).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποθέτοντες $\delta=1$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta} \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 151).}$$

198. Καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε κλασμάτων ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν ἁπλῶν κλασμάτων (ἐδ. 184)· λέγω δηλαδή, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}$, διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$ δίδει $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\delta}$, ἤτοι $\frac{\alpha\times\delta\times\gamma}{\beta\times\gamma\times\delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \gamma}$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\delta = 1$, προκύπτει

$$\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha}{\beta \times \gamma} \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 152).}$$

Θεώρημα περὶ τῶν ἴσων κλασμάτων.

199. *Ἐὰν ἴσων κλασμάτων προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι, προκύπτει κλάσμα ἴσον.*

Ἔστωσαν ἴσα τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\mathrm{A}}, \frac{\beta}{\mathrm{B}}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}$. Ἐὰν διαιρέσω τὸ α διὰ τοῦ Α, θὰ εὕρω πηλίκον ἀριθμόν τινα ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ὅντινα παριστῶ διὰ τοῦ ρ· τὸ αὐτὸ δὲ πηλίκον θὰ εὕρωμεν ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεων β διὰ Β, γ διὰ Γ, δ διὰ Δ· καὶ θὰ εἶνε

$$\alpha = \mathrm{A} \times \rho, \quad \beta = \mathrm{B} \times \rho, \quad \gamma = \Gamma \times \rho, \quad \delta = \Delta \times \rho$$

ὅθεν καὶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \mathrm{A} \times \rho + \mathrm{B} \times \rho + \Gamma \times \rho + \Delta \times \rho.$

ἢ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta) \times \rho,$ (ἐδ. 174)

ἄρα $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta} = \rho$ ἤτοι $= \frac{\alpha}{\mathrm{A}}.$

Προβλήματα λυόμενα δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

1) Νὰ ἐπαναλάβωμεν ἀριθμὸν πολλάκις.

2) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων ἐξ ἑνὸς πράγματος, ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.

Οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, ὅταν εἷς πῆχυς ἀξίζῃ $12\frac{1}{2}$ δραχμάς. Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, *ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν μονάδων.*

Ὥστε ἡ ἀξία τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως εἶνε $\left(12\frac{1}{2}\right) \times \frac{7}{8}$ ἤτοι $10\frac{15}{16}$ δρ.

3) Νὰ εὑρεθῇ μέρος τι ὡρισμένον δοθέντος ἀριθμοῦ.

οἷον νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 40 εἶνε $\frac{40}{3} + \frac{40}{3}$ ἤτοι $\frac{40 \times 2}{3}$ ἢ $40 \times \frac{2}{3}$.

ἤτοι τὰ δύο τρίτα τοῦ 40 εἶνε τὸ γινόμενόν του ἐπὶ $\frac{2}{3}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ζητῆται μέρος τι τέλειον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, οἷον τὸ $\frac{1}{5}$, ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται τοῦτο, εἶνε κυρίως διαίρεσις.

4) *Νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα συγκεκριμένον εἰς ἄλλον κατωτέρας τάξεως καὶ ὁμοειδῆ.*

Οἷον νὰ τρέψωμεν $8\frac{2}{5}$ ὀκάδας εἰς δράμια.

Αἱ 8 ὀκάδες ἔχουσι δρ. 400×8 καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἔχουσι δράμια $400\times\frac{2}{5}$ (διότι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἔχει δράμ. $400\times\frac{1}{5}$). ἄρα αἱ $8\frac{2}{5}$ ὀκάδες ἔχουσι δράμ. $400\times 8+400\times\frac{2}{5}$, ἤτοι $400\times\left(8\frac{2}{5}\right)$ ἢ 3360 δράμια.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν συγκεκριμένον εἰς ἄλλον ὁμοειδῆ καὶ κατωτέρας τάξεως, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσας μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως ἔχει μία μονὰς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) *Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν·* οἷον νὰ τραπῇ ὁ $8\frac{2}{5}$ εἰς τετρακοσιοστά, ἢ ὁ $\frac{5}{7}$ εἰς δωδέκατα.

Πρόδηλον εἶνε, ὅτι

$$8\frac{2}{5}=\frac{8\frac{2}{5}\times 400}{400}=\frac{8\times 400+\frac{2}{5}\times 400}{400}=\frac{3360}{400}$$

ὥστε ὁ $8\frac{2}{5}$ εἶνε ἴσος μὲ 3360 τετρακοσιοστά.

Ὡσαύτως εἶνε $\frac{5}{7}=\frac{\frac{5}{7}\times 12}{12}=\frac{\frac{60}{7}}{12}=\frac{8\frac{4}{7}}{12}$.

Ὥστε $\frac{5}{7}$ εἶνε ἴσον μὲ 8 δωδέκατα καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου, ἢ κατὰ προσέγγισιν ἴσον μὲ 8 δωδέκατα.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστὴν (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ γινομένου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Σκοπὸς τῆς τοιαύτης τροπῆς εἶνε νὰ ἀποκτήσωμεν σαφεστέραν ἰδέαν τινῶν κλασμάτων ἐκφράζοντες αὐτὰ δι' ἄλλων γνω-

στοτέρων· π. χ. ἀντὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ ἔτους σαφέστερον καὶ εὐκολώτερον εἰς τὴν ἀντίληψιν ἡμῶν εἶνε 8 μῆνες $\left(=\frac{8}{12}\right)$. καὶ ἀντὶ 8 $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς σαφέστερον εἶνε 8 ὀκάδες καὶ 160 δράμια.

Προβλήματα λυόμενα διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

1) Νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.

2) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος πράγματός τινος, ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων του·

οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς, ὅταν $15\frac{1}{2}$ ὀκ. ἀξίζουν $72\frac{2}{5}$ δραχ.

Ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $15\frac{1}{2}$ πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν $72\frac{2}{5}$· ἑπομένως εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ $72\frac{2}{5}$ διὰ $15\frac{1}{2}$· πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους ἐπὶ 10 εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{724}{155}$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἐκ δοθέντος μέρους αὐτοῦ·

οἷον νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ εἶνε 60·

τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{60}{3}$ καὶ τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶνε $\frac{60}{3}\times 5$, ἤτοι $60 : \frac{3}{5}$.

4) *Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς συγκεκριμένος εἰς ἄλλον ἀνωτέρας τάξεως·*

οἷον νὰ τραπῶσιν $615\frac{1}{2}$ μῆνες εἰς ἔτη·

ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν 12 (διότι 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας), θὰ δώσῃ τοὺς $615\frac{1}{2}$ μῆνας· ὥστε εἶνε τὸ πηλίκον $615\frac{1}{2} : 12$, ἢ 51 ἔτη καὶ $\frac{3}{12}$ καὶ $\frac{1}{24}$ τοῦ ἔτους, ἤτοι 51 ἔτη $\frac{7}{24}$ τοῦ ἔτους.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, νὰ εὑρεθῇ, πῶς ἀποτελεῖται ὁ πρῶτος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ·

οἷον νὰ εὑρεθῇ, πῶς ἀποτελεῖται ὁ 35 ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ·

ἤγουν ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ πόσα μέρη αὐτοῦ, ἵνα ἀποτελέσωμεν τὸν 35.

Διαιροῦντες τὸν 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$ εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε $35 = \frac{2}{5} \times \left(87\frac{1}{2}\right)$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ $\frac{2}{5}$, ἂν ληφθῇ 87 φοράς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, ἅπαξ ληφθέν, ἀποτελοῦσι τὸν 35· ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *λόγος* τοῦ 35 πρὸς τὸ $\frac{2}{5}$ (παράβλ. ἐδ. 74).

Προβλήματα διάφορα.

1) 18 $\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουσιν 70 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 10 πήχεις καὶ $\frac{2}{5}$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{70}{18\frac{1}{2}}$ ἢ $\frac{140}{37}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἑπομένως οἱ $10\frac{2}{5}$ ἀξίζουν $\frac{140}{37} \times \left(10\frac{2}{5}\right)$, ἤτοι $\frac{140 \times 52}{5 \times 37}$ ἢ $\frac{28 \times 52}{37}$

2) Μὲ $12\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζει τις 8 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσας ὀκάδας ἀγοράζει μὲ $40\frac{1}{5}$ δραχμάς;

Λύσις. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{8}{12\frac{1}{2}}$ τῆς ὀκ..ς καὶ μὲ $40\frac{1}{5}$ ἀγοράζει $8 \times \frac{40\frac{1}{5}}{12\frac{1}{2}}$ ἢ $8 \times \frac{402}{125}$.

3) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 8 γίνεται 14;

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 6 καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς εἶνε 18.

4) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ υἱός του τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς καὶ ὅ,τι περισσεύσῃ νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του. Ἡ σύζυγός του ἔλαβεν 9000 δραχμάς· πόσας ἔλαβον τὰ τέκνα καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία;

Λύσις. Τὰ δύο τέκνα ἔλαβον ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας, ἤτοι τὰ $\frac{31}{40}$ αὐτῆς· ἄρα ἡ σύζυγος ἔλαβε τὰ λείποντα $\frac{9}{40}$· ταῦτα δὲ ἦσαν 9000· ἄρα ἡ περιουσία ἦτο $\frac{9000\times40}{9}$ ἤτοι 40000 δραχμαί· καὶ ὁ μὲν υἱὸς ἔλαβε 15000, ἡ δὲ θυγάτηρ 16,000.

5) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ μιᾶς κρήνης εἰς 12 ὥρας καὶ ὑπὸ ἄλλης χωριστὰ εἰς 15 ὥρας· ἐὰν ῥέωσι καὶ αἱ δύο συγχρόνως, εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν πληροῖ ἡ πρώτη κρήνη τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δὲ δευτέρα τὸ $\frac{1}{15}$. Ἄρα ὁμοῦ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ τῆς δεξαμενῆς· ἤτοι τὰ $\frac{9}{60}$ ἢ $\frac{3}{20}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{3}{20}$ χρειάζονται μίαν ὥραν, ἵνα πληρωθῶσι, τὸ $\frac{1}{20}$ χρειάζεται $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας, καὶ τὰ $\frac{20}{20}$, ἤτοι ὅλη ἡ δεξαμενή, χρειάζεται $\frac{20}{3}$ τῆς ὥρας, ἤτοι 6 ὥρας καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας, ἢ 6 ὥρας καὶ 40 λεπτὰ πρῶτα.

6) Ἐργάτης τις ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 8 ἡμέρας· ἄλλος ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ εἰς 5 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἐπίλοιπον ἔργον;

Λύσις. Ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἰς 8 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}$ αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος, ἐπειδὴ ἐκτελεῖ εἰς 5 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{15}$ αὐτοῦ.

Ἂν λοιπὸν ἐργάζωνται ὁμοῦ, θὰ ἐξετέλουν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}+\frac{2}{15}$ ἤτοι τὰ $\frac{75}{360}$ τοῦ ἔργου, καὶ ἑπομένως τὸ ὅλον ἔργον εἰς $\frac{360}{75}$ τῆς ἡμέρας, ὡς [illegible].

Ἀλλ' ἐπειδὴ [illegible] τὸ $1-\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, ἤτοι τὰ $\frac{[illegible]}{45}$ αὐτοῦ, [illegible] τοῦ ἔργου [illegible] οἱ δύο ἐργάται χρειάζονται [illegible].

$$\frac{360}{43}\times\frac{8}{45} \text{ ἢ } \frac{64}{43} \text{ ἢ } 1\ \frac{21}{43}.$$

7) Πεζὸς διανύων 17 στάδια εἰς 2 ὥρας, διώκεται ὑπὸ ἱππέως, ὅστις ἐχώρησε 10 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύει 28 στάδια εἰς 3 ὥρας· μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς θὰ φθάσῃ τὸν πεζόν;

Λύσις. Τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἐξεκίνησεν ὁ ἱππεύς, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πεζοῦ ἦτο 85 στάδια (διότι τόσα διατρέχει ὁ πεζὸς εἰς 10 ὥρας)· ἐπειδὴ δὲ καθ' ἑκάστην ὥραν ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐλαττοῦται κατὰ $\frac{28}{3}-\frac{17}{2}$ (διότι ὁ μὲν ἱππεὺς διανύει $\frac{28}{3}$ στάδια τὴν ὥραν, ὁ δὲ πεζὸς $\frac{17}{2}$), ἤτοι κατὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ σταδίου, ἕπεται, ὅτι τόσαι ὧραι θὰ περάσουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{5}{6}$ εἰς τὸν 85, ἤτοι $85:\frac{5}{6}$ ἢ $85\times\frac{6}{5}$ ἤτοι 17×6 ἢ 102 ὧραι.

8) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπό τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τρίς, ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Ἐκ πόσου ὕψους ἔπεσε τὸ πρῶτον;

Λύσις. Τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν δευτέραν ἀναπήδησιν, εἶνε $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως· ἄρα τὸ ῥηθὲν ὕψος εἶνε $\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}$· τὸ δὲ ὕψος τοῦτο μετὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν· ἄρα τὸ ὕψος τῆς πρώτης ἀναπηδήσεως εἶνε $\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}$· τέλος τὸ ὕψος τοῦτο εἶνε τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπεσε κατὰ πρῶτον ἡ σφαῖρα· ἄρα τὸ ἀρχικὸν ὕψος εἶνε

$$\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}, \quad \text{ἤτοι} \quad 11\frac{25}{64} \text{ πήχεις.}$$

9) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ αὐξανόμενα κατὰ νὰ δίδωσι τὸν ἀριθμὸν 30. (Ἀπ. 40).

10) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ αὐξανόμενα κατὰ δίδουσι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ. (Ἀπ. 72).

11) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν κρηνῶν· καὶ ἡ μὲν

πρώτη μόνη πληροῖ αὐτὴν εἰς 40 ὥρας, ἡ δὲ δευτέρα μόνη εἰς 30 ὥρας, καὶ ἡ τρίτη εἰς 20· εἰς πόσας ὥρας καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ῥέουσαι θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν; $\left(\text{Ἀπ. } 9\frac{3}{13}\right)$.

12) Ἐκ πίθου περιέχοντος 100 ὀκάδας οἴνου ἀφαιροῦνται 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ κράματος ἀφαιροῦνται πάλιν 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ τρίτην φοράν, πόσος οἶνος θὰ περιέχηται τότε ἐν τῷ κράματι;

Λύσις. Εἰς ἑκάστην ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦνται τὰ $\frac{20}{100}$ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος οἴνου (διότι ἐκ τῶν 100 ὀκάδων τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος ὑγροῦ ἀφαιροῦνται αἱ 20). ὥστε κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἦτο οὗτος 100 ὀκάδες καὶ ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ἄρα ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι ἔμειναν $100\times\frac{4}{5}$· εἰς τὴν δευτέραν ἀφαίρεσιν ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $100\times\frac{4}{5}$· ὥστε ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$· ὁμοίως ἔμειναν μετὰ τὴν τρίτην ἀφαίρεσιν $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$, τουτέστιν ὀκ. $51\frac{1}{5}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους, προκύπτει κλάσμα, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν.

Ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα

[illegible]

καὶ ἐξ αὐτῶν μέγιστον μὲν ἔστω τὸ [illegible], ἐλάχιστον δὲ τὸ [illegible].

Ἐὰν [illegible] τῶν ἄλλων, ὥστε νὰ γίνωσιν ἴσα [illegible] καὶ ἔ[illegible]

[illegible]

[illegible]

2) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, τὸ κλάσμα αὐξάνει μέν, ἐὰν εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, ἐλαττοῦται δέ, ἐὰν εἶνε μεγαλήτερον αὐτῆς.

Τοῦτο εἶνε ἄμεσον ἀκολούθημα τοῦ προηγουμένου.

3) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ (ἅτινα ὑποτίθενται ἀνάγωγα) εἶνε ἴσον τῷ ἀκεραίῳ M, θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}=M-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{M\delta-\gamma}{\delta}. \qquad (\iota)$$

τὸ δεύτερον δὲ τοῦτο κλάσμα ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι εἶνε ἀνάγωγον· ἐξ οὗ συνάγεται τὸ ἀδύνατον τῆς ἰσότητος (ι)· διότι β καὶ δ εἶνε διάφορα (ἰδ. 154).

Καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους παρονομαστὰς δὲν δύναται νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός.

4) Τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἐκτὸς ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου.

5) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν μίαν δραχμὴν εἰς 9 ἀνθρώπους καὶ παραδεχθῶμεν ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον (κατὰ τὴν μέθοδον τῆς σελίδος 52), ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ προσθέτου ἀνθρώπου, ἤτοι $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὸν νέον μερισμὸν τοῦ $\frac{1}{10}$ τούτου κάμωμεν τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ $\frac{1}{100}$ πρὸς νέαν διανομήν. Ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἐφ᾽ ὅσον θέλωμεν, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶνε

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^{\nu}},$$

θὰ περισσεύσῃ δὲ πρὸς διανομὴν $\frac{1}{10^{\nu}}$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdot\cdot\times\frac{1}{10^{\nu}}+\frac{1}{10^{\nu}}\times\frac{1}{9}.$$

Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{6-\gamma}=\frac{\alpha}{6}+\frac{\alpha\gamma}{6^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{6^3}+\cdots+\frac{\alpha\gamma^{\nu-1}}{6^\nu}+\frac{\alpha\gamma^\nu}{6^\nu}\times\frac{1}{6-\gamma},$$

ἐν ᾗ 6 καὶ γ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $6>\gamma$.

(8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ Θεώρημα τοῦ ἐδ. 72 ἀληθεύει, καὶ ὅταν αἱ [illegible] διαιρέσεις δὲν γίνωνται ἀκριβῶς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α διαιρούμενος διὰ τοῦ [illegible] γινομένου τῶν ἀκεραίων $\beta\times\gamma\times\delta$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ· τότε θὰ εἶνε

$$\alpha=(6\times\gamma\times\delta)\times\pi+\upsilon \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon<6\times\gamma\times\delta.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν α δι[illegible] τοῦ πρώτου παράγοντος 6, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε $\gamma\times\delta\times\pi+\frac{\upsilon}{6}$ καὶ [illegible] πομένως τὸ ἀκέραιον μέρος του θὰ εἶνε $\gamma\times\delta\times\pi+\varepsilon$ (ὅπου ε σημαί[illegible] νει τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\upsilon}{6}$ περιεχόμενον μέγιστον ἀκέραιον. ὅστις [illegible] εἶνε μικρότερος τοῦ $\gamma\times\delta$· διότι $\upsilon<6\times\gamma\times\delta$).

Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος, γ, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε $\pi\times\delta+\frac{\varepsilon}{\gamma}$ καὶ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος θὰ εἶνε $\pi\times\delta+\vartheta$ (ὅπου θ σημαίνει τὸν μέγιστον ἀκέραιον τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ περιεχόμενον), ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ δ· διότι [illegible] [illegible]. Τέλος, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον [illegible] τοῦ τελευταίου παράγοντος δ, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ $\pi+\frac{\vartheta}{\delta}$ [illegible] θὰ [illegible] ἀκέραιον μέρος τὸ π [illegible].

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

200. Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ., ὅσαι δηλαδὴ προκύπτουσιν, ὅταν ἡ ἀκεραία μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἴσα μέρη, λέγονται *δεκαδικαὶ μονάδες*.

Αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς·

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \ldots \quad \text{κτλ.}$$

εἶνε δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν δεκαπλασία τῆς ἀκολούθου.

201. *Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ* λέγονται οἱ ἐκ μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος γινόμενοι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον 3 δέκατα $\left(\frac{3}{10}\right)$, 145 ἑκατοστὰ $\left(\frac{145}{100}\right)$ κτλ. εἶνε δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα, καὶ ἐπομένως ὅσα ἐμάθομεν περὶ τῶν κλασμάτων ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶνε ἢ 10, ἢ 100, ἢ 1000 κτλ. (ἤτοι ἡ μονὰς 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν), αἱ πράξεις αὐτῶν γίνονται εὐκολώτερον, ἢ αἱ πράξεις τῶν ἄλλων κλασμάτων, (τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται κοινά). Διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

202. Ἂν φαντασθῶμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μ- τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν ... $\frac{}{1000000}$ κά- καὶ τὰς δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας, ὡς ἑξῆς·

$$\ldots, \quad 1000, \quad 100, \quad 10, \quad 1, \quad \frac{1}{10},$$

ἑκάστη ἐκ τῶν μονάδων τούτων εἶνε δεκαπλα- 19 ἑκατομμυριοστά, ἢ νης. Διὰ τοῦτο πᾶς ἀριθμὸς ἐκ μιᾶς τῶν μον- μυριοστά.

ζόμενος δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν 9 (ἰδὲ ἐδ. 6)· π. χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{123}{1000}$ ἀναλύεται εἰς $\frac{3}{1000}$, $\frac{2}{100}$ καὶ $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ παραδεχθῶμεν καὶ τὴν ἀρχήν, ὅτι *πᾶν ψηφίον γραφόμενον κατόπιν ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως*, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους. Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων (τὰ ὁποῖα δὲν θὰ εἶνε περισσότερα τῶν 9, ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκεραία μονάς), κατόπιν τούτου γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν (τὰ ὁποῖα ὁμοίως δὲν θὰ εἶνε περισσότερα τῶν 9), κατόπιν τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εἶνε ὅμως ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν ἀμέσως κατόπιν αὐτοῦ ὑποδιαστολήν· ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

Παραδείγματα.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 4 δεκάδας 7 μονάδας (ἢ 47 ἀκεραίας μονάδας) καὶ 3 δέκατα, γράφεται κατὰ τὰ προειρημένα ὡς ἑξῆς: 47,3 ἀντὶ $47\frac{3}{10}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 2 μονάδας 5 δέκατα καὶ 8 ἑκατοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς: 2,58 ἀντὶ $2\frac{5}{10}\frac{8}{100}$ ἢ $2\frac{58}{100}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 32 ἀκεραίας μονάδας καὶ 2 ἑκατοστὰ καὶ 5 χιλιοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς: 32,025 ἀντὶ τοῦ $32\frac{2}{100}\frac{5}{1000}$ ἢ $32\frac{25}{1000}$.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δέκατα· [illegible] ἀκεραίων ἀριθμῶν [illegible] 2003 κτλ.

[illegible] ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν [illegible] ἀκεραίων καὶ κατόπιν αὐτοῦ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν.

[illegible] ἔχει 7 δέκατα, γράφεται ὡς ἑξῆς: 0,7 ἀντὶ $\frac{7}{10}$.

[illegible] δέκατα καὶ [illegible] [illegible]

[illegible]

Δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται, ὅσα εἶνε κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς γεγραμμένος ὡς ἀκέραιος.

203. Δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

1) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ·
οἷον 5,82 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 5 ἀκέραια 8 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστά.

2) Ἀπαγγέλλομεν τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἤτοι χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολήν), προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Οἷον 3,12 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 312 ἑκατοστά.

Διότι ὁ ἀριθμὸς 3,12 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς·

$$3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100} \text{ ἢ } \frac{300}{100}+\frac{10}{100}+\frac{2}{100}$$

ἑπομένως ἔχει 312 ἑκατοστά.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 0,605 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 605 χιλιοστά.

$$\text{Διότι } \frac{6}{10}+\frac{5}{1000} \text{ γίνονται } \frac{600}{1000}+\frac{5}{1000} \text{ ἤτοι } \frac{605}{1000}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ δύο οὗτοι τρόποι εἶνε χρήσιμοι, μόνον ὅταν τὰ ψηφία εἶνε ὀλίγα· ὅταν δὲ εἶνε πολλά, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

3) *Ἀναλύομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα θέλωμεν τμήματα καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὰ κατὰ σειράν, ἕκαστον χωριστά, ὡς ἂν ἦτο ἀκέραιος ἀριθμός· προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.*

Οἷον 87,108349 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς·
87 ἀκέραια 108 χιλιοστὰ καὶ 349 ἑκατομμυριοστά.

$$\text{Διότι } \frac{1}{10}+\frac{8}{1000} \text{ κάμνουν 108 χιλιοστὰ καὶ } \frac{3}{10000}+\frac{4}{100000}+\frac{9}{1000000} \text{ κάμνουν 349 ἑκατομμυριοστά.}$$

Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς·
87 ἀκέραια, 10 ἑκατοστά, 83 μυριοστὰ καὶ 49 ἑκατομμυριοστά, ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· 87 ἀκέραια καὶ 108349 ἑκατομμυριοστά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συνήθως χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον χωριστά· οἷον 78,759 ἀπαγγέλλεται 78 ἀκέραια καὶ 759 χιλιοστά.

Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα.

204. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε κλάσματα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς καὶ μὲ παρονομαστήν, ὡς καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα· πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ γράψωμεν δοθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ὡς κοινόν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν τὸν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον ὡς ἀριθμητήν, ὑπ' αὐτὸν δὲ γράφομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ 25,607 δύναμαι νὰ γράψω $\frac{25607}{1000}$.

Διότι ὁ ἀριθμὸς 25,607 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$25+\frac{6}{10}+\frac{7}{1000} \text{ ἢ } \frac{25000}{1000}+\frac{600}{1000}+\frac{7}{1000}$$

καὶ ἑπομένως ἔχει 25607 χιλιοστά.

205. Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δοθῇ κοινὸν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶνε δεκαδικὸς ἀριθμός· ἵνα δὲ γράψωμεν αὐτὸ ὡς δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ ἔπειτα χωρίζομεν πρὸς τὸ τέλος αὐτοῦ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ δοθεὶς παρονομαστής.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{17}{10}$ γράφεται 1,7· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{378}{100}$ γράφεται 3,78.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ (ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν)· οἷον τὸ κλάσμα $\frac{12}{1000}$ γράφεται $\frac{0012}{1000}$ ἤτοι 0,012.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

206. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν βλάπτεται, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.*

Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδ. 202)· ἡ δὲ θέσις αὕτη δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς τῶν μηδενικῶν· ὥστε ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν εἶνε $1,5=1,50=1,500=1,5000$ κτλ.· διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ 5 δέκατα.

Ὁμοίως ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 7 δυνάμεθα νὰ γράφωμεν 7,0 ἢ 7,00 κτλ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 150)· φαίνεται δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ὡς κλάσματα κοινά. Διότι

$$\frac{15}{10}=\frac{150}{100}=\frac{1500}{1000} \text{ κτλ.}$$

Ὁμοίως εἶνε
$$7=\frac{70}{10}=\frac{700}{100} \text{ κτλ.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

207. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρός, μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.*

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ὀπίσω, μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἶνε

$$2,75\times 10=27,5$$
$$65,92\times 100=6592$$
καὶ
$$13,503 : 10=1,3503$$

Ἀπόδειξις. Ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 2,75 μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 27,5· καὶ αἱ μὲν δύο μονάδες γίνονται 2 δεκάδες (ἤτοι δεκαπλασιάζονται), τὰ δὲ 7 δέκατα γίνονται 7 ἀκέραια (ἤτοι δεκαπλασιάζονται· διότι 1 ἀκέραιον=10 δέ-

καταλ. τὰ δὲ 5 ἑκατοστὰ γίνονται 5 δέκατα· ὥστε πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 2,75 ἐδεκαπλασιάσθησαν· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἐδεκαπλασιάσθη.

Ὁμοίως εἰς τὸν ἀριθμὸν 65,92, ὅταν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατονταπλασιάζεται· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἑκατονταπλασιάζεται.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἢ εἰς τὴν ἀρχήν του (ὅπου χρειάζονται)· τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2,5 ἐπὶ 1000, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα, διότι εἶνε ἐμπρὸς ἓν μόνον ψηφίον (τὸ 5). Ἐὰν ὅμως γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 2,5 ὡς ἑξῆς 2,500, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 2500.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 0,32: 100, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς: 000,32 (ὅπερ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν)· ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0,0032.

Πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

208. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων (γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐξ αὐτῶν ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά).*

Ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα.

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοί

2,32 [illegible] 0,3

[illegible]

	42,9510
	6,0032
	0,3000
ἄθροισμα	49,2542

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου δεικνύεται ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἐδ. 20)· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τούτου, ὅτι δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως προηγουμένης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων ἀριθμῶν εἶνε περιττή· διότι ταῦτα εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. Ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα προσθέτομεν ὡς καὶ πρίν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται τότε ὡς ἑξῆς φαίνεται·

	5,408
	0,3
	15,08
	0,0001
ἄθροισμα	20,7881

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

209. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι· εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἁπλῶν μονάδων.*

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8,1256 ἀπὸ τοῦ 20,75

	20,7500
	8,1256
ὑπόλοιπον	12,6244

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 16,36 ἀπὸ τοῦ 27

	27,00
	16,36
ὑπόλοιπον	10,64

3) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 7 ἀπὸ 8,598

$$\begin{array}{r} 8,598 \\ 7 \\ \hline 1,598 \end{array}$$

ὑπόλοιπον 1,598

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ μὴ γράφωμεν τὰ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ νὰ νοῶμεν μόνον αὐτά.

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

210. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὡς ἂν μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί· ἔπειτα χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8,5 καὶ 15,35.

$$\begin{array}{r} 15,35 \\ 8.5 \\ \hline 7675 \\ 12280 \\ \hline 130,475 \end{array}$$

λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶνε 130,475.

Διὰ νὰ πεισθῶμεν περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὡς κοινὰ κλάσματα· τότε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν

$$\frac{1535}{100} \times \frac{85}{10}\cdot \quad \text{ἄρα τὸ γινόμενον εἶνε } \frac{1535 \times 85}{1000}\cdot$$

πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν αὐτοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀκεραίους 1535 καὶ 85 (τοῦτο δὲ ἐγένετο· διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποδιαστολὰς) καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ 1000· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ· ὅσα δηλαδὴ δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὅσα δηλαδὴ

μέλλομεν νὰ χωρίσωμεν, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται·

οἷον

$$\begin{array}{r} 0{,}28 \\ 0{,}03 \\ \hline 0{,}0084 \end{array}$$

Παρατήρησις.

Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς, καὶ ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

211. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 32,568 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, στηριζόμεθα εἰς τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, καθ' ἣν, ἔχοντες νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ πηλίκα (ἰδ. 190).

Διαιροῦμεν λοιπὸν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 32 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 8:

$$\begin{array}{r|l} 32{,}568 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{24} & 2{,}714 \\ 85 & \\ \underline{84} & \\ 16 & \\ \underline{12} & \\ 48 & \\ \underline{48} & \\ 0 & \end{array}$$

Τὸ ἀκέραιον ὑπόλοιπον 8, ὅπερ πλέον δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 12, τρέπομεν εἰς δέκατα (1 ἀκέραιον=10 δέκατα) καὶ γίνεται 80 δέκατα· ταῦτα δὲ ἑνούμενα μετὰ τῶν 5 δεκάτων τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν 85 δέκατα (τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν 85 δεκάτων σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 5 δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 8). Διαιροῦντες καὶ τὰ 85 δέκατα διὰ τοῦ 12 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον

1 δέκατον· τοῦτο δὲ (ὅπερ εἶνε=10 ἑκατοστά), ἑνούμενον μὲ τὰ 6 ἑκατοστὰ τοῦ διαιρετέου, ἀποτελεῖ 16 ἑκατοστά· διαιροῦντες καὶ ταῦτα διὰ τοῦ 12, εὑρίσκομεν πηλίκον 1 ἑκατοστὸν καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστὰ (=40 χιλιοστά)· ταῦτα δὲ ἑνούμενα τέλος μετὰ τῶν 8 χιλιοστῶν τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 48 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιρούμενα διὰ 12 δίδουσι πηλίκον 4 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ εὑρέθη πηλίκον 2,714.

212. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανών.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι᾽ ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἂν μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολή, ἤτοι ὡς ἂν ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος· καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶνε ἀκέραια, τὰ δὲ λοιπὰ εἶνε δεκαδικά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς [illegible] τάξεως, ὅπερ γίνεται γραφομένου ἑνὸς μηδενικοῦ [illegible] αὐτοῦ. Ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιουτοτρόπως, ἢ θὰ [illegible] πηλίκον ἀκριβῶς [illegible] ὑπόλοιπον 0, ἢ θὰ εὕρωμεν [illegible] προσέγγισιν.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

τελευταίας τάξεως τοῦ πηλίκου. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ εὕρωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς διαφέροντας ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ἂν λόγου χάριν προστάξῃ τις νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν ἑκατομμυριοστῶν, ὅτε εὑρίσκομεν 0,123333.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 3,12 : 7 μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ, διαιροῦμεν, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου καὶ εὑρίσκομεν 0,445. (Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε 0,445 καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ.)

Ὅταν δὲ τὸ κλάσμα, δι' οὗ συμπληροῦται τὸ δεκαδικὸν πηλίκον, ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ (ὅταν δηλονότι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου), ἐὰν κάμωμεν αὐτὸ ἕν, προσεγγίζομεν περισσότερον εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον.

Οὕτω π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε 0,445 καὶ $\frac{5}{7}$ ἑνὸς χιλιοστοῦ· ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ ὑπερβαίνουσι τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, γράφομεν ἀντ' αὐτῶν ἓν χιλιοστὸν καὶ οὕτως εὑρί-[illegible]μεν 0,446, ὅπερ πλησιάζει πρὸς τὴν ἀλήθειαν περισσότερον ἢ τὸ [illegible]· διότι τὸ 0,446 διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου κατὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλι-[illegible] τὸ 0,445 διαφέρει κατὰ $\frac{5}{7}$ χιλιοστοῦ, καὶ τὸ μὲν 0,446 εἶνε [illegible]ρον τοῦ ἀληθοῦς, τὸ δὲ 0,445 μικρότερον.

Παρατήρησις.

Καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου διαιρεῖται κατὰ τὸν προειρημέ-[illegible]ότι ὁ ἀκέραιος διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκα-[illegible]ίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε μηδενικά.

Παραδείγματα

```
35  | 20            2  | 3
150   1,75          20   0,666...
100                 20
0                   20
                    ...
```

Τὸ μὲν πηλίκον τοῦ 35 διὰ 20 ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ καὶ εἶνε 1,75, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 2 διὰ 3 δὲν ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ· κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ εἶνε 0,666 ἢ μᾶλλον 0,667.

2) Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

214. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τὰς δύο ἴσας θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· ἔπειτα διαιροῦμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.*

Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὸ ὀρθὸν τοῦ κανόνος τούτου, ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἴσας θέσεις καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἐπὶ 10, ἐὰν κατὰ μίαν θέσιν μεταθέσωμεν· ἐπὶ 100, ἐὰν κατὰ δύο θέσεις· ἐπὶ 1000, ἐὰν κατὰ τρεῖς, κτλ. Κατὰ δὲ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως (§. 158) τὸ πηλίκον τότε δὲν ἀλλάσσει.

Παραδείγματα.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.

215. Ἐπειδὴ αἱ πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνονται, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων, ἐνῷ τῶν κοινῶν κλασμάτων αἱ πράξεις εἶνε ὀλιγώτερον ἁπλαῖ, διὰ τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀριθμητικῆς προτιμῶνται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί· τρέπονται δὲ καὶ τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικὰ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν· διότι πᾶν κλάσμα εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του (ἰδ. 147). Τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο ἐκφράζεται, ὡς εἴδομεν, διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀκριβῶς ἢ μὲ ὅσην θέλωμεν προσέγγισιν.

Παραδείγματα.

1) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικόν.

```
3    | 8
30   |--------
 60  | 0,375
  40
   0
```

ὅθεν $\frac{3}{8} = 0,375$.

2) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἰς δεκαδικόν.

```
2    | 7
20   |------------
 60  | 0,285714...
  40
   50
    10
     30
      2
```

ὅθεν $\frac{2}{7} = 0,285714$ [illegible]

Ἀλλὰ [illegible] ἀκριβῶς· ἄλλα δὲ [illegible] δὲν [illegible] ἐξῆς [illegible]

[illegible]

216. [illegible] ἀκριβῶς τὸ [illegible] παρ[illegible]

Ἔστω τυχὸν ἀνάγωγον κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι ὑπάρχει δεκαδικόν τι κλάσμα ἴσον αὐτῷ, ἔστω τὸ $\frac{A}{100000}$ ἢ $\frac{A}{10^5}$, ἤτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{10^5}$.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 153 οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{A}{10^5}$ θὰ εἶνε ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ εἶνε ἀνάγωγον)· ἄρα ὁ β θὰ διαιρῇ τὸν 10^5· *ἑπομένως δὲν θὰ περιέχῃ* (ἐδ. 124) *ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τῶν 2 καὶ 5* (τούτους μόνον περιέχει ὁ 10^5).

Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· διότι ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{2^4\times5}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5. Διὰ νὰ τραπῇ τοῦτο εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ 5^3 (διὰ νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι οἱ πρῶτοι παράγοντες 2 καὶ 5 ἴσους ἐκθέτας)· διότι τότε γίνεται

$$\frac{\alpha\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{\alpha\times5^3}{2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5}=\frac{\alpha\times5^3}{10\times10\times10\times10}=\frac{\alpha\times5^3}{10^4}\text{ ἤτοι }\frac{\alpha\times5^3}{10000}$$

ἐτράπη λοιπὸν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς δεκαδικόν· καὶ ἂν γραφῇ ὡς συνήθως, θὰ ἔχῃ 4 δεκαδικὰ ψηφία, ὅσος εἶνε ὁ μεγαλήτερος ἐκθέτης τῶν δύο παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ του 4.

Παραδείγματα.

1. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶνε 2^3. Διὰ νὰ τραπῇ δὲ εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι του ἀμφότεροι ἐπὶ 5^3· τότε γίνεται $\frac{3\times5^3}{1000}$ ἢ 0,375· τὸ αὐτὸ δὲ εὑρίσκομεν καὶ διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 κατὰ τὰ προειρημένα.

2. Τὸ κλάσμα $\frac{8}{15}$ δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστής του εἶνε 3×5· ὥστε ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 3 διάφορον τῶν 2 καὶ 5· ἑπομένως, ἂν διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ 15, κατὰ τὸ ἐδάφιον [illegible], ἡ διαίρεσις οὐδέποτε θὰ λάβῃ πέρας.

Παρατήρησις. 157.

212. Ὅταν τὸ κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, [illegible] ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ [illegible] πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ

μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα· δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν κλάσμα διαφέρον τοῦ δοθέντος κοινοῦ ὀλιγώτερον πάσης δοθείσης δεκαδικῆς μονάδος. Ἂν λ. χ. προστάξῃ τις νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου· διότι τότε εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε $\frac{2}{3}=0,666+\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ· ὥστε τὸ δεκαδικὸν 0,666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ὁμοίως τὸ 0,6666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10000}$

καὶ τὸ 0,66666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{100000}$

καὶ τὸ 0,666666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000000}$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου φθάνομεν εἰς τὴν ἰδέαν, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{2}{3}$ θὰ ἀπετελεῖτο, ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ ἑνώσωμεν 6 μονάδας ἐξ ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως (ἤτοι 6 δέκατα, 6 ἑκατοστά, κτλ.) καὶ δύναται ἑπομένως νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐξ ἀπείρου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὡρισμένων.

Τὸ αὐτὸ δὲ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς κλάσματος μὴ δυναμένου νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διότι τὰ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐπιχειροῦντες νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, εἶνε ἅπαντα ἐντελῶς ὡρισμένα.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι πᾶν κλάσμα ἀποτελεῖται ἐκ δεκαδικῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος εἶνε ἢ πεπερασμένον (ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5), ἢ ἄπειρον (ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, ἀναγώγου ὄντος, περιέχῃ ἄλλον τινὰ πρῶτον παράγοντα)· ἑπομένως τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἢ πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἄπειρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

218. *Ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο, ἀπό τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς, ἀποτελεῖται ἔκ τινων ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$.

```
4       | 7
40      |_________
 50       0,571428
  10
   30
    20
     60
      4
```

τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι πάντα μικρότερα τοῦ 7· οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι 0, διότι τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· ἄρα δὲν δύνανται νὰ ὑπάρξωσιν ἄλλα ὑπόλοιπα ἢ τὰ ἑξῆς ἕξ. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι, ἀφοῦ κάμωμεν τὸ πολὺ ἕξ διαιρέσεις, θὰ εὕρωμεν ἐξ ἀνάγκης ἐν ὑπόλοιπον καὶ πρὶν εὑρεθέν· τότε θὰ ἐπαναληφθῶσιν αἱ αὐταὶ μερικαὶ διαιρέσεις καὶ ἑπομένως θὰ εὕρωμεν τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· τοῦτο δὲ θὰ γίνεται ἐπ' ἄπειρον.

[illegible]

212. [illegible] ἄπειρα δεκαδικά [illegible] κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. [illegible] καθ' ὁμοιότητα [illegible] δεκαδικὰ [illegible]

[illegible]

κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο εἶνε περιοδικόν· καὶ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους (ἂν ὑπάρχῃ) εἶνε μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν τὸ κλάσμα $\frac{1}{7}$ δίδει περιοδικὸν ἁπλοῦν ἔχον περίοδον ἑξαψήφιον· τὸ δὲ $\frac{3}{11}$ δίδει ὅμοιον ἔχον περίοδον διψήφιον.

Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα.

ΑΠΛΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

220. Ἔστω κατὰ πρῶτον οἱονδήποτε ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους· οἷον τὸ 0,727272...

Ἂς λάβωμεν ἐξ αὐτοῦ περιόδους τινάς, ἔστω τρεῖς· τότε ἔχομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,727272·

τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100, (ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ νὰ προχωρήσῃ κατὰ μίαν περίοδον) καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 72,7272.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶχεν ἀκόμη μίαν περίοδον (ἤτοι ἂν εἶχεν ἀκόμη 72 ἑκατομμυριοστά), ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ προηγουμένου θὰ ἦτο ἀκριβῶς 72 ἀκέραια. Ἄρα ἡ διαφορά των θὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀκεραίου 72 κατὰ 72 ἑκατομμυριοστά· τουτέστιν ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ εἶνε

$$72-\frac{72}{1000000} \text{ ἢ } 72-\frac{72}{10^6}$$

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶνε 99 φορὰς ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,727272· (διότι ἐλάβομεν αὐτὸν 100 φορὰς καὶ ἔγινεν 72,7272 καὶ ἀπὸ τούτου ἀφῃρέσαμεν αὐτὸν μίαν φοράν). Ὥστε, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 99, θὰ δώσῃ τὸν δεκαδικὸν τοῦτον· ἤτοι εἶνε

$$0,727272=\frac{72}{99}-\frac{72}{10^6}\times\frac{1}{99}.$$

Ἂν ἐλαμβάνομεν 4 περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$0,72727272=\frac{72}{99}-\frac{72}{10^8}\times\frac{1}{99}.$$

Ἂν δὲ 5, θὰ εὑρίσκομεν

$$0,7272727272=\frac{72}{99}-\frac{72}{10^{10}}\times\frac{1}{99}\cdot$$ καὶ οὕτω καθεξῆς·

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁσασδήποτε περιόδους καὶ ἂν λάβωμεν κατὰ σειρὰν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, ὁ ἀποτελούμενος ὑπ' αὐτῶν ἀριθμὸς θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ των δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δεκαδικῆς μονάδος· διότι, ἐὰν λάβωμεν τέσσαρας περιόδους, ἡ διαφορὰ εἶνε $\frac{72}{99}\times\frac{1}{10^8}$· ἤτοι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^8}$· ἂν λάβωμεν 5, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{10}}$· ἂν ἕξ, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{12}}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· καὶ ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ λάβωμεν πάσας τὰς περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ ἀπετελεῖτο ὁ ἀριθμὸς $\frac{72}{99}$.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι, ἂν τὸ δοθὲν περιοδικὸν παράγηται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ τινος κλάσματος, τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ εἶνε ἴσον τῷ $\frac{72}{99}$· διότι, ὅταν δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία παράγηται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ κλάσματος, καθ' ὅσον λαμβάνομεν περισσότερα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ τούτου, κατὰ τοσοῦτον πλησιάζομεν πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παρήχθη (ἰδ. 217).

Ὅτι δὲ αὐτὸ τὸ δοθὲν περιοδικὸν 0,727272... παράγεται ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$, δείκνυται ὡς ἑξῆς·

Ὅταν τρέπω τὸ κλάσμα $\frac{72}{99}$ εἰς δεκαδικόν, [illegible]

[illegible]

221. [illegible]

[illegible]

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀριθμός, ὅστις εὑρίσκεται κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ... πάντοτε κλασματικὸς (ἑπομένως παράγει τὸ δεκαδικὸν περιοδικόν), ...ν ὅταν πάντα τὰ ψηφία τῆς περιόδου εἶνε 9· ὅταν δηλαδὴ τὸ δε... περιοδικὸν εἶνε 0,999999.....
...τι τότε ὁ ἀριθμός, πρὸς ὃν προσεγγίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον ... μᾶλλον περισσότερα ψηφία (ὁ κατὰ τὸ θεώρημα εὑρισκόμενος), εἶνε ... ἢ $\frac{99}{99}$ ἢ $\frac{999}{999}$ κτλ. τουτέστιν 1 ἀκέραιον. Ἄρα *τὸ περιοδικὸν τοῦτο ἐξ ...δενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται.* Ὅτι δὲ προσεγγίζομεν εἰς τὴν ...νάδα 1, ὅταν λαμβάνωμεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψη...α αὐτοῦ, ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ 0,9 ...αφέρει τῆς μονάδος 1 κατὰ $\frac{1}{10}$· τὸ 0,99 διαφέρει ἀπ' αὐτῆς κατὰ ...· τὸ 0,999 κατὰ $\frac{1}{1000}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε δυνάμεθα νὰ λέ...μεν, ὅτι ἅπασαι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ 0,999.... ἀπο...λοῦσι τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.

222. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται εὐκόλως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ...νοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέ...ον μέρος.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 45,722722722....

Ἐπειδὴ τοῦτο εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου 45 καὶ τοῦ ἁπλοῦ περιο...οῦ 0,722722722..., φανερὸν εἶνε, ὅτι παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ

$$45\frac{722}{999} \text{ ἤτοι } \frac{45\times999+722}{999}.$$

Ἐὰν τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶνε πάντα 9, τὸ περιοδικὸν ἐξ οὐδενὸς ...νοῦ κλάσματος παράγεται· οἷον τὸ κλάσμα 14,999999.....

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ συναποτελοῦσιν, ἂν ληφθῶσιν ἅπασαι, τὸν ...ραιον 15.

Παρατήρησις.

223. Τὸ κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρισκόμενον κοινὸν κλάσμα (ἐξ ... παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικόν), ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲν εἶνε ἀνά...γον. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ, ὡς λήγων εἰς 9, δὲν ἔχει οὔτε ... παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Οὐδὲ δύναται νὰ ἀποκτήσῃ ...ς παράγοντας τούτους ἐν τῇ ἁπλοποιήσει τοῦ κλάσματος· διότι ...ε διαιρεῖται διὰ τινος τῶν παραγόντων του.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

224. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ὅπερ παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.*

ΜΙΚΤΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

225. Ταῦτα ἀνάγονται εὐκόλως εἰς ἁπλᾶ περιοδικά.

Διότι ἔστω, λ. χ., τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427427...

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρὸς (διὰ νὰ ἀρχίζῃ ἡ περίοδος ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν), λαμβάνομεν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 1875,427 427...

Τὸ περιοδικὸν τοῦτο παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $1875+\frac{427}{999}$ ἤτοι ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος

$$\frac{1875\times 999+427}{999}=\frac{1873552}{999}.$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 1875,427 427... προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 1873552 διὰ 999, τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427..., ἐπειδὴ ἔχει τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἁπλοῦν ψηφία, ἀλλ' ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ὑποδιαστολὴ [illegible] δύο θέσεις [illegible], προφανῶς ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 1873552 διὰ 99900 ἤτοι ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1873552}{99900}$.

226. [illegible]

[illegible] *μικτὸν περιοδικὸν* [illegible] *ὥστε να* [illegible] *ἁπλοῦν* [illegible] *μετα*[illegible] *καθεξῆς.*

[illegible] μικτὸν [illegible]

[illegible]

[illegible] τὸν δε[illegible] ἀποδείξῃ [illegible]

[illegible]

227. [illegible]

κτὸν περιοδικόν, οὐδέποτε λήγει εἰς 0. Εἰς τὸ ἀνωτέρω δοθὲν παράδειγμα ὁ ἀριθμητὴς εἶνε $1875\times999+427$· γράφεται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς

$$1875\times1000-1875+427, \text{ ἤτοι } 1875427-1875,$$

ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι, ἵνα λήγῃ εἰς 0, ἔπρεπε τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου· ἤτοι μὲ τὸ 7· τότε ὅμως καὶ τὸ ψηφίον τοῦτο 5 θὰ περιελαμβάνετο εἰς τὴν περίοδον (ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· διότι τότε τὸ περιοδικὸν θὰ ἦτο 18,7742742742.... καὶ θὰ εἶχε περίοδον 742· θὰ ἤρχιζε δὲ ἡ περίοδος μίαν θέσιν πρίν).

Ὁ δὲ παρονομαστὴς 99×100 ἔχει, ὡς ἀμέσως φαίνεται, ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἑκάτερον μὲ ἐκθέτην 2 (διότι $100=2^2\times5^2$)· τουτέστι τοσάκις ἑκάτερον, ὅσα εἶνε τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος μικτοῦ περιοδικοῦ.

Ἁπλοποιοῦντες δὲ τὸ κλάσμα εἶνε δυνατὸν νὰ ἐξαλείψωμεν ἢ τὸν παράγοντα 2 (ἅπαξ ἢ πολλάκις) ἢ τὸν παράγοντα 5· ἀλλ' οὐχὶ ἀμφοτέρους· διότι τότε θὰ διῃροῦντο οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ 10, ὅπερ ἀδύνατον (διότι ὁ ἀριθμητὴς δὲν λήγει εἰς 0). Ὥστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ προκύπτοντος ἀναγώγου κλάσματος θὰ διατηρήσῃ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ τὸν αὐτὸν καὶ πρὶν ἐκθέτην.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ θεώρημα.

228. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικόν, περιέχει τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων. Δύναται δὲ νὰ ἔχῃ καὶ τὸν ἄλλον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μικρότερον.*

229. Συνοψίζοντες ἅπαντα τὰ περὶ τῶν δεκαδικῶν εἰρημένα, συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς.

1) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ κλάσματος περιέχῃ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 (ἢ τὸν ἕνα μόνον ἐξ αὐτῶν, ἢ ἀμφοτέρους), τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

2) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (ἰδ. 216)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ ἁπλοῦν· διότι, ἂν παρῆγε μι-

κτον, ὁ παρονομαστής του θὰ περιεῖχεν ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 (ἰδ. 228).

3) *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, περιέχῃ δὲ πλὴν αὐτῶν καὶ ἄλλους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει μικτὸν περιοδικόν.*

Τὸ κλάσμα τοῦτο, ὡς μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (ἰδ. 216), θὰ παράγῃ περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ μικτόν· διότι, ἂν παρῆγεν ἁπλοῦν, δὲν θὰ περιεῖχεν ὁ παρονομαστής του οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5 (ἰδ. 224).

4) *Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα παράγεται ἔκ τινος κοινοῦ κλάσματος, [illegible] αἱ μονάδες αὐτοῦ ὅροι λαμβάνονται [illegible] ἐὰν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9. Ἀλλὰ ταῦτα δὲ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγονται· καὶ τοιαῦτα [illegible] ἄπειρα, [illegible] ἀπο-[illegible] δεκαδικὸν [illegible].*

[illegible]

[illegible] 9. [illegible]

[illegible]

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

230. *Ποσὸν* λέγεται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν· οἷον τὸ μῆκος, ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος, τὸ βάρος τῶν σωμάτων εἶνε ποσά, καὶ ὁ χρόνος ἐπίσης.

231. *Μέτρησις* τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται *μονάς*. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσόν· ἤτοι πῶς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν της, καθὼς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος του καὶ ἐκ τῶν μερῶν της, ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται, ὅτι παριστᾷ τὸ ποσόν. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, εὕρωμεν, ὅτι ποσόν τι ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος του τετράκις ληφθείσης, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς εἶνε ὁ 4. Ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ τετάρτου αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν αὐτὸ εἶνε $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, ἤτοι $\frac{7}{4}$.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσιν ὅσον τὸ δυνατὸν τὰ κλάσματα (τὰ ὁποῖα διὰ τοὺς πολλοὺς εἶνε δύσκολα), ἔλαβον εἰς τὴν μέτρησιν ὡρισμένα τινὰ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος καὶ ταῦτα ἐθεώρησαν ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὠνόμασαν *δράμιον*· καὶ ἑπομένως ἀντὶ νὰ λέγωσιν, ὅτι βάρος τι εἶνε 5 ὀκάδες καὶ $\frac{160}{400}$ τῆς ὀκᾶς, λέγουσιν, ὅτι εἶνε 5 ὀκάδες καὶ 160 δράμια. Ὁμοίως τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὠνόμασαν *λεπτὸν πρῶτον*, τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς *λεπτὸν* κτλ.

Ἐπίσης διὰ νὰ ἀποφύγωσι τοὺς λίαν μεγάλους ἀριθμούς, οἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶνε λίαν μέγα ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἔλαβον ὡρισμένα τινὰ πολλαπλάσια αὐτῆς ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τοίχου, ἀρκεῖ ὁ πῆχυς. Ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, λαμβάνομεν 1000 πήχεις ὡς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *στάδιον*, καὶ δι' αὐτῆς ἐκφράζομεν τὴν ἀπόστασιν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δύναται ποσόν τι νὰ παρίσταται δι' ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μέν, ἀλλ' ἐχόντων διαφόρους μονάδας καὶ διάφορα ὀνόματα. Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *συμμιγὴς ἀριθμός*.

232. Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶνε ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶνε πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.

Οἷον 8 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶνε συμμιγὴς ἀριθμός.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶνε πάντοτε συγκεκριμένοι.

Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

Τὰ διάφορα ἔθνη δὲν λαμβάνουσι δι' ἕκαστον ποσὸν οὔτε τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα οὔτε τὰς αὐτὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς· μόνον διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπεκράτησαν αἱ αὐταὶ μονάδες εἰς πάντα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη. Διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὰ κυριώτερα εἴδη τῶν συμμιγῶν, μάλιστα δὲ ἐκεῖνα [illegible] μεταχειριζόμεθα.

Μονάδες μήκους.

1) Γαλλικὸν μέτρον ἢ γαλλικὸς πῆχυς.

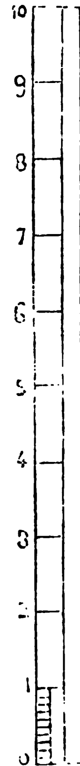
[illegible] μᾶλλον [illegible] μονὰς αὕτη [illegible] ὥστε ἡ [illegible] μέτρα [illegible]

Μέτρον ἢ *βασιλικὸς πῆχυς*, ἀρχικὴ μονάς·

παλάμη $=\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως. *Στάδιον*$=1000$ μέτρα

δάκτυλος$=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης·

γραμμὴ $=\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου.



Κατὰ ταῦτα εἶνε

$1^{\pi\acute{\eta}\chi.} = 10^{\pi\alpha\lambda.} = 100^{\delta\alpha\kappa\tau.} = 1000^{\gamma\rho.}$

$1^{\pi\alpha\lambda.} = 10^{\delta\alpha\kappa\tau.} = 100^{\gamma\rho.}$

$1^{\delta\alpha\kappa\tau.} = 10^{\gamma\rho.}$

Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ παλάμην διῃρημένην εἰς δακτύλους.

Καθὼς βλέπομεν αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶνε δεκαδικαί· τοῦτο δὲ ἐγένετο διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων· διότι πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν μῆκος, ἤτοι συγκείμενος ἐκ μέτρων, παλαμῶν, δακτύλων καὶ γραμμῶν, παρίσταται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων ἀκέραιον μέρος τοὺς πήχεις, δέκατα δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν παλαμῶν, ἑκατοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων καὶ χιλιοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν·

Ἴον $15^{\pi\acute{\eta}\chi.}\ 2^{\pi\alpha\lambda.}\ 3^{\delta\alpha\kappa\tau.}\ 5^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ $^{\pi\acute{\eta}\chi.}$ εἶνε$=15{,}235$.

Ἑπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν τούτων ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15^{π} , 235 ἀπαγγέλλεται κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰρημένα (ἐδ. 213) καὶ ὡς ἑξῆς· 152 παλάμαι καὶ 35 γραμμαί, ἢ 15235 γραμμαί, ἢ 1523 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμαί, κτλ.

2) *Τεκτονικὸς πῆχυς.*

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶνε τὰ 75 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου· μεταχειρίζονται δ' αὐτὸν εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

3) *Πήχεις τοῦ ἐμπορίου.*

Εἰς τὸ ἐμπόριον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις λέγεται *ἐνδεζὲ* καὶ

εἶνε 0,μέτ. 648 (ἤτοι 648 χιλιοστὰ τοῦ γαλλικοῦ μέτρου)· καὶ τὸν μεγαλήτερον, ὅστις λέγεται *ἀρσίν*, καὶ εἶνε 0μ., 669· διαιρεῖται δὲ ἕκαστος τούτων εἰς 8 *ρούπια*.

4) *Ὀργυιά.*

Ἡ ὀργυιὰ εἶνε παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους· ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

Ὀργυιά, ἀρχικὴ μονάς·

πούς $= \frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς·

δάκτυλος $= \frac{1}{12}$ τοῦ ποδός·

γραμμή $= \frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου.

Ἡ χρῆσις τῆς ὀργυιᾶς καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς ἤρχισεν ἤδη νὰ γίνηται σπανιωτέρα. Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶνε ἡ ἑξῆς· 1 ὀργ. = 1,μετ. 9490[illegible] καὶ 1 μετ. = 0 ὀργ. 3 ποδ. 0 δακ. 11 γραμ. $\frac{296}{1000}$ 1 ποὺς = 0,μετ. 3248[illegible].

Μονάδες ἐπιφανείας.

Μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Εἶνε δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἵτινες σχηματίζουσιν ὀρθὰς γωνίας.

Τετραγωνικὸς πῆχυς λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα πῆχυν.

[illegible]

αρμόσωμεν (κατὰ τὰς μεγαλητέρας πλευρὰς των), θ'ἀποτελεσθῇ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς· ὥστε ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς περιέχει 10×10 ἤτοι 100 τετραγωνικὰς παλάμας.

Τετραγωνικὸς δάκτυλος λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε εἷς δάκτυλος ($= \frac{1}{10}$ τῆς παλάμης $= \frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου)· εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ὑποδιαιρέσεις εἶνε δεκαδικαί, ὥστε πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν ἐπιφάνειαν, ἤτοι συγκείμενος ἐκ τετρ. πήχεων, τετρ. παλαμῶν, τετρ. δακτύλων, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός·

οἷον $3^{\text{τ. πήχ.}}\ 15^{\text{τ. πλ.}}\ 2^{\text{τ. δακτ.}}$ γράφεται $3^{\text{τ. πήχ.}}\ 1502$

ἀπαγγέλλεται δὲ (συμφώνως πρὸς τὰ ἐν τῷ ἐδ. 213 εἰρημένα) κατὰ πολλοὺς τρόπους· π.χ. 3 τ. πήχεις, 15 τ. παλάμαι καὶ 2 τ. δάκτυλοι, ἢ 315 τ. παλάμαι καὶ 2 τ. δάκτυλοι, ἢ 31502 τ. δάκτυλοι.

Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶνε τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· εἶνε δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων. Ἡ σχέσις αὐτοῦ πρὸς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶνε ἡ ἑξῆς

$$1 \text{ τετρ. τεκ. πῆχυς} = \frac{9}{16} \text{ τοῦ τετρ. μέτρου}$$

καὶ ἑπομένως $1 \text{ τετραγων. μέτρ.} = \frac{16}{9}$ τοῦ τεκτ. τετρ. πήχεως.

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειρίζονται παρ' ἡμῖν τὸ *βασιλικὸν στρέμμα* = 1000 τετρ. μέτρα.

Ἐὰν νοηθῇ τὸ βασιλικὸν στρέμμα ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρά του θὰ εἶνε ὡς ἔγγιστα $31^{\text{μέτρ.}}\ 662$ $\left(\text{κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{1000}\right)$.

Τὸ *παλαιὸν στρέμμα* εἶνε τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 55 μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Εἶνε δὲ τὸ παλαιὸν στρέμμα ἴσον μὲ 1,27 βασιλικὰ στρέμματα.

Ἑπομένως τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶνε ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ στρέμματος.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

Μονὰς τῶν ὄγκων λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε

ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Εἶνε δὲ ὁ κύβος στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ 6 τετραγώνων ἴσων. Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶνε τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων λέγεται *κυβικὸν μέτρον*· ἂν δὲ ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶνε ἡ παλάμη, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται *κυβικὴ παλάμη*· ἂν δὲ ὁ δάκτυλος, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται *κυβικὸς δάκτυλος*, κτλ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.



Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν 10 κυβικὰς παλάμας καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος 1 πῆχυν, πλάτος ὅμως καὶ ὕψος μίαν παλάμην· ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἐπιμήκεις ἐπιφανείας των, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος καὶ πλάτος ἴσα μὲ 1 πῆχυν, ὕψος ὅμως μίαν παλάμην.

Ἐὰν τέλος 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπ' ἀλλήλων καὶ προσαρμόσωμεν, σχηματίζομεν τὸ κυβικὸν μέτρον· ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον σύγκειται ἐκ χιλίων κυβικῶν παλαμῶν, ἢ ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

Ὁμοίως σύγκειται ἡ κυβικὴ παλάμη ἐκ 1000 κυβικῶν δακτύλων καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι ἡ χωρητικότης κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε μία παλάμη. Εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχονται κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα 1000 λίτραι.

Ἡ λίτρα εἶνε ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ἤτοι ὁ ὄγκος, ὅσον ἔχουσιν 100 κυβικαὶ παλάμαι· γίνεται δὲ τούτου χρῆσις ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Παρατήρησις.

Αἱ μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων λέγονται *θεωρητικαὶ μονάδες*· διότι δὲν μετροῦμεν ἀμέσως δι' αὐτῶν τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους, ἀλλ' ἐμμέσως· μετροῦμεν δηλ. διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους

μμάς τινας τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τοῦ λογαριασμοῦ, πόσας μονάδας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ ὁ ὄγκος (τὰ ι τούτων διδάσκει λεπτομερῶς ἡ Γεωμετρία).

Μονάδες βάρους

Οἱ Γάλλοι παραδεχθέντες τὸ μέτρον ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους έτισαν πρὸς ταύτην καὶ τὰς λοιπὰς μονάδας· ὅθεν καὶ τὰς μονά- τοῦ βάρους. Διὰ τοῦτο παρεδέχθησαν τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους.

Γραμμάριον, ἢ δραχμὴ (Gramme).

ὅτο εἶνε τὸ βάρος ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον (τὸ ωρ πρέπει νὰ εἶνε καθαρὸν καὶ ἀπεσταγμένον καὶ εἰς θερμοκρασίαν ι βαθμῶν τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου).

Χιλιόγραμμον (Kilogramme) = 1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμον εἶνε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ μία κυβικὴ λάμη, ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

Τόννος λέγεται τὸ βάρος χιλίων χιλιογράμμων, ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ιτος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

Τὰς μονάδας ταύτας τοῦ βάρους παρεδέχθησαν καὶ οἱ Βέλγοι καὶ Ὀλλανδοὶ καὶ οἱ Γερμανοί, πλὴν τοῦ ὅτι ἀντὶ τοῦ χιλιογράμμου ταχειρίζονται οἱ Γερμανοὶ τὸ φούντιον (Pfund), ὅπερ ἔχει βάρος 0 γραμμαρίων.

Παρ' ἡμῖν καὶ παρὰ τοῖς Τούρκοις μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶνε αἱ ἑξῆς·

Ὀκᾶ ἀρχικὴ μονὰς   *Στατὴρ* = 44 ὀκάδες

Δράμιον = $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὸ χιλιόγραμμον εἶνε ἡ ἑξῆς·

1 ὀκᾶ = 1280 γραμμάρια.

1 δράμ. = 3 $\frac{1}{5}$ γραμμάρια.

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶνε 312 $\frac{1}{2}$ δράμια = 0,78... τῆς ὀκᾶς·

ι λίτρα ὕδατος εἶνε λοιπὸν 312 $\frac{1}{2}$ δράμια.

Μονάδες νομισμάτων
(Ἑλληνικαί).

Δραχμὴ ἀρχικὴ μονάς.   *πεντάδραχμον* = 5 δραχμαί.

Λεπτὸν = $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς.   *εἰκοσάδραχμον* = 20 δραχμαί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Περὶ τῶν νομισματικῶν μονάδων τῶν διαφόρων ἐθ— ἰδὲ μικράν μου ἀριθμητικήν.

Μονάδες χρόνου

(ἐν χρήσει παρὰ πᾶσι τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσιν).

Ἡμέρα ἢ νυχθήμερον ἀρχικὴ μονάς. *Μὴν*=30 ἡμέραι.

Ὥρα$=\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. *Ἔτος*=12 μῆνες=365 ἡμέραι.

Λεπτὸν πρῶτον$=\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας.

Λεπτὸν δεύτερον$=\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Παρατήρησις.

Οἱ μῆνες ἔχουσιν ἄλλοι μὲν 30, ἄλλοι δὲ 31 ἡμέρας· ὁ δὲ Φιβρουάριος ἔχει 28 διὰ τὰ κοινὰ ἔτη, 29 δὲ διὰ τὰ ἐμβόλιμα ἢ δίσεκτα, ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας, ἐν ᾧ τὰ κοινὰ ἔχουσι 365.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς ὀξείας· οἷον 30'· τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο· οἷον 15''.

Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶνε

$$1^{\text{ἡμ.}}=24^{\text{ὥρ.}}=1440'=86400''$$
$$1^{\text{ὥρ.}}=60'=3600''$$
$$1'=60''$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα θεωρεῖται ἴση μὲ 12 ὥρας, ἐκτὸς ἂν εἰς τὸ πρόβλημα ὁρίζηται ἄλλως.

Διαίρεσις τῆς περιφερείας.

(παραδεδεγμένη ὑπὸ πάντων τῶν πεπολιτισμένων ἐθνῶν).

Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *λεπτὰ πρῶτα* καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 *λεπτὰ δεύτερα*.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται δι' ἑνὸς μηδενικοῦ, ὅπερ γράφεται ὀλίγον ὑπεράνω καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, οἷον 72^0· τὰ πρῶτα λεπτὰ δι' ἑνὸς τόνου καὶ τὰ δεύτερα διὰ δύο· οἷον $23^0\ 48'\ 32''$.

Γενικὴ παρατήρησις.

234. Ὅσα εἴδη συμμιγῶν ἔχουσι μονάδας μὲ δεκαδικὰς ὑποδιρέσεις, γράφονται ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς οἱασδήποτε ἐκ τῶν μοδων των, καὶ ἑπομένως ἀνάγονται εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. ὥστε ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς πράξεις ἐπὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Αἱ λλικαὶ μονάδες τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν ἔχουσι τὸ προτέρημα ῦτο· ἐκτὸς δὲ τούτου βασίζονται ἐπὶ τοῦ μέτρου, ὅπερ ἕνεκα τῆς έσεώς του πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς, δύναται πάντοτε νὰ εὑρίσκηι. Διὰ τὰ δύο ταῦτα πλεονεκτήματα ἐπεκράτησε τὸ γαλλικὸν μετριν σύστημα τῶν μονάδων οὐ μόνον καθ' ἅπασαν τὴν Γαλλίαν, ἀλλὰ ὶ εἰς ἄλλα κράτη (τὸ Βέλγιον, τὴν Ὁλλανδίαν, τὴν Ἑλβετίαν)· ήχθη δὲ καὶ παρ' ἡμῖν διὰ βασιλικοῦ διατάγματος (τοῦ 1836), λλ' ἡ ὁλοσχερὴς παραδοχὴ αὐτοῦ δὲν κατωρθώθη ἀκόμη παρ' ἡμῖν.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις πραγματευόμενοι τὰς πράξεις τῶν συμμιγῶν ιθμῶν λαμβάνομεν τὰ παραδείγματα ἐκ τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ όντων δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις· τοῦτο δέ, διότι τῶν ἄλλων αἱ πράις γίνονται εὐκολώτερον ὡς πράξεις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

235. *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάως του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς $18^{\text{στατ.}}$ $32^{\text{όκ.}}$ $250^{\text{δρ.}}$, τις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, οι εἰς δράμια.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας καὶ ἔπειτα τὰς άδας εἰς δράμια, ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 18 ἔχουσι 44×18, ἤτοι 92 ὀκάδας· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις καὶ 32 ὀκάδας, ὥστε 18 στατῆρες καὶ αἱ 32 ὀκάδες γίνονται 824 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, αἱ 824 ὀκάδες ἔχουσι δράμια 00×824, ἤτοι 329600.

ει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις 250 δράμια· ὥστε τὸ ὅλον γίνονται

329850 δράμια·

ράπη λοιπὸν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἰς δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς εὐκολίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

$$18^{\sigma\tau.} \quad 32^{\acute{o}\kappa.} \quad 250^{\delta\rho.}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 44 \\ \hline 72 \\ 72 \\ \hline 792^{\acute{o}\kappa.} \\ 32 \\ \hline 824^{\acute{o}\kappa.} \\ 400 \\ \hline 329600^{\delta\rho.} \\ 250 \\ \hline 329850^{\delta\rho.} \end{array} = 18^{\sigma\tau.} \quad 32^{\acute{o}\kappa.} \quad 250^{\delta\rho.}$$

236. *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως* (ἀνωτέρας τῆς τελευταίας), *γίνεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ μικτός.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ συμμιγὴς

$$4^{\dot{\eta}\mu.} \quad 10^{\tilde{\omega}\rho.} \quad 48' \quad 32'',$$

ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν.

Αἱ μὲν ἡμέραι καὶ αἱ ὧραι γίνονται ἀκέραιος ἀριθμὸς ὡρῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν, εἶνε δὲ $4^{\dot{\eta}\mu.}\ 10^{\tilde{\omega}\rho.} = (24 \times 4) + 10 = 106$ ὧραι· τὸ δὲ ἄλλο μέρος τοῦ συμμιγοῦς (ἤτοι τὰ 48′ 32″) τρέπομεν πρῶτον εἰς δεύτερα λεπτά, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν,

$$48'\ 32'' = (60'' \times 48) + 32'' = 2880'' + 32''' = 2912''.$$

Μένει ἀκόμη νὰ τρέψωμεν τὰ 2912″ εἰς ὥρας (ἢ εἰς μέρη τῆς ὥρας)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν, πόσον μέρος τῆς ὥρας εἶνε τὸ 1″· δηλαδὴ πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει μία ὥρα,

$$1^{\tilde{\omega}\rho.} = 60' = 60'' \times 60 = 3600''.$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ 1″ εἶνε τὸ $\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας, τὰ 2912″ εἶνε $\frac{2912}{3600}$ τῆς ὥρας.

Ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν

$$106\frac{2912}{3600} \text{ ἢ } 106\frac{728}{900} \text{ ἢ } 106\frac{182}{225}.$$

237. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του, τρέπομεν τὰ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶνε μεγαλήτεραι τῆς δοθείσης, εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης· τὰ δὲ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶνε μικρότεραι, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ κλάσματος τούτου, τρέπομεν πρῶτον τὰ ῥηθέντα μέρη εἰς τὸ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα.

Παραδείγματα.

1) $5^{\text{οκ.}}$ $220^{\text{δρ.}} = 5\frac{220}{400}$ ἢ $5\frac{11}{20}$ τῆς ὀκᾶς.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶνε $= \frac{2220}{17600}$ τοῦ στατῆρος ἢ $\frac{111}{880}$.

2) $2^{\text{οργ.}}$ $3^{\text{π.}}$ $6^{\text{δ.}}$ $4^{\text{γρ.}} = 2\frac{508}{864}$ ἢ $2\frac{127}{216}$ τῆς ὀργυιᾶς·

ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶνε $= 15\frac{76}{144}$ ἢ $15\frac{19}{36}$ τοῦ ποδός·

ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶνε $= 186\frac{4}{12}$ ἢ $186\frac{1}{3}$ τοῦ δακτύλου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑποτίθεται, ὅτι ὁ συμμιγὴς σύγκειται ἐξ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐνίοτε δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ κλάσμα τι τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ὡς π. χ. ὁ συμμιγὴς

$$2^{\text{στ.}} \quad 15^{\text{οκ.}} \quad 265^{\text{δρ.}}\frac{1}{3}.$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, παρατηροῦμεν, ὅτι

$2^{\text{στ.}}$ $15^{\text{οκ.}} = 103^{\text{οκ.}}$, $265^{\text{δρ.}} = \frac{265}{400}$ τῆς ὀκᾶς·

$\frac{1}{3}$ τοῦ δραμίου $= \frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{400}$ ἢ $= \frac{1}{1200}$ τῆς ὀκᾶς·

ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶνε $103^{\text{οκ}}\ \frac{265}{400} + \frac{1}{1200}$ τῆς ὀκᾶς·

ἢ $103\ \frac{796}{1200}$.

Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

238. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται κλασματικός τις συγκεκριμένος ἀριθμός, οἷον ὁ $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς, νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ εὑρίσκομεν $\frac{17}{5}$ ὀκ. = $3^{\text{ὀκ.}}\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς.

Μένει λοιπὸν νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια· καὶ πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 400· διότι 1 ὀκᾶ = 400 δράμια, ἄρα $\frac{1}{5}$ ὀκ. = $\frac{400}{5}$ δρ. καὶ $\frac{2}{5}$ ὀκ. = $400 \times \frac{2}{5}$ δρ. Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι $\frac{2}{5}$ ὀκ. = 160 δρ. Ἐτράπη λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν: $3^{\text{ὀκ.}}\ 160^{\text{δρ.}}$

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\frac{17}{5}\text{ ὀκ.} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3^{\text{ὀκ.}} \quad 160^{\text{δρ.}} \\ 400 & \\ \hline 800 & \\ 30 & \\ 0 & \end{array}$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη κατ' οὐδὲν διαφέρει ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ τῶν 17 ὀκάδων εἰς 5 ἴσα μέρη· διότι, ἂν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 17 ὀκάδας, θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς.

239. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν κλασματικόν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων τούτων δὲν εὑρεθῇ πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον), λαμβάνομεν ὡς πηλίκον αὐτῆς τὸ 0 καὶ ὡς ὑπόλοιπον αὐτῆς τὸν διαιρετέον της καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

Παραδείγματα.

$\frac{3}{5}$ στατ. $=26^{οκ.}$ $160^{δρ.}$

$\frac{4}{3}$ ὥρας $=1^{ὥρ.}$ $20'$

$\frac{6}{7}$ ἡμέρας $=23^{ὥρ.}$ $8'$ $34''$ $\frac{2}{7}$.

Πράξεις συμμιγῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

240. *Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς τελευταίας. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δὲν ἀποτελῇ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον, ὅταν ὅμως ἀποτελῇ, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον ἑνοῦμεν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς οἱ προσθετέοι, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

$15^{ὥρ.}$	$20'$	$40''$
6	$0'$	$38''$
	$15'$	$48''$
1	$10'$	
$22^{ὥρ.}$	$47'$	$6''$

$18^{στ.}$	$40^{οκ.}$	$350^{δρ.}$
	27	75
42	2	125
$61^{στ.}$	$26^{οκ.}$	$150^{δρ.}$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

241. *Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τῆς*

τελευταίας τάξεως. Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου εἶνε μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, φροντίζοντες ὅμως νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἐδ. 29, 1).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

65$^{οργ.}$	4$^{π.}$	2$^{δ.}$	10$^{γρ.}$
6$^{οργ.}$	5$^{π.}$	8$^{δ.}$	5$^{γρ.}$
58$^{οργ.}$	4$^{π.}$	6$^{δ.}$	5$^{γρ.}$

182$^{στ.}$	12$^{οκ.}$	250$^{δρ.}$
	32$^{οκ.}$	320$^{δρ.}$
181$^{στ.}$	23$^{οκ.}$	330$^{δρ.}$

2$^{ημ.}$			
	10$^{ωρ.}$	30′	30″
1$^{ημ.}$	13$^{ωρ.}$	29′	30″

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

242. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.*

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 134)· διότι ὁ συμμιγὴς εἶνε ἄθροισμα τῶν μερῶν του.

Παρατήρησις.

Ἐὰν εἰς μερικόν τι γινόμενον περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ μερικὸν γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· τοῦτο δὲ λέγεται *κατάταξις* τῶν μονάδων.

Παραδείγματα.

1) Ἔχομεν 12 σάκκους καφέ, ἐξ ὧν ἕκαστος περιέχει 1$^{στ.}$ 15$^{οκ.}$ 250$^{δρ.}$ πόσος καφὲς περιέχεται εἰς τοὺς 12 σάκκους;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν συμμιγῆ 1$^{στ.}$ 15$^{οκ.}$ 250$^{δρ.}$ δώδεκα φοράς, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 12.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$1^{στ.}$	$15^{οκ.}$	$250^{δρ.}$
		12
$12^{στ.}$	$180^{οκ.}$	$3000^{δρ.}$
$16^{στ.}$	$11^{οκ.}$	$200^{δρ.}$

Κατάταξις

$3000^{δρ.} = 7^{οκ.}$ $200^{δρ.}$
$187^{οκ.} = 4^{στ.}$ $11^{οκ}$

ὥστε τὸ γινόμενον εἶνε $16^{στ.}$ $11^{οκ.}$ $200^{δρ.}$

2) Διὰ νὰ διατρέξῃ τις ἓν στάδιον, χρειάζεται $1^{ωρ.}$ $10'$ $15''$ πόσας ὥρας χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ 25 στάδια ;

$1^{ωρ.}$	$10'$	$15''$
		25
$25^{ωρ.}$	$250'$	$375''$
$29^{ωρ.}$	$16'$	$15''$

Κατάταξις

$375'' = 6'$ $15''$
$256' = 4^{ωρ.}$ $16'$

2) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

243. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου* (ἤτοι διὰ νὰ μερίσωμεν συμμιγῆ εἰς ἴσα μέρη), *διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν μερῶν του διὰ τοῦ ἀκεραίου* (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, ἐδ. 190).

Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος τοῦ συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἑνοῦμεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς, πρὶν διαιρέσωμεν αὐτάς. Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων.

Παράδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν $250^{στ.}$ $18^{οκ.}$ $350^{δρ.}$ ἑνὸς πράγματος εἰς 15 ἀνθρώπους· τουτέστι νὰ μερίσωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς 15 ἴσα μέρη.

Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 250 στατῆρας καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι λαμβάνει ἕκαστος 16 στατῆρας καὶ περισσεύουν 10 στατῆρες. Τοὺς 10 τούτους στατῆρας τρέπομεν εἰς ὀκάδας καὶ εὑρίσκομεν 440 ὀκάδας,

ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς καὶ 18 ὀκάδας, ὥστε ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 458 ὀκάδας εἰς τοὺς 15 ἀνθρώπους. Ἐκ τούτων λαμβάνει ἕκαστος 30 ὀκάδας καὶ περισσεύουν καὶ 8 ὀκάδες. Τὰς 8 ταύτας ὀκάδας τρέπομεν εἰς δράμια καὶ εὑρίσκομεν 3200 δράμια· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς καὶ 350 δράμια· λοιπὸν ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν δράμια 3550. Ἐκ τούτων δὲ λαμβάνει ἕκαστος 236 δράμια καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ δραμίου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$
\begin{array}{l|l}
250^{\sigma\tau.}\quad 18^{\acute{o}\kappa.}\quad 350^{\delta\rho.} & 15 \\
\cline{2-2}
100 & 16^{\sigma\tau.}\quad 30^{\acute{o}\kappa.}\quad 236^{\delta\rho.}\ \frac{10}{15} \\
\ \ 10 & \\
\ \ 44 & \\
\hline
440 & \\
\ \ 18 & \\
\hline
458^{\acute{o}\kappa.} & \\
\ \ 08 & \\
\ \ \ 400 & \\
\hline
\ \ 3200 & \\
\ \ \ 350 & \\
\hline
\ \ 3550^{\delta\rho.} & \\
\ \ \ \ 55 & \\
\ \ \ 100 & \\
\ \ \ \ 10 &
\end{array}
$$

Παρατήρησις.

244. Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου, ἡ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον γινομένη, εἶνε μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς μέρη ἴσα· οὐχὶ δὲ μέτρησις τοῦ συμμιγοῦς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, ἥτις λέγεται μὲν καὶ αὐτὴ διαίρεσις, διαφέρει ὅμως τοῦ μερισμοῦ οὐσιωδῶς (ἰδὲ ἐδ. 74, παρατ.).

Εἰς τοιαύτην διαίρεσιν π. χ. ἄγει τὸ ἑξῆς πρόβλημα· 15 *στατῆρες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν* 1 *τάλληρον*, *πόσον ἀξίζουν* $250^{\sigma\tau.}$ $18^{\acute{o}\kappa.}$ $350^{\delta\rho.}$ (ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος); Φανερὸν εἶνε, ὅτι τόσα τάλληρα (καὶ μέρη αὐτοῦ) ἀξίζουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ συμμιγὴς τοὺς 15 στατῆρας (καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ)· ὥστε ἡ πρᾶξις ἐνταῦθα εἶνε μέτρησις· πρέπει δηλονότι νὰ μετρηθῇ ὁ συμμιγὴς $250^{\sigma\tau.}$ $18^{\acute{o}\kappa.}$ $350^{\delta\rho.}$ διὰ τῶν 15 στατήρων. Περὶ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

245. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον, ἥτις λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*· (προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος ἀριθμός).

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 12ὥρ. 45′ 50″ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 280.

Διὰ νὰ κάμωμεν τοῦτο, θὰ πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν 280.

Καὶ αἱ μὲν 12 ὧραι ἐπὶ 280 πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται 12×280 ὧραι, ἤτοι 3360 ὧραι.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τώρα τὰ 45′ ἐπὶ 280, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 60′ (ἤτοι μίαν ὥραν) ἐπὶ 280, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 280 ὥρας.

Τουτέστιν 60′×280=280ὥρ.
ἄρα 30′×280=140ὥρ.· διότι τὰ 30′ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 60′·
καὶ 15′×280= 70ὥρ.· διότι τὰ 15′ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 30′·
ὥστε 45′×280=210ὥρ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὸ γινόμενον τῶν 45′ ἐπὶ 280 ἀναλύσαντες τὰ 45′ εἰς 30′ (ἥμισυ τῆς ὥρας) καὶ εἰς 15′ (ἥμισυ τῶν 30′)· ἤτοι ἀνελύσαμεν τὰ 45′ εἰς μέρη τῆς ὥρας ἁπλᾶ, τοιαῦτα δηλονότι, ὥστε νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκόλως, οἷον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ.).

Μένει ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 50″ ἐπὶ τὸν 280.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι

1′×280=280′=4ὥρ. 40′
ἄρα 30″×280= 2ὥρ. 20′ (διότι 30″ εἶνε $\frac{1}{2}$ τοῦ 1′)
καὶ 20″×280= 1ὥρ. 33′ 20″ (διότι 20″ = $\frac{1}{3}$ τοῦ 1′)
ἄρα 50″×280= 3ὥρ. 53′ 20″

Ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν πάντα τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, δὲν μένει ἄλλο ἢ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα.

12ὡρ. ×280=3360ὡρ.
45′ ×280= 210ὡρ.
50″ ×280= 3ὡρ. 53′ 20″

ἄρα τὸ γινόμενον εἶνε 3573ὡρ. 53′ 20″

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

		12ὡρ.	45′	50″
		280		
		960ωρ.		
		24		
45′	30′ δίδουσιν	140		
	15′ δίδουσιν	70		(1′ δίδει 4ὡρ. 40′)
50″	30″ δίδουσιν	2	20′	
	20″ δίδουσιν	1	33′	20″
	γινόμενον	3573ὡρ.	53′	20″

Παραδείγματα.

1)

	5στ.	27ὀκ.	300δρ.
	320		
	1600		
22ὀκ. $=\frac{1}{2}$ στατ.	160		
$5\frac{1}{2}$ ὀκ. $=\frac{1}{4}$ τῶν 22 ὀκ.	40		
	(1ὀκ. δίδει 320ὀκ. =7στ. 12ὀκ.)		
100δρ. $=\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς	1	36ὀκ.	
γινόμενον	1801στ.	36ὀκ.	

2)

	5δρ.	60λεπ.
	412	
	2060	
50λ. $=\frac{1}{2}$ δρ.	206	
10λ. $=\frac{1}{5}$ τῶν 50	41	20
	2307δρ.	20λ.

ΣΗΜ. Περισσότερα παραδείγματα ἰδὲ ἐν τῇ πρακτικῇ ἀριθμητικῇ.

3) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν καὶ ἐπὶ μικτόν.

246. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν συμμιγῆ 3ὥρ. 10′ 20″ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, πολλαπλασιάζω αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκω

15ὥρ. 50′ 100″·

ἔπειτα διαιρῶ τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκω

1ὥρ. 58′ 57″ $\frac{1}{2}$.

Τοῦτο δὲ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 169), διὰ νὰ πολλαπλασιάσω οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{5}{8}$, ἀρκεῖ νὰ λάβω τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ πεντάκις, ἢ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐνίοτε δύναται νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{7}{8}$, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ καὶ $\frac{1}{8}$· καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἕκαστον τούτων χωριστὰ (κατὰ τὸ ἐδ. 170).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{4}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{2}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου γινομένου· καὶ τέλος, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{1}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου γινομένου.

247. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα* (κατὰ τὸ ἐδ. 170).

4) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

248. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφο-*

μεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα (ἴδε ἐδ. 184).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ μικτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα (ἴδε ἐδ. 185).

Παρατήρησις.

Καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος εἶνε μερισμὸς πολλαπλασίου τινὸς τοῦ συμμιγοῦς· διὸ καὶ δίδει ἐξαγόμενον ὁμοειδὲς πρὸς τὸν συμμιγῆ διαιρετέον· διαφέρει δὲ τῆς μετρήσεως τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς, ἥτις καὶ αὐτὴ λέγεται διαίρεσις· περὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

5) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

249. *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς εἶνε* (κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδ. 169) *ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ πρὸς σχηματισμὸν ἄλλου συμμιγοῦς, ὅστις θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.*

Ὁ πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται τοσάκις, ὅσας μονάδας μιᾶς τάξεως ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς (τὴν μονάδα ταύτην ὁρίζει τὸ πρόβλημα)· δι' ἕκαστον δὲ μέρος τῆς μονάδος ταύτης, ὅπερ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής, λαμβάνεται τὸ ὁμώνυμον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου· ὥστε καὶ ἐνταῦθα, ὡς εἰς πάντα πολλαπλασιασμόν, τὸ μὲν γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἐξ οὗ ἀποτελεῖται, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί. Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Μία βρύσις δίδει καθ' ὥραν 120ὀκ. 150δρ. ὕδωρ, πόσον θὰ δώσῃ εἰς 15ὡρ. καὶ 20΄;

πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συμμιγὴς 120ὀκ. 150δρ. καὶ πρέπει νὰ ληφθῇ ὅλος 15 φορὰς (διότι κάθε ὥραν δίδει 120ὀκ. 150δρ.) καὶ τὸ ἑξηκοστὸν αὐτοῦ εἴκοσι φοράς, (διότι εἰς τὸ 1΄ δίδει τὸ ἑξηκοστὸν τῶν 120ὀκ. 150δρ.) ἑπομένως πολλαπλασιαστὴς εἶνε ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς $15\frac{20}{60}$ ἢ $15\frac{1}{3}$.

Εἰς δὲ τὸ ἑξῆς πρόβλημα

Βρύσις τις δίδει εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν 120ὀκ. 150δρ. ὕδωρ, πόσον θὰ δώσῃ εἰς 15ὡρ. 20΄;

ὁ πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ αὐτός· ἀλλ' ἐνταῦθα πρέπει νὰ ληφθῇ τ-

σας φοράς, ὅσα πρῶτα λεπτὰ ἔχει ὁ συμμιγὴς 15$^{ὥρ.}$ 20′, ἤτοι 920 φοράς· πολλαπλασιαστὴς ἄρα εἶνε ὁ ἀκέραιος 920.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ ἄλλον ἢ τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος (ἐκείνης, ἣν ὁρίζει τὸ πρόβλημα, δι' ἣν λαμβάνεται ὁλόκληρος ὁ πολλαπλασιαστέος) καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ἢ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς φαίνεται.

Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2$^{τάλ.}$ 3$^{δρ.}$ 50$^{λεπ.}$ πόσον ἀξίζουν 35$^{όκ.}$ 350$^{δρ.}$ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συμμιγὴς 2$^{τάλ.}$ 3$^{δρ.}$ 50$^{λεπ.}$, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 35$^{όκ.}$ 350$^{δρ.}$ $\left(\text{ἢ μᾶλλον ὁ ἀριθμὸς } 35\,\frac{350}{400}\right)$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς πολλαπλασιαστοῦ ὡς ἀριθμοὺς ὀκάδων, (διότι τῆς ὀκᾶς ἡ ἀξία ἐδόθη), θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2$^{τ.}$ 35$^{δρ.}$ 50$^{λ.}$ ἐπὶ τὸν μικτὸν 35 $\frac{350}{400}$ ἢ 35 $\frac{7}{8}$.

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον ὡς ἑξῆς.

		2$^{τάλ.}$	3$^{δρ.}$	50$^{λ.}$
		35$^{όκ.}$	350$^{δραμ.}$	
ἀξία τῶν 35$^{οκάδ.}$	πρὸς 2$^{τάλ.}$	70$^{τάλ.}$		
	πρὸς 2 $\frac{1}{2}$ δρ. $=\frac{1}{2}$ ταλ.	17	2$^{δρ.}$	50$^{λ.}$
	πρὸς 1$^{δρ.}$ $=\frac{1}{5}$ ταλ.	7		
ἀξία τῶν 350$^{δραμ.}$	τῶν 200 $=\frac{1}{2}$ ὀκ.	1	1	75
	τῶν 100	0	3	37 $\frac{1}{2}$
	τῶν 50	0	1	68 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
		96$^{ταλ.}$	4$^{δρ.}$	31^{λ} $\frac{1}{4}$

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 35 ὀκ. πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 35 (κατὰ τὸ ἐδ. 245)· ἔπειτα, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 350$^{δράμ.}$ ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 200 ($=\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς) καὶ 100 ($=\frac{1}{2}$ τῶν 200) καὶ 50 ($=\frac{1}{2}$ τῶν 100) καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων χωριστά, ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν ἐκ τῆς ἀξίας τῆς μιᾶς ὀκᾶς.

Ἔστω προσέτι τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις $35^{\text{όκ.}}$ $350^{\text{δρ.}}$ ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ $2^{\text{τάλ.}}$ $3^{\text{δρ.}}$ $50^{\text{λεπ.}}$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συμμιγὴς $35^{\text{όκ.}}$ $350^{\text{δράμ.}}$, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς $2^{\text{τάλ.}}$ $3^{\text{δραχ.}}$ $50^{\text{λεπτ.}}$ $\left(\text{ἢ } 2 + \frac{3}{5} + \frac{50}{500} \text{ τοῦ ταλ.} \right)$:

		$35^{\text{όκ.}}$	$350^{\text{δρ.}}$	
		$2^{\text{τάλ.}}$	$3^{\text{δρ.}}$	$50^{\text{λ.}}$
μὲ $2^{\text{τάλ.}}$ ἀγοράζει τις	ἀπὸ $35^{\text{όκ.}}$	$70^{\text{όκ.}}$		
	ἀπὸ $200^{\text{δρ.}}$	1		
	ἀπὸ $100^{\text{δρ.}}$	0,	$200^{\text{δρ.}}$	
	ἀπὸ $50^{\text{δρ.}}$	0,	$100^{\text{δρ.}}$	
μὲ $2\frac{1}{2}$ δρ. $= \frac{1}{2}$ ταλ. ἀγοράζει τις		17	375	
μὲ 1 δρ. $= \frac{1}{5}$ ταλ. ἀγοράζει τις		7	70	
	Τὸ ὅλον	$96^{\text{όκ.}}$	$345^{\text{δρ.}}$	

Παρατήρησις.

Εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα ταῦτα οἱ παράγοντες εἶνε οἱ αὐτοί, ἐν τούτοις τὰ γινόμενα διαφέρουσι κατὰ τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων τάξεων. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς συμβαίνει τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἂν τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ συμμιγεῖς εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς (ὁ μὲν εἰς εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, ὁ δὲ ἄλλος εἰς ἀριθμὸν ταλλήρων), τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶνε ὁ αὐτὸς ἀριθμός, οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστέος. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ εἶνε ἀριθμὸς ταλλήρων, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀριθμὸς ὀκάδων. Διὰ τοῦτο τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου θὰ εἶνε τὸ αὐτὸ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις· ἀλλὰ τὸ μένον κλάσμα, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θὰ τραπῇ εἰς δραχμὰς καὶ λεπτά, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ εἰς δράμια· ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ ταλλήρου εἶνε διάφοροι τῶν τῆς ὀκᾶς, θὰ προκύψωσι διάφορα ἐξαγόμενα.

250. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ ὑπάγεται ὡς μερικὴ περίπτωσις ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου συγκεκριμένου

ἐπὶ συμμιγῆ· διότι ὁ συγκεκριμένος ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμιγὴς ἔχων μίαν μόνην τάξιν μονάδων.

Τοιοῦτον εἶνε τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἐργάτης λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας 5 δραχμάς· πόσον θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ $7^{\text{ὡρ.}}\ 40'$;

		$5^{\text{δρ.}}$	
		$7^{\text{ὡρ.}}$	$40'$
διὰ τὰς $7^{\text{ὡρ.}}$		$35^{\text{δρ.}}$	
διὰ τὰ $40'$	διὰ $30' = \frac{1}{2}$ ὡρ.......	$2^{\text{δρ.}}$	$50^{\lambda.}$
	διὰ $10' = \frac{1}{3}$ τῶν $30'$	0	$83\ \frac{1}{3}$
	Τὸ ὅλον	$38^{\text{δρ.}}$	$33\ \frac{1}{3}$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑπάρχουσι προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ πολλαπλασιασθῇ συμμιγής τις (ἐν γένει συγκεκριμένος ἀριθμὸς) ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους· ἕκαστος τῶν μερικῶν τούτων πολλαπλασιασμῶν ἐκτελεῖται τοτε κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα· τοιοῦτον εἶνε λόγου χάριν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἡ διὰ τοῦ σιδηροδρόμου μεταφορὰ ἑνὸς στατῆρος εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου στοιχίζει 5 λεπτὰ (ἢ 1 λεπτὸν) τῆς δραχμῆς· πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ $20^{\sigma\tau.}\ 33^{\text{ὀκ.}}$ εἰς ἀπόστασιν 12 σταδίων καὶ 500 μέτρων;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου εὑρίσκομεν πρῶτον, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ τῶν $20^{\sigma\tau.}\ 33^{\text{ὀκ.}}$ εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου· καὶ ἔπειτα, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ αὐτῶν εἰς ἀπόστασιν $12^{\sigma\tau\delta.}$ καὶ $500^{\mu.}$ καὶ τὸ μὲν πρῶτον θὰ εὑρεθῇ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν συγκεκριμένον ἀριθμὸν $5^{\lambda.}$ (ἢ $1^{\lambda.}$) ἐπὶ τὸν συμμιγῆ $20^{\sigma\tau.}\ 33^{\text{ὀκ.}}$, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον $103^{\lambda.}\ \frac{3}{4}$ $\left(\text{ἢ } 20\ \frac{3}{4}\right)$, τὸ δὲ δεύτερον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν συμμιγῆ $12^{\sigma\tau\delta.}\ 500^{\mu\acute{\epsilon}\tau.}$ ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον $12^{\text{δρ.}}\ 96^{\lambda.}\ \frac{7}{8}$ ἢ $\left(2^{\text{δρ.}}\ 59\ \frac{3}{8}\right)$. Ἔχομεν λοιπὸν ἐνταῦθα γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐξ ὧν πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς $5^{\lambda.}$ (ἢ $1^{\lambda.}$), οἱ δὲ δύο ἄλλοι εἶνε πολλαπλασιασταί.

6) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

Ἐν ἑκάστῳ προβλήματι λυομένῳ διὰ τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς δι' ἄλλου ὁ εἷς ἐκ τῶν δοθέντων συμμιγῶν (ὁ διαιρετέος) θὰ εἶνε γινόμενον τοῦ ἄλλου (τοῦ διαιρέτου) καὶ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (τοῦ πηλίκου)· ἐπειδὴ δὲ ὁ ζητούμενος οὗτος ἀριθμὸς δύναται ἐν τῷ γινομένῳ νὰ εἶνε ἢ πολλαπλασιαστέος ἢ πολλαπλασιαστής, διακρίνομεν δύο εἰδῶν προβλήματα διαιρέσεως.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους (μερισμός).

Ἐν τοῖς προβλήμασι τοῦ πρώτου εἴδους *ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα τῶν δοθέντων παράγει τὸν ἄλλον.*

Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ εἶνε διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

Παράδειγμα προβλήματος τοῦ πρώτου εἴδους ἔστω τὸ ἑξῆς.

$3^{στ.}$ $18^{οκ.}$ $300^{δρ.}$ ἐξ ἑνὸς πράγματος ἐπωλήθησαν $58^{δρ.}$ $60^{λ.}$ πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ στατήρ;

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τουτέστιν ἡ τιμὴ ἑκάστου στατῆρος, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συμμιγῆ $3^{στ.}$ $18^{οκ.}$ $300^{δρ.}$, θὰ δώσῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν $58^{δρ.}$ $60^{λ.}$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου τρέπομεν τὸν διαιρέτην $3^{στ.}$ $18^{οκ.}$ $300^{δρ.}$ εἰς ἀριθμὸν στατήρων (διότι τοῦ στατῆρος ἡ ἀξία ζητεῖται) καὶ εὑρίσκομεν $3\frac{75}{176}$ τοῦ στατῆρος ἢ $\frac{603}{176}$ τοῦ στατῆρος. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς: « $\frac{603}{176}$ τοῦ στατῆρος ἐπωλήθησαν $58^{δραχ.}$ $60^{λεπ.}$ πόσον ἐπωλήθη ὁ εἷς στατήρ;» ἡ ἀξία τοῦ $\frac{1}{176}$ τοῦ στατῆρος θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν μερίσωμεν τὰς $58^{δρ.}$ $60^{λ.}$ εἰς 603 ἴσα μέρη· καὶ ἡ ἀξία ἑνὸς στατῆρος θὰ εὑρεθῇ, ἂν λάβωμεν 176 φορὰς τὸ μερίδιον τοῦτο· ἤτοι ἂν διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ $58^{δραχ.}$ $60^{λεπ.}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{603}{176}$ (ἴδ. 248).

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην εἰς

ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος (ἣν ὁρίζει τὸ πρόβλημα) καὶ διὰ τούτου νὰ διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ πρᾶξις γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἤτοι ἔχῃ μόνον μίαν τάξιν μονάδων. Ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ πρᾶξις καταντᾷ μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἴσα μέρη (ἰδ. 243), διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους λέγω προβλήματα μερισμοῦ.

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους (μέτρησις).

Ἐν τοῖς προβλήμασι τοῦ δευτέρου εἴδους *ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν ἕνα ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν νὰ παράγῃ τὸν ἄλλον*. Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ διαιρέτου· ἐπομένως εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

Παράδειγμα προβλήματος τοῦ δευτέρου εἴδους ἔστω τὸ ἑξῆς.

Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ἡμέραν 4δρ. 30λ. εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 389δρ. 15λ. ;

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν συμμιγῆ 4δρ. 30λ., πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 389δρ. 15λ.

Ἐὰν τρέψωμεν ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς λεπτά, τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς.

Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 430λεπ., εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ 38915λεπ. ;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι τόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 38915 τὸν 430, ἡ πρᾶξις ἄρα εἶνε μέτρησις καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶνε ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς $\frac{38915}{430}$, ὅστις ἐνταῦθα, καθ' ἃ ὁρίζει τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ παριστᾷ ἡμέρας· ἐὰν δὲ τρέψωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἰς ἡμέρας καὶ μέρος αὐτῆς εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐργασθῇ 90ἡμ. καὶ 6ὡρ.

Ἐκ τούτων, βλέπομεν, ὅτι

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, ὅταν εἶνε ὁμοειδεῖς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀριθμοὺς τῆς ἐλαχίστης ἐκ τῶν μονάδων των (ὅτε γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί), καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους· τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μερικαὶ περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε ἡ

Τὸ κλάσμα $\frac{α}{β}$ εἶνε ἀνάγωγον· ἤτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν $α^2$ καὶ $β^2$ δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην (ἐδ. 128)· ὅθεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{α^2}{β^2}$ θὰ εἶνε ἀνάγωγον καὶ ἑπομένως εἶνε ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ὁ παρονομαστής του τὸν ἀριθμητήν του· ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{α^2}{β^2}$ δὲν δύναται νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 10· ἄρα ὁ 10 δὲν εἶνε τετράγωνον οὐδενὸς κλάσματος.

Παρατήρησις.

256. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν εἶνε τετράγωνον ἢ ὄχι (ἐδ. 123).

Ἀλλὰ καὶ δι' ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν, ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶνε τετράγωνον· τοιαῦτα εἶνε τὰ ἑξῆς δύο.

1) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων

2, 3, 7, 8,

δὲν εἶνε τετράγωνον.

Διότι ἐκ τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου ψηφίου του· π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 47 λήγει εἰς τὸ ψηφίον 9, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 7.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δὲν λήγουσιν εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8, συμπεραίνομεν, ὅτι οὐδὲν τετράγωνον λήγει εἴς τι τῶν ψηφίων τούτων.

2) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν (ὡς οἱ 50, 15000, κτλ.), *δὲν εἶνε τετράγωνον.*

Διότι, ἂν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶνε τετράγωνον ἄλλου, ὁ ἄλλος οὗτος θὰ λήγῃ εἰς 0· ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς διπλάσια μηδενικά, ἤτοι θὰ λήγῃ εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν (κατὰ τὸ ἐδ. 38)· ὥστε ὁ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις λήγει εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον ἄλλου.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ἂν κλάσμα τι εἶνε τετράγωνον ἢ ὄχι, ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

257. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον, ἐκτὸς ἂν ἑκάτερος τῶν ὅρων του εἶνε τετράγωνον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κλάσμα ἀνάγωγον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$· ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο εἶνε τετράγωνον, θὰ εἶνε τετράγωνον κλάσματος καὶ ὄχι ἀκεραίου, διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός· ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε τετράγωνον κλάσματός τινος $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπερ ὑποθέτω ἀνάγωγον, τότε θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu}{\nu}\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εἶνε ἀνάγωγον, καὶ τὸ $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ θὰ εἶνε ἀνάγωγον (ἰδ. 128)· ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε ἀνάγωγον· ὅταν δὲ δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶνε ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶνε χωριστὰ ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ἴσοι (ἰδ. 154)· ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶνε

$\alpha=\mu^2$ καὶ $\beta=\nu^2$. Τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον χωρὶς νὰ εἶνε οἱ ὅροι του. Π. χ. τὸ κλάσμα

$$\frac{2}{8}\left(=\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ καὶ τὸ } \frac{8}{50}\left(=\frac{4}{25}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶνε τετράγωνα ἄλλων, λέγονται *τέλεια τετράγωνα*· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 49 $(=7^2)$, $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{16}{25}$, εἶνε τέλεια τετράγωνα.

Ὁρισμοί.

258. *Τετραγωνικὴ ῥίζα* ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν τετράγωνον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 81 εἶνε ὁ 9· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶνε 81· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{25}{36}$ εἶνε τὸ $\frac{5}{6}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{5}{6}$ εἶνε $\frac{25}{36}$, κτλ.

Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\ }$, τὸ ὁποῖον λέγεται *ῥιζικόν*· οἷον $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 49, ἤγουν τὸ 7, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{1}{4}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$.

259. *Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος· οἷον τοῦ 58 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 7· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶνε 49 (καὶ χωρεῖ εἰς τὸν 58) τοῦ δὲ 8 εἶνε 64, τουτέστι μεγαλήτερον τοῦ 58. Ὁμοίως τοῦ 17 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 4, καὶ τοῦ 17 $\frac{1}{3}$ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὡσαύτως ὁ 4· τοῦ δὲ 25 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 5.

260. Τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ λέγεται, ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸ ν, τὸ μέγιστον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Π. χ., ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶνε $\frac{14}{10}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{196}{100}$, χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 2, διότι εἶνε $\frac{225}{100}$ ἢ 2,25.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

261. *Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ῥίζαν αὐτοῦ, ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνόν), ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Κατὰ πρῶτον θὰ μάθωμεν, πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνον, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἂν δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάγονται, ὡς θὰ ἴδωμεν, καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

262. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ (ἢ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος), θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶνε μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δ' αὐτὴν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ

τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ... των τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνική ... $7 \times 7 = 49$. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 ... εἶνε ὁ 5· διότι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (ἤτοι ...) ... θέντα ἀριθμὸν καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 10· ... ἀμέσως μεγαλητέρου ἀκεραίου (τοῦ 6) δὲν χωρεῖ.

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ ... ῥίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ προσεγγίζουσα), θὰ ... τοῦ 10· ἤτοι θὰ ἔχῃ δεκάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ... ἔχομεν ἀνάγκην τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

263. *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ... τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε $\alpha+\beta$· τὸ δὲ τετράγωνον τούτου θὰ εἶνε τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta), \text{ ἢ } (\alpha+\beta)^2.$$

τὸ γινόμενον τοῦτο, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 50, σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς τεσσάρων μερικῶν γινομένων

$$\alpha\times\alpha, \quad \alpha\times\beta \quad \beta\times\alpha, \quad \beta\times\beta$$

ἢ

$$\alpha^2 \quad \alpha\times\beta \quad \alpha\times\beta \quad \beta^2$$

καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε

$$\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$$

Παραδείγματα.

Τὸ 11 εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν 10 καὶ 1· τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 11 σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 10 (ὅπερ εἶνε 100) καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1 (ἤτοι 1) καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δύο μερῶν (ἢ $2\times10\times1$) ὥστε $11^2=100+1+20=121$.

Ὁμοίως τὸ τετράγωνον τοῦ 12 (ἢ $10+2$) σύγκειται ἐκ τοῦ 100 καὶ ἐκ τοῦ 4 καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ 20, ἤτοι εἶνε 144.

Καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 102 (ὅπερ 102 εἶνε ἄθροισμα τοῦ 100 καὶ τοῦ 2) εἶνε ἴσον τῷ $100^2+2^2+400=10000+404=10404$.

Πόρισμα.

264. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ μονάδα, τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι, ἂν ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ μεγαλήτερος θὰ εἶνε $α+1$, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶνε,

τοῦ μὲν μικροτέρου $α^2$

τοῦ δὲ μεγαλητέρου $(α+1)^2$ ἤτοι $α^2+2α+1$

διαφέρουσι δὲ ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο ταῦτα τετράγωνα κατὰ $2α+1$, τουτέστι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ $α+1$.

265. Δυνάμεθα τώρα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ· (τὴν ἀκριβῆ, ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνον, εἰ δὲ μή, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος).

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 3854· πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὸν 100, ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 10· ἄρα θὰ σύγκειται ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ· καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δ δεκάδες, (ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ $δ\times10$) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων μ· τουτέστι

$$δ\times10+μ.$$

Τὸ δὲ τετράγωνον αὐτῆς, (τὸ ὁποῖον θὰ χωρῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμός), θὰ σύγκειται (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα)

1) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων (τουτέστιν ἐκ τοῦ $(δ\times10)\times(δ\times10)$ ἤτοι $δ^2\times100$).

2) Ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας (ἤτοι ἐκ τοῦ $2\times δ\times10\times μ$).

3) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων (ἤτοι $μ^2$).

Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854, ὡς περιέχων τὸ τετράγωνον τῆς ῥίζης του, θὰ σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν τούτων μερῶν καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου, (ἂν δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον)· τουτέστιν εἶνε

$$3854=δ^2\times100+2\times δ\times10\times μ+μ^2+υ \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν μερῶν τούτων αἱ δ^2 ἑκατοντάδες δὲν δύνανται νὰ περιέχωνται ἢ εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ· ἀλλὰ τὸ μέγιστον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ 38 εἶνε τὸ 36· ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶνε 36 καὶ ἑπομένως $\delta=6$· (ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854 περιέχεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῶν 6 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 3600, καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν 7 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 4900· ὥστε ἡ ῥίζα του δὲν δύναται νὰ ἔχῃ 7 δεκάδας). Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι

Αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκονται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων του.

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ($\delta=6$), μένει ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας μ· πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) τὰς 36 ἑκατοντάδας καὶ εὑρίσκομεν

$$254=2\times6\times10\times\mu+\mu^2+\upsilon \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸν 254, ὁ πρῶτος εἶνε δεκάδες ($12\times\mu$ δεκάδες)· ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχηται ἢ μόνον εἰς τὰς 25 δεκάδας· ἀλλ' εἰς τὰς 25 ταύτας δεκάδας περιέχονται καὶ αἱ δεκάδες τοῦ ὑπολοίπου υ (ἂν ἔχῃ) καὶ αἱ δεκάδες τοῦ τετραγώνου μ^2 (ἂν ἔχῃ)· ὥστε θὰ εἶνε

$$25\geqq12\times\mu.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *τὸ ψηφίον μ τῶν μονάδων δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰς 25 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου 254 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης.*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 2, δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 2. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸν 254 πρέπει νὰ περιέχηται τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν 6 δεκάδων ἐπὶ τὰς 2 μονάδας, ἤτοι τὸ γινόμενον 120×2, καὶ τὸ τετράγωνον τῶν 2 μονάδων, ἤτοι τὸ 2×2 ὥστε πρέπει νὰ περιέχηται τὸ γινόμενον 122×2· τοῦ γινομένου δὲ τούτου ὁ μὲν εἷς παράγων εἶνε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2, ὁ δὲ ἄλλος σχηματίζεται, ἂν διπλασιάσωμεν τὰς εὑρεθείσας 6 δεκάδας καὶ δεξιὰ τοῦ διπλασίου αὐτῶν γράψωμεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε 244 καὶ περιέχεται ἀληθῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν 254· ἀφαιροῦντες δὲ αὐτὸ ἀπὸ τούτου εὑρίσκομεν τέλος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, τὸ 10.

Ὥστε εὑρέθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3854 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶνε δὲ ὁ ἀριθμὸς 62.

Διάταξις τῆς πράξεως.

```
38'54    | 62
36       |----
-----      122
 25'4        2
 24 4      ---
-----      244
   10
```

Ὁμοίως ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου. Διότι ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς

58742

Κατὰ τὰ προηγούμενα αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης του θὰ εὑρεθῶσιν, ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 587 ἑκατοντάδων του· ἡ δὲ ῥί
τοῦ 587 εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω

```
5'87     | 24
4        |----
-----       44
18'7         4
 176       ---
-----      176
  11
```

καὶ εἶνε 24· ὥστε αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τοῦ 58742 εἶνε 24· μένει ἀκό
πρὸς εὕρεσιν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· τοῦτο δὲ (κατὰ τὰ προαποδι
χθέντα) δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομ
διαιροῦντες διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων (ἤτοι διὰ τοῦ 48) τὰς δεκ
δας τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ με
τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν 24 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἰ
11 ἑκατοντάδες (αἵτινες ἔμειναν ἐκ τῶν 587 ἑκατοντάδων, ἀφ' ὧν ἀφ
ρέσαμεν τὸ τετράγωνον τῶν 24 δεκάδων) καὶ 42 μονάδες, ἤτοι εἰ
1142. Διαιροῦντες τὰς 114 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τ
48, εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον 2, ὅπερ γράφομεν δεξιὰ τοῦ 48 καὶ ὑποκάτ
αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν· ἐπειδὴ δὲ τὸ προκύπτον γινόμενον 96
περιέχεται εἰς τὸ ὑπόλοιπον 1142, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ψηφίον τ
μονάδων εἶνε 2· ἀφαιροῦντες τέλος τὸ γινόμενον 964 ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπ
1142, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 178.

Διάταξις τῆς πράξεως.

5'87'42	242	
4	44	482
187	4	2
176	176	964
1142		
964		
178		

Ὥστε ἐξήχθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 58742 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶνε δὲ ὁ 242.

266. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς, ἂν εἶνε τετράγωνος, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος), *χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δύναται νὰ εἶνε διψήφιον ἢ μονοψήφιον· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶνε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη, καὶ δεξιὰ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ἀριθμός τις· τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης.*

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ (οὗ τὰς δεκάδας διηρέσαμεν), *τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ πρώτου· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, οὗ τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρῆται· τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης· καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, σχηματίζεται δεύτερός τις ἀριθμός.*

Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς ῥίζης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ δευτέρου σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶνε τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ καταβιβασθῶσι πάντα τὰ διψήφια τμήματα. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον θὰ εἶνε τὸ τελευταῖον τῆς ῥίζης ψηφίον· τὸ δὲ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον θὰ εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε τέλειον τετράγωνον καὶ εὑρέθη ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἀκριβῶς· εἰ δὲ μή, εὑρέθη κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παραδείγματα.

16'81'72	410	
16	81	820
0 81	1	
81	81	
0 72		

9'36'36	306
9	606
0 36 36	6
36 36	3636
0	

8'48	29
4	49
44'8	9
44 1	441
7	

Παρατηρήσεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ῥίζης εἶνε ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ ἀριθμός. Διὰ τοῦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶνε ἄρτιον), ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἓν ἔτι προσλαβόντων (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶνε περιττόν).

2) Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον κτλ. ψηφίον τῆς ῥίζης, νὰ διδῃ

πηλίκον μεγαλήτερον τοῦ 9. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9· (τοῦτο συνέβη εἰς τὸν ἀριθμὸν 848).

3) Δυνατὸν ἐπίσης νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν προειρημένων διαιρέσεων νὰ δίδῃ πηλίκον 0 (ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 93636)· τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶνε 0· γράφομεν δὲ αὐτὸ δεξιὰ τῶν ἄλλων καὶ καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἑπόμενον τμῆμα ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης. Ἂν λόγου χάριν εὑρέθη ῥίζα ὁ ἀριθμὸς 62, τὸ ὑπόλοιπον δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν 124· διότι, ἂν ἔμενεν ὑπόλοιπον 125, ἢ μεγαλήτερον τούτου, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ περιεῖχε τὸ τετράγωνον τοῦ 62 καὶ τὸ ἄθροισμα $62+63$· ἄρα θὰ περιεῖχε καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλητέρου ἀριθμοῦ (τοῦ 63)· ὅπερ εἶνε $62^2+62+63$· (κατὰ τὸ πόρισμα 264). Ἐπομένως δὲν θὰ ἦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁ 62, ἀλλ' ὁ 63, ἢ καὶ ἄλλος μεγαλήτερος ἀριθμός.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

267. *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶνε ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.*

Ἔστω, ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς $42\frac{2}{5}$· τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, θὰ περιέχηται προδήλως εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος του, ἤτοι εἰς τὸ 42· τοῦτο δὲ εἶνε τὸ 36· ἄρα 6 εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀμφοτέρων κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ὁμοίως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 142,75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ ῥίζα τοῦ 142, ἤτοι τὸ 11, καὶ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ $\frac{1500}{8}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 187, ἤτοι ὁ 13.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

268. Ἡ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγ. ῥίζης ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ῥίζ ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶ σμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τράγωνον χωρεῖ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α· ἔστω τοιοῦτο τὸ $\frac{\rho}{\nu}$, ἤτοι

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 \leqq A \qquad \text{ἀλλὰ} \qquad \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^2 > A$$

ἢ

$$\frac{\rho^2}{\nu^2} \leqq A \qquad \text{ἀλλὰ} \qquad \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2} > A$$

Ἐκ τούτου ἕπεται $\rho^2 \leqq A \times \nu^2$, ἀλλὰ $(\rho+1)^2 > A \times \nu^2$.

Αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ρ εἶνε ὁ μέ ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $A \times \nu^2$· του ὁ ρ εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $A \times \nu^2$ κατὰ προσέγγισιν μονά

269. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον ἤτοι ἐπὶ ν^2, καὶ ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ γινομένου (Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν δὲ ῥίζαν ταύτην διαιροῦμεν διὰ

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ ῥίζαν τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἤτοι ἐπὶ 25 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 50· τούτου ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ εἶνε 7· τὴν ῥίζαν ταύτην ροῦμεν διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{7}{5}$. Αὕτη δὲ εἶνε ἡ τετραγωνικ τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ σματος $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{60}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ 6 εὑρίσκομεν γινόμενον $60^2 \times \frac{2}{3}$ ἢ $60 \times 20 \times 2$ τουτέστι 2400 νομένου τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν δος, ὅτε εὑρίσκομεν 48· διαιροῦμεν τέλος αὐτὴν διὰ τοῦ 60 καὶ ὁ

εὑρισκόμενος ἀριθμὸς $\frac{48}{60}$ ἢ $\frac{4}{5}$ εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{60}$.

Ἂν τέλος ζητῆται ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, πολλαπλασιάζομεν: $5,1\times12^2$ καὶ εὑρίσκομεν $5\times144+\frac{1}{10}\times144=720+14,4$ ἢ 734,4· τοῦ γινομένου τούτου λαμβάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος (ἰδ. 277) τὸ 734, καὶ τούτου ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 27· ὥστε ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$ εἶνε $\frac{27}{12}$, ἢ $2\frac{1}{4}$.

Συνήθως τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως ἔχει παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 10· ζητεῖται δηλονότι νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\sigma}}$· τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου κανόνος γίνεται εὐκολωτέρα· διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ A ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ 10^{σ}, ἤτοι ἐπὶ τὸ $10^{\sigma}\times10^{\sigma}$ ἢ $10^{2\sigma}$ γίνεται εὐκολώτατα.

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10000, ἤτοι γράφω δεξιὰ τοῦ 2 ὀκτὼ μηδενικὰ καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 200000000 ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 14142· τὴν ῥίζαν ταύτην διαιρῶ διὰ 10000 καὶ ἔχω 1,4142, ἥτις εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$.

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸ $\frac{12}{7}$ ἐπὶ 1000^2 καὶ τοῦ γινομένου $\frac{12}{7}\times1000^2$ λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶνε 1714285 καὶ ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ὅτε εὑρίσκω 1309· διαιρῶ ἔπειτα τὴν ῥίζαν ταύτην διὰ 1000 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1,309 εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου $\frac{12}{7} \times 1000^2$, τρέπω τὸ κλάσμα $\frac{12}{7}$ εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα μεταθέτω τὴν ὑποδιαστολὴν 6 θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, παραλείπω δὲ πάντα τὰ μετ' αὐτὴν ψηφία.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 18,65924467 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100^2, ἤτοι ἐπὶ 10000 καὶ εὑρίσκω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου, ὅπερ εἶνε 186592· τούτου ἐξάγω τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὑρίσκω 431· διαιρῶ τὴν ρίζαν ταύτην δι' 100 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 4,31 εἶνε ἡ τετρ. ρίζα τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,000068 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ εἶνε 0,008.

Παρατήρησις.

270. Ἂν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετρ. ρίζα, εἶνε τέλειον τετράγωνον (καὶ τοιοῦτος γίνεται πάντοτε, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του), παραλείπομεν αὐτόν, ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ ἀκριβῶς ἂν εἶνε δυνατόν, ἢ κατὰ προσέγγισιν, καὶ ταύτην διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ παρονομαστοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ζητῆται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{2}{3}$, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς: $\frac{6}{9}$, ἐξάγομεν τὴν ρίζαν τοῦ 6 κατὰ προσέγγισίν τινα, ἔστω $\frac{1}{100}$, καὶ εὑρίσκομεν 2,44· διαιροῦντες δ' αὐτὴν διὰ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 9, ἤτοι διὰ 3, εὑρίσκομεν 0,81.

Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ὅροι τετράγωνα τέλεια, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλάσματος εὑρίσκεται ἀκριβῶς· ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ ἡ τετρ. ρίζα καὶ τῶν δύο ὅρων· π.χ. ἡ τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{4}{25}$ εἶνε $\frac{2}{5}$· τοῦ δὲ 0,0016 εἶνε 0,04.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶνε 2· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε ἄρτιον· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1, 4, 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε περιττόν.

2) Ἐὰν κλάσμα τι εἶνε τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶνε ἐπίσης τέλειον τετράγωνον· καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει.

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε τετράγωνον, ἂν μὲν εἶνε ἀνάγωγον, θὰ εἶνε $\alpha=\mu^2$, $\beta=\nu^2$ (ἐδ. 257)· ἄρα καὶ $\alpha\times\beta=\mu^2\times\nu^2=(\mu\times\nu)^2$· ἂν δὲ ἔχωσιν οἱ ὅροι του κοινόν τινα διαιρέτην δ, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τούτου θὰ γίνωσιν ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα, ὥστε θὰ εἶνε

$$\alpha=\mu^2\times\delta,\ \text{καὶ}\ \beta=\nu^2\times\delta$$

ἄρα καὶ
$$\alpha\times\beta=\mu^2\times\nu^2\times\delta^2=(\mu\times\nu\times\delta)^2.$$

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων $\alpha\times\beta$ εἶνε ἴσον τῷ τετραγώνῳ ρ^2, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶνε τέλειον τετράγωνον· διότι εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\beta}{\beta\times\beta}=\frac{\rho^2}{\beta^2}=\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2.$$

3) Παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Διότι πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶνε τῆς μορφῆς $2\nu+1$ (ἔνθα ν δηλοῖ ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν)· ἐπομένως τὸ τετράγωνόν του εἶνε $4\times\nu^2+4\times\nu+1$· ἢ $4\nu\times(\nu+1)+1$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν ν καὶ $\nu+1$ ὁ ἕτερος εἶνε πάντοτε ἄρτιος, τὸ γινόμενον $4\nu\times(\nu+1)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

4) Πᾶς περιττὸς ἀριθμός, ὅστις εἶνε ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶνε πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Ἡ πρότασις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι, ὅταν τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν ἔχωσιν ἄθροισμα περιττὸν ἀριθμόν, ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε ἄρτιος, ὁ δὲ ἄλλος περιττός.

5) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν οὐδέτερος εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, εἶνε πάντοτε διαιρετὴ διὰ 3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

ΠΕΡΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὁρισμοί.

271. *Κύβος ἀριθμοῦ, ἡ τρίτη δύναμις αὐτοῦ*, λέγεται τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Παραδείγματος χάριν, ὁ κύβος τοῦ 5 εἶνε 5×5×5, ἤτοι 125, καὶ ὁ κύβος τοῦ 1,2 εἶνε 1,2×1,2×1,2 ἤτοι 1,728.

Οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10) εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ ἑξῆς·

ἀριθμοὶ	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10·
κύβοι	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύνανται νὰ λήγωσιν εἰς οἱονδήποτε ψηφίον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

272. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶνε κύβος ἀκεραίου τινός, δὲν εἶνε οὐδὲ κλάσματος κύβος.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει γενικῶς περὶ πάσης δυνάμεως· ἀποδεικνύεται δὲ ἀπαραλλάκτως, ὡς ἀπεδείχθη διὰ τὴν δευτέραν δύναμιν (ἐδ. 255).

Παρατήρησις.

273. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, διακρίνομεν ἀμέσως, ἂν εἶνε κύβος ἢ ὄχι (ἐδ. 123). Ἀλλὰ καὶ ἐξ ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν, ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶνε κύβος· τοιοῦτον εἶνε τὸ ἑξῆς·

Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς μηδενικά, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος δὲν διαιρεῖται διὰ 3, ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶνε κύβος.

Διότι, ἂν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶνε κύβος ἄλλου, ὁ ἄλλος οὗτος θὰ λήγῃ εἰς 0· ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν μηδενικὸν (ὡς 60,170), ὁ κύβος του λήγει εἰς τρία μηδενικά· ὅταν ὁ ἀριθμὸς λήγῃ εἰς δύο μηδενικά, ὁ κύβος του λήγει εἰς ἓξ μηδενικά, κτλ. ὥστε πᾶς ἀριθμός, ὅστις λήγει εἰς πλῆθος μηδενικῶν μὴ διαιρούμενον διὰ 3, δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ἂν δοθέν τι κλάσμα εἶνε κύβος ἢ ὄχι, ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

274. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος, ἐκτὸς ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων του εἶνε κύβος.*

Τὸ θεώρημα ἀληθεύει γενικῶς περὶ πάσης δυνάμεως καὶ ἀποδεικνύεται ἀπαράλλακτα, ὡς ἀπεδείχθη διὰ τὴν δευτέραν δύναμιν (ἐδ. 257).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶνε κύβος, χωρὶς νὰ εἶνε οἱ ὅροι του.π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{16}$ εἶνε κύβος τοῦ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{3}{18}$ εἶνε κύβος τοῦ $\frac{1}{3}$ κτλ.

Ὁρισμοί.

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶνε κύβοι ἄλλων, λέγονται *τέλειοι κύβοι.*

275. *Κυβικὴ ῥίζα* ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν κύβον. Παραδείγματος χάριν, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 27 εἶνε ὁ 3· διότι $27=3^3$· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125 εἶνε ὁ 5· διότι $125=5^3$· καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 0,008 εἶνε 0,2· διότι $0,008=(0,2)^3$.

Τὴν κυβικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt[3]{}$, οἷον $\sqrt[3]{27}$ σημαίνει τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 27, ἤτοι τὸν 3, καὶ $\sqrt[3]{1000}$ σημαίνει τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 1000, ἤτοι τὸν 10.

276. *Κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Οἷον τοῦ 42 κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 3· διότι ὁ 42 χωρεῖ μὲν τὸν κύβον τοῦ 3 (ἤτοι τὸν 27), ἀλλὰ δὲν χωρεῖ τὸν κύβον τοῦ 4 (ὅστις εἶνε 64). Ὁμοίως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 4, καὶ τοῦ 125 ἡ κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 5 (ἤτοι ἡ ἀκριβὴς αὐτοῦ κυβικὴ ῥίζα).

277. *Κυβικὴ δὲ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν ν. τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Παραδείγματος χάριν ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶνε

1, 2· διότι ὁ 2 χωρεῖ μὲν τὸν κύβον τοῦ $\frac{12}{10}$ (ὅστις εἶνε 1,728), ἀλλὰ δὲν χωρεῖ τὸν κύβον τοῦ $\frac{13}{10}$ (διότι οὗτος εἶνε 2,197).

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης.

278. *Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶνε τέλειος κύβος), ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Κατὰ πρῶτον θὰ μάθωμεν, πῶς ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα δοθέντος ἀκεραίου, ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶνε τέλειος κύβος, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἂν δὲν εἶνε τοιοῦτος. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγονται καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

279. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος), θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 1000, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10 (διότι $10^3=1000$)· ἄρα θὰ εἶνε μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δὲ αὐτὴν εὐκόλως.

Παραδείγματος χάριν ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 141 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε 5· διότι $5^3=125$ ἀλλὰ $6^3=216$. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 705 εἶνε 8· διότι $8^3=512$· ἐνῷ $9^3=729$.

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶνε μεγαλητέρα τοῦ 10, ἤτοι θὰ ἔχῃ δεκάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτὴν ἔχομεν ἀνάγκην τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

280. *Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν κύβων τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε $\alpha+\beta$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν κύβον τοῦ $\alpha+\beta$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ἤτοι τὸ

$$\alpha^2+2\alpha\times\beta+\beta^2,$$

πάλιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\alpha+\beta$. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ α καὶ ἔπειτα ἐπὶ β καὶ ἀθροίζομεν τὰ δύο γινόμενα (ἐδ. 35). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+2\alpha^2\times\beta+\alpha\times\beta^2+\alpha^2\times\beta+2\alpha\times\beta^2+\beta^3$$

παρατηροῦντες δὲ ὅτι

$$2\alpha^2\times\beta+\alpha^2\times\beta=3\alpha^2\times\beta \text{ καὶ } 2\alpha\times\beta^2+\alpha\times\beta^2=3\alpha\times\beta^2,$$

γράφομεν τὸν κύβον τοῦ $\alpha+\beta$ ὡς ἑξῆς·

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\times\beta+3\alpha\times\beta^2+\beta^3$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ προκείμενον θεώρημα

Πόρισμα.

281. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ μονάδα, οἱ κύβοι αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ μίαν μονάδα.*

Διότι, ἂν ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ μεγαλήτερος θὰ εἶνε $\alpha+1$· καὶ οἱ κύβοι αὐτῶν θὰ εἶνε, τοῦ μὲν μικροτέρου α^3, τοῦ δὲ μεγαλητέτου $(\alpha+1)^3$· ἤτοι $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$· διαφέρουσι δὲ οἱ κύβοι οὗτοι ἀπ' ἀλλήλων κατὰ $3\alpha^2+3\alpha+1$.

282. Δυνάμεθα νῦν νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (τὴν ἀκριβῆ, ἂν εἶνε τέλειος κύβος, εἰ δὲ μή, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος). Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωσιν τὴν κυβ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 41679.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὸν 1000, ἡ κυβ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 10· ἄρα θὰ σύγκειται ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ· καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δεκάδες του (ἤτοι τοῦ $\delta\times10$) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων του, τουτέστι $\delta\times10+\mu$.

Ὁ δὲ κύβος αὐτῆς (ὅστις θὰ χωρῇ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν) θὰ σύγκειται (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα).

1) Ἐκ τοῦ κύβου τῶν δεκάδων (τουτέστιν ἐκ τοῦ

$$(\delta\times10)\times(\delta\times10)\times(\delta\times10, \text{ (ἤτοι } \delta^3\times1000).$$

2) Ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τῶν μονάδων μ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, (ἤτοι ἐκ τοῦ $3\mu\times\delta^2\times100$).

3) Ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπ[illegible] ν μονάδων, (ἤτοι ἐκ τοῦ $3\delta \times 10 \times \mu^2$).

καὶ 4) Ἐκ τοῦ κύβου τῶν μονάδων· (ἤτοι ἐκ τοῦ [illegible] ρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 41679, ὡς περιέχων τὸν κύβον [illegible] ὰ σύγκειται ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν καὶ ἔκ τιν[illegible] (ἂν δὲν εἶνε τέλειος κύβος)· τουτέστιν εἶνε

(1) $41679 = 1000 \times \delta^3 + 100 \times 3\delta^2 \times \mu + 10 \times 3\delta \times$ [illegible]

Ἐκ τῶν μερῶν τούτων αἱ δ^3 χιλιάδες δὲν δύνανται [illegible] ται ἢ εἰς τὰς 41 χιλιάδας τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ὁ μέγιστ[illegible] ὁποῖον χωρεῖ ὁ 41, εἶνε ὁ 27· ὥστε ὁ κύβος τοῦ ψηφίου δ θὰ εἶνε 27 καὶ ἑπομένως δ=3· (δὲν δύναται νὰ εἶνε δ[illegible] κύβος τῶν 4 δεκάδων εἶνε 64 χιλιάδες, ἤτοι μεγαλήτερο[illegible] τος ἀριθμοῦ). Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι

Αἱ δεκάδες τῆς κυβ. ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκονται, ἡ κυβ. ῥίζα τῶν χιλιάδων αὐτοῦ.

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων (δ=3), μένει εὕρωμεν τὰς μονάδας μ. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφο[illegible] μελῶν τῆς ἰσότητος (1) τὰς 27 χιλιάδας καὶ εὑρίσκομεν

(2) $14679 = 100 \times 27 \times \mu + 10 \times 9 \times \mu^2 + \mu^3 + \upsilon$.

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸν 14679, ὁ πρ[illegible] ἑκατοντάδες (27×μ ἑκατοντάδες)· ἄρα δὲν δύναται νὰ [illegible] ἢ μόνον εἰς τὰς 146 ἑκατοντάδας· ἀλλ' εἰς τὰς 146 ταύτα[illegible] τάδας περιέχονται ἐπίσης καὶ αἱ ἑκατοντάδες τῶν λοιπῶν [illegible] ἔχωσι· ὥστε θὰ εἶνε

$$146 > 27 \times \mu.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων [illegible] δύναται [illegible] μεῖζον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰς 146 [illegible] 14679 [illegible]

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 5, δοκιμάζομ[illegible] τοῦτο. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸν κύβον τοῦ 35 [illegible] ὅστις εἶ[illegible] τοι μεγαλήτερος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 41679 δοκιμάζ[illegible] κατὰ μονάδα μικρότερον [illegible] τοῦτο εὑρί[illegible] [illegible] τοῦ 34, ὅστις εἶνε 39304 καὶ ἑπομένως περιέχεται [illegible] Ἐκ τούτου [illegible] ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζ[illegible]

ρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ψηφίον δὲν εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 6· ὑψοῦντες δὲ πρὸς δοκιμὴν τὸν 566 εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν 181 321 496· ὥστε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 181 653 487 εἶνε 566, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶνε 331991.

Διάταξις τῆς πράξεως.

181'653'487	566	
125		
566'53	$3\times5^2=75$	$56^3=175616$
181653	$3\times56^2=9408$	$566^3=181321496$
175616		
6037'487		
181653487		
181321496		
331991		

283. Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών. *Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς, ἂν εἶνε κύβος, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος), χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δύναται νὰ εἶνε τριψήφιον ἢ διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶνε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης.*

Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος [illegible], καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος, τὸν δὲ οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, καὶ τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον.

Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἐκ τῶν δύο πρώτων τμημάτων σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης· εἰ δὲ μή, [illegible] κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ

κατὰ μονάδα μικρότερον· καὶ καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμὸν δυνάμενον νὰ ἀφαιρεθῇ.

Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν σχηματίζουσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῆς ῥίζης.

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον δοκιμάζομεν γράφοντες αὐτὸ δεξιὰ τῶν ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης καὶ ὑψοῦντες τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἐκ τῶν τριῶν πρώτων τμημάτων ἀποτελούμενον ἀριθμόν, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶνε τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς ψηφίον.

Ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τελευταίου τμήματος καὶ εὕρωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Παρατηρήσεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς κυβ. ῥίζης εἶνε ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Ἐὰν λοιπὸν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 3ν ἢ $3\nu-1$ ἢ $3\nu-2$, ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ θὰ ἔχῃ ν ψηφία.

2) Ἐὰν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰ ψηφία τῆς ῥίζης, εὑρεθῇ πηλίκον μεγαλήτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9.

3) Ἐὰν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων τὸ πηλίκον εἶνε 0, καὶ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης θα εἶνε 0.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλασίου τῆς ῥίζης καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτῆς. (Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἐδ. 281).

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

284. *Ἡ κυβικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ αὐτὴ μὲ τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.*

Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως, ὡς ἀπεδείχθη καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης (ἐδ. 267).

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

285. Ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ [κατὰ] προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀκ[εραίου] κατὰ προσέγγισιν μονάδος· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν [ῥίζαν] τοῦ ἀριθμοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἐκ [τῶν] κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον τοῦ ὁ[ποίου] τὸν κύβον χωρεῖ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς A. Ἔστω τοιοῦτο τὸ $\frac{\rho}{\nu}$, ἤτοι

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^3 \leq A \qquad \text{ἀλλὰ} \qquad \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^3 > A$$

ἐκ τούτων ἕπεται:

$$\rho^3 \leq A \times \nu^3 \qquad \text{ἀλλὰ} \qquad (\rho+1)^3 > A \times \nu^3$$

Αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ρ [εἶναι ὁ] μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $A \times \nu^3$· [του]τέστιν ὁ ρ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $A \times \nu^3$ κατὰ προσέγγισιν μον[άδος].

286. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ π[ροσέ]γγισιν $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ ν καὶ ἐ[ξάγομ]εν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου $(A \times \nu^3)$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος· τὴν δὲ ῥίζαν ταύτην διαιροῦμεν διὰ ν.

Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, ζητῆται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 100 [illegible] πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 5³, ἤτοι ἐπὶ 125 [illegible] ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου 12[illegible] κατὰ προσέγγισιν μονάδος [illegible] ἔπειτα διαιροῦμεν [illegible] — αὕτη δὲ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥ[ίζα] [illegible]

[illegible]

[illegible] παρονομαστὴν

κ τοῦ 10· ζητεῖται δηλονότι νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος θμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$· τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου ὄνος γίνεται εὐκολωτέρα.

Παραδείγματα

1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν 2 ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ 1000, ἤτοι ἐπὶ ⁹. (ἤτοι γράφω δεξιὰ τοῦ 2 ἐννέα μηδενικὰ) καὶ τοῦ προκύπτοντος θμοῦ 2 000 000 000 ἐξάγω τὴν κυβικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν άδος, ὅτε εὑρίσκω 1269· τὴν ῥίζαν ταύτην διαιρῶ διὰ 1000 καὶ ι 1,269· τοῦτο δὲ εἶνε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{5}{9}$ μὲ προ- γισιν $\frac{1}{100}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ ἐπὶ 100^3 καὶ τοῦ γινομένου ιβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶνε 555555, καὶ τούτου ἐξάγω κυβικὴν ῥίζαν μὲ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 82· διαιρῶ ιτα τὴν ῥίζαν ταύτην 82 διὰ 100 καὶ εὑρίσκω 0,82· τοῦτο δὲ εἶνε υβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{9}$ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 5,92347 μὲ σέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 10^3, ἤτοι ἐπὶ 1000, καὶ τοῦ ομένου λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶνε 5923· τούτου ἐξάγω κυβικὴν ῥίζαν μὲ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὑρίσκω 18· διαιρῶ ὴν διὰ 10 καὶ εὑρίσκω 1, 8· τοῦτο δὲ εἶνε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δο- ς ἀριθμοῦ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

μοίως εὑρίσκεται, ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 0,000004128 προσέγγισιν 0,001 εἶνε 0,016.

Παρατήρησις.

287. Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματός τινος τέλειοι κύβοι, ἡ κυβ. ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀκριβῶς· ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβ. ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἡ τοῦ παρονομαστοῦ· π.χ. ἡ κυβ. ῥίζα τοῦ $\frac{8}{1000}$ εἶνε $\frac{2}{10}$, ἡ κυβ. ῥίζα τοῦ $\frac{27}{1000000}$ εἶνε $\frac{3}{100}$, ἡ τοῦ $\frac{64}{125}$ εἶνε $\frac{4}{5}$, κτλ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 2 ἢ 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε ἄρτιον· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 4 ἢ 8, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε περιττόν.

2) Ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγων εἰς 5 δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του δὲν εἶνε μήτε 2 μήτε 7.

3) Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων εἶνε πολλαπλάσιόν τι τοῦ 6 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

ΜΕΘΟΔΟΙ

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

288. Πολλάκις ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλου ἢ ἀπὸ πολλῶν ἄλλων. Παραδείγματος χάριν, τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ δώσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων, τοὺς ὁποίους θὰ ἀγοράσῃ· διότι εἶνε φανερόν, ὅτι διὰ περισσοτέρους πήχεις θὰ δώσῃ περισσότερα χρήματα. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, οἵτινες χρειάζονται διὰ νὰ κτίσωσι τοῖχόν τινα, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ τοίχου καὶ ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ πλάτους αὐτοῦ· ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς θὰ κτισθῇ ὁ τοῖχος, καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν τῆς ἡμερησίας ἐργασίας.

289. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα.

Ἂν δύο ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 5 δραχμάς,
2×3 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἀξίζουν 5×3 δραχμάς· καὶ
$2\times\frac{1}{8}$ » » » » » $5\times\frac{1}{8}$ »
καὶ οὕτω καθεξῆς·
ὥστε ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων του εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν ἐργάτης τις λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον 4 δραχμάς,
διὰ 2 ἡμέρας θὰ λάβῃ 4×2 δραχμάς,
διὰ 5 ἡμέρας θὰ λάβῃ 4×5 δραχμάς,
διὰ $6\frac{1}{5}$ ἡμέρας θὰ λάβῃ $4\times6\frac{1}{5}$ δραχμάς·
ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ μισθὸς τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας του εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν ὁδοιπόρος τις διανύῃ εἰς 1 ὥραν	$7\frac{1}{2}$	στάδια.
θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρας	$\left(7\frac{1}{2}\right)\times 4$	στάδια
καὶ εἰς $\frac{1}{8}$ ὥρ.	$\left(7\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{8}$	στάδια·

ἄρα αἱ ὧραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενα στάδια εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν εἰς 8 ἀνθρώπους

διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου	400	δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος		50·
ἂν διανεμηθῶσι	400×2	δρ.	» »	50×2·
ἂν διανεμηθῶσι	$400\times\frac{5}{6}$	δρ.	» »	$50\times\frac{5}{6}$·

καὶ οὕτω καθεξῆς· (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων μένει ὁ αὐτός)· ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶνε ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάβλητος).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶνε καὶ ἀνάλογα· διότι, λόγου χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουσι καὶ ὅμως δὲν εἶνε ἀνάλογα.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

290. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀντίστροφα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*, ὅταν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ διαίρεσιν τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα.

Ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας,

2 ἐργάται θὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς $\frac{12}{2}$ ἡμέρας

καὶ 8 ἐργάται » » εἰς $\frac{12}{8}$ ἡμέρας.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς ἐκτελεῖται οὗτοι ἔργον τι, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐὰν 12 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 600 δρ.,

θὰ λάβῃ ἕκαστος 50 δρ.

Ἐὰν 12×8 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{50}{8}$ δρ.

Ἐὰν δὲ $\frac{12}{4}$ ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος 50×4 δρ.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἵτινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (τουτέστιν αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο), εἶνε καὶ ἀντίστροφα· διότι π. χ. ἂν μία ἅμαξα συρομένη ὑπὸ δύο ἵππων διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς 1 ὥραν, συρομένη ὑπὸ 4 δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥραν· οὐδὲ συρομένη ὑπὸ 8 θὰ διατρέξῃ αὐτό εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

Παρατήρησις.

291. Ὅταν ἐξετάζωμεν, ἂν ποσόν τι εἶνε ἀνάλογον πρὸς ἄλλο, ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό, ἀφίνομεν ἀμετάβλητα πάντα τὰ ἄλλα ποσά, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐνδέχεται νὰ ἐξαρτᾶται τὸ ποσὸν τοῦτο.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν ἄνθρωποί τινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι χρημάτων, ἐὰν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων ἀμετάβλητον· τότε δὲ (ἰδ. 289, παράδειγμα 4ον) εὑρίσκω, ὅτι τὸ μερίδιον καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, εἶνε ἀνάλογα. Ὁμοίως, ἂν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, εἰς τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ διανομή, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸ διανεμόμενον ποσὸν ἀμετάβλητον· τότε δὲ εὑρίσκω (ἰδ. 290, παράδειγμα 2ον), ὅτι τὸ μερίδιον καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Περὶ ἀριθμῶν ἀναλόγων.

292. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 30, 100 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, 3, 6, 20, διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 5.

Καὶ οἱ δεύτεροι δὲ ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς πρώτους· διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{5}$.

Ἂν ὁδοιπόρος τις διανύῃ εἰς 1 ὥραν $7\frac{1}{2}$ στάδια.

θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρας $\left(7\frac{1}{2}\right)\times 4$ στάδια

καὶ εἰς $\frac{1}{8}$ ὥρ. $\left(7\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{8}$ στάδια·

ἄρα αἱ ὧραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενα στάδια εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν εἰς 8 ἀνθρώπους

διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου	400 δρ.,	θὰ λάβῃ	ἕκαστος	50·
ἂν διανεμηθῶσι	400×2 δρ.	»	»	50×2·
ἂν διανεμηθῶσι	$400\times\frac{5}{6}$ δρ.	»	»	$50\times\frac{5}{6}$·

καὶ οὕτω καθεξῆς· (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων μένει ὁ αὐτός)· ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶνε ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάβλητος).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶνε καὶ ἀνάλογα· διότι, λόγου χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουσι καὶ ὅμως δὲν εἶνε ἀνάλογα.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

290. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀντίστροφα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*, ὅταν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ διαίρεσιν τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα.

Ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας,

2 ἐργάται θὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς $\frac{12}{2}$ ἡμέρας

καὶ 8 ἐργάται » » εἰς $\frac{12}{8}$ ἡμέρας.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς ἐκτελοῦσιν οὗτοι ἔργον τι, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐὰν 12 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 600 δρ.,

θὰ λάβῃ ἕκαστος 50 δρ.

Ἐὰν 12×8 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{50}{8}$ δρ.

Ἐὰν δὲ $\frac{12}{4}$ ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος 50×4 δρ.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἵτινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (τουτέστιν αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο), εἶνε καὶ ἀντίστροφα· διότι π. χ. ἂν μία ἅμαξα συρομένη ὑπὸ δύο ἵππων διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς 1 ὥραν, συρομένη ὑπὸ 4 δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥραν· οὐδὲ συρομένη ὑπὸ 8 θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

Παρατήρησις.

291. Ὅταν ἐξετάζωμεν, ἂν ποσόν τι εἶνε ἀνάλογον πρὸς ἄλλο, ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό, ἀφίνομεν ἀμετάβλητα πάντα τὰ ἄλλα ποσά, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐνδέχεται νὰ ἐξαρτᾶται τὸ ποσὸν τοῦτο.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν ἄνθρωποί τινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι χρημάτων, ἐὰν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων ἀμετάβλητον· τότε δὲ (ἰδ. 289, παράδειγμα 4ον) εὑρίσκω, ὅτι τὸ μερίδιον καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, εἶνε ἀνάλογα. Ὁμοίως, ἂν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, εἰς τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ διανομή, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸ διανεμόμενον ποσὸν ἀμετάβλητον· τότε δὲ εὑρίσκω (ἰδ. 290, παράδειγμα 2ον), ὅτι τὸ μερίδιον καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Περὶ ἀριθμῶν ἀναλόγων.

292. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ους τὸ πλῆθος, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἀριθμόν, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 30, 100 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 6, 20, διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 5. Οἱ δεύτεροι δὲ ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς πρώτους· διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{5}$.

Μέθοδοι.

303. *Μέθοδος* λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων.

Στοιχειώδη προβλήματα λέγω ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως· τοιαῦτα, λόγου χάριν, εἶνε τὰ ἑξῆς δυο γενικὰ προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (ἐξ ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν τοῦ αὐτοῦ πράγματος.

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

304. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχ., ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δρχ.

καὶ ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δρ., οἱ 35 πήχεις ἀξίζουν $\frac{65}{12}\times 35$ δρ.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς δύο στοιχειώδη.

1) Οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς;

2) Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δραχ. πόσον ἀξίζουν οἱ 35 πήχεις;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 10 ἡμέρας· ἂν εἰργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελον τελειώσῃ τὸ ἔργον;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα· τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον· κατὰ πρῶτον ἦσαν αἱ ὧραι 7 καὶ αἱ ἡμέραι 10, τώρα αἱ ὧραι ἔγειναν 9, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι;

Πρῶτον θὰ εὕρωμεν, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι, ὅταν αἱ ὧραι ἀπὸ 7 γίνωσιν 1, (ὅταν δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διαιρεθῇ διὰ 7) καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν εἰργάζοντο 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 10 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον· ἂν λοιπὸν εἰργάζοντο μόνον 1 ὥραν καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας 10×7 (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 7· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διῃρέθη διὰ 7, εἶνε δὲ ταῦτα ἀντίστροφα ποσά). Ἀφ' οὗ δὲ χρειάζονται 10×7 ἡμέρας, ὅταν ἐργάζωνται μίαν ὥραν καθ' ἡμέραν, ἂν εἰργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας $\frac{10\times 7}{9}$ (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διῃρέθη δι' 9· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 9).

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶνε $7^{\text{ἡμ.}}\frac{7}{9}$ ἤτοι $7^{\text{ἡμ.}}$ καὶ $7^{\text{ὡρ.}}$

Κανὼν γενικός.

298. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ· φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶνε εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας. Τούτων γενομένων, *ἵνα εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶνε γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1ον πρόβλημα, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

πήχ.	δραχ.
12	65
35	χ

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ, ἤτοι τὸν 65, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{12}{35}$ ἀντεστραμμένον· διότι τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα) καὶ εὑρίσκομεν

$χ=65\times\frac{35}{12}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, $χ=189\frac{7}{12}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ 2ον πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

ὧρ. ἐργ.	ἡμέραι
7	10
9	χ

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὑρίσκομεν $χ=10\times\frac{7}{9}=\frac{70}{9}$.

Ἐνταῦθα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ὡς εἶνε γεγραμμένοι· διότι τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα.

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ταχυδρόμος βαδίζων $5\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασιν τινα εἰς 18 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς 12 ἡμέρας;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

ὧραι ὁδοιπ.	ἡμέραι
$5\frac{1}{2}$	18
χ	12

ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα,

$$\chi=5\frac{1}{2}\times\frac{18}{12}=\frac{99}{12}, \text{ ἤτοι } \chi=8^{\text{ὥρ.}}\ \frac{1}{4}.$$

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα:

Μὲ 35 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἀγοράζει τις 6 $\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει μὲ 128 δραχμὰς καὶ 30 λεπτά;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἔπεται

$$\begin{array}{cc} \text{δραχ.} & \text{ὀκάδ.} \\ 35{,}60 & 6\frac{1}{2} \\ \hline 128{,}30 & \chi \end{array},$$

ὅθεν $$\chi=6\frac{1}{2}\times\frac{128{,}30}{35{,}60}=6\frac{1}{2}\times\frac{1283}{356}=\frac{13\times1283}{2\times356}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν

$$\chi=23^{\text{όκ.}}\ \frac{303}{712} \quad \text{ἢ} \quad 23^{\text{όκ.}}\ 170^{\text{δρ.}}\frac{20}{89}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 70 μίλια εἰς 9 $\frac{1}{2}$ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 125 μίλια; $\left(\text{Ἀπ. } 16^{\text{ὥρ.}}\ 57'\ \frac{6}{7}\right)$.

2) Διὰ νὰ γίνῃ ἔνδυμά τι ἐχρειάσθησαν 3 $\frac{1}{2}$ πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1^{\text{πήχ.}}\ \frac{3}{8}$· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἔνδυμα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως; $\left(\text{Ἀπ. } 5\frac{1}{2}\right)$.

3) Πόσοι πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1 $\frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως χρειάζονται διὰ νὰ καλυφθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ὅπερ ἔχει μῆκος μὲν 5 πήχεις, πλάτος δὲ 4; (Ἀπ. 16).

4) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 45 ἡμέρας· ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 60 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρέσ ου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἄνθρωπος ἐν αὐτῷ; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{3}{4}\right)$.

5) Εἰς πολεμικόν τι πλοῖον, ὅπερ ἔχει πλήρωμα 750 ἄνδρας, ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 50 ἡμέρας· τὸ πλοῖον τοῦτο ἀπαντῆσαν διέσωσε 35

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ· φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶνε εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας. Τούτων γενομένων, *ἵνα εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶνε γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1ον πρόβλημα, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

πήχ.	δραχ.
12	65
35	χ

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ, ἤτοι τὸν 65, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{12}{35}$ ἀντεστραμμένον· διότι τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα) καὶ εὑρίσκομεν

$\chi = 65 \times \frac{35}{12}$, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, $\chi = 189\,\frac{7}{12}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ 2ον πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

ὥρ. ἐργ.	ἡμέραι
7	10
9	χ

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὑρίσκομεν $\chi = 10 \times \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$.

Ἐνταῦθα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ὡς εἶνε γεγραμμένοι· διότι τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα.

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ταχυδρόμος βαδίζων $5\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς 18 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς 12 ἡμέρας;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

ὧραι ὁδοιπ.	ἡμέρ.
$5\frac{1}{2}$	18
χ	12

ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα,

$$\chi=5\frac{1}{2}\times\frac{18}{12}=\frac{99}{12}, \text{ ἤτοι } \chi=8^{\text{ὥρ.}}\ \frac{1}{4}.$$

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα :

Μὲ 35 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἀγοράζει τις 6 $\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει μὲ 128 δραχμὰς καὶ 30 λεπτά ;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἕπεται

δραχ.	ὀκάδ.
35,60	$6\frac{1}{2}$
128,30	χ ,

ὅθεν

$$\chi=6\frac{1}{2}\times\frac{128,30}{35,60}=6\frac{1}{2}\times\frac{1283}{356}=\frac{13\times1283}{2\times356}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν

$$\chi=23^{\text{ὀκ.}}\ \frac{303}{712} \quad \text{ἢ} \quad 23^{\text{ὀκ.}}\ 170^{\text{δρ.}}\frac{20}{89}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 70 μίλια εἰς $9\frac{1}{2}$ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 125 μίλια; $\left(\text{Ἀπ. } 16^{\text{ὥρ.}}\ 57'\ \frac{6}{7}\right)$.

2) Διὰ νὰ γίνῃ ἔνδυμά τι ἐχρειάσθησαν $3\frac{1}{2}$ πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1^{\text{πήχ.}}\ \frac{3}{8}$· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἔνδυμα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως ;

$\left(\text{Ἀπ. } 5\frac{1}{2}\right)$.

3) Πόσοι πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1\frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως χρειάζονται διὰ νὰ καλυφθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ὅπερ ἔχει μῆκος μὲν 5 πήχεις, πλάτος δὲ 4 ; (Ἀπ. 16).

4) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 45 ἡμέρας· ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 60 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρέσ ου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἄνθρωπος ἐν αὐτῷ ; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{3}{4}\right)$.

5) Εἰς πολεμικόν τι πλοῖον, ὅπερ ἔχει πλήρωμα 750 ἄνδρας, ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 50 ἡμέρας· το πλοῖον τοῦτο ἀπαντῆσαν διέσωσε 35

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 25 ἡμέρας· πόσας ὥρας καθ' ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 52 ἐργάται, ἂν θέλωσι νὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας.

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, κατατάσσω τὰ δεδομένα ὡς καὶ προηγουμένως

ἐργ.	ἡμ.	ὥρ.
18	7	25
52	x	15

ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Ἂν μόνον οἱ ἐργάται μεταβληθῶσι καὶ ἀπὸ 18 γίνωσι 52, (ἀλλ' αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον, νὰ μείνωσιν αἱ αὐταὶ 25), αἱ ὧραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7\times\frac{18}{52}\cdot$$

(δι)ότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἂν δὲ ἔπειτα μεταβληθῶσιν αἱ ἡμέραι καὶ ἀπὸ 25 γίνωσι 15, (ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν νὰ μείνῃ ὡς εἶνε, ἤτοι 52), αἱ ὧραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7\times\frac{18}{52}\times\frac{25}{15} \quad ἢ \quad 7\times\frac{9}{26}\times\frac{5}{3} \quad ἢ \quad 7\times\frac{3}{26}\times5$$

(διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν εἶνε $\frac{105}{26}$, ἤτοι 4ὥρ. 2' $\frac{4}{13}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν, πόσας ὥρας ἐργασίας ἀπαιτεῖ τὸ ἔργον δι' ἕνα ἄνθρωπον· Ἐπειδὴ οἱ 18 ἐργάται ἐργάζονται 7 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐπὶ 25 ἡμέρας, τὸ ἔργον χρειάζεται δι' ἕνα ἄνθρωπον ὥρας ἐργασίας $25\times7\times18$· καὶ ἐπειδὴ εἶνε 52 οἱ ἐργάται, πρέπει ἕκαστος νὰ ἐργασθῇ ὥρας $\frac{25\times7\times18}{52}$. καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας, πρέπει νὰ ἐργάζηται ἕκαστος καθ' ἡμέραν $\frac{25\times7\times18}{52\times15}$ ὥρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

20 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας, διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 3;

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς καὶ προηγουμένως :

ἐργ.	ὧρ.	ἡμερ.	μῆκ.	πλάτ.	βαθ.
$\frac{20}{50}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{25}{\chi}$	$\frac{200}{80}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{3}$

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν μόνον οἱ ἐργάται ἀπὸ 20 γίνωσι 50 (τὰ δὲ ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶνε), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{20}{50}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) καὶ θὰ γίνῃ

$$25\times\frac{20}{50}\cdot$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ τὸ ἔργον, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα)·
τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200, πλάτος 4 καὶ βάθος 2.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας (τὰ δὲ ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶνε, ἤτοι οἱ ἐργάται 50 καὶ ἡ τάφρος ἡ αὐτή), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{8}{9}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶνε ἀντίστροφα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25\times\frac{20}{50}\times\frac{8}{9}\cdot$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, ἵνα σκάψωσι τὴν πρώτην τάφρον.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 200 γίνῃ 80 (τὰ δ' ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶνε, ἤτοι ἐργάται 50, ὧραι ἐργασίας 9, πλάτος 4 καὶ βάθος 2), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ

ἐπὶ $\frac{80}{200}$ (διότι τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ αἱ ἡμέραι εἶνε ἀνάλογα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200}.$$

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ πλάτος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 4 γίνῃ 8, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{8}{4}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4}.$$

Ἂν τέλος μεταβληθῇ τὸ βάθος καὶ γίνῃ 3 ἀπὸ 2 (τὰ δ' ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶνε, ἤτοι ἐργάται 50, ὧραι ἐργασίας 9, μῆκος τάφρου 80, πλάτος 8) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{3}{2}$, καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4} \times \frac{3}{2}.$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80, πλάτος 8 καὶ βάθος 3.

Ἁπλοποιοῦντες τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν $\frac{8}{3} \times 4$ ἤτοι $\frac{32}{3}$ ἢ 10ἡμ. καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡμέρας, ἤτοι 10 ἡμέρας καὶ 6 ὥρας· (διότι ἡ καθημερινὴ ἐργασία εἶνε 9 ὧραι).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας διαρκεῖ ἡ ἐργασία, δὲν εἶνε ἀκριβῶς ἀνάλογοι πρὸς τὸ βάθος τῆς τάφρου· διότι, ὅσον γίνεται βαθυτέρα ἡ τάφρος, τόσον γίνεται δυσκολωτέρα ἡ ἐκφορὰ τῶν χωμάτων· ἀλλὰ τὴν διαφορὰν ταύτην παραβλέπομεν.

297. Ἐὰν τώρα εἰς τὰ λυθέντα προβλήματα παραβάλωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς εἶνε κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ) *ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ· ἀντιστρέφομεν ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσόν του εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.*

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Διὰ τὴν τροφὴν 160 στρατιωτῶν ἐπὶ 25 ἡμέρας ἐχρειάσθησαν

1850 δραχμαί· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ φθάσωσιν 8510 δραχμαὶ διὰ τὴν τροφὴν 400 στρατιωτῶν; ('Απ. 46).

2) Ἄνθρωπός τις ἐργαζόμενος 6 ὥρας καθ'ἡμέραν ἐξετέλεσε τα $\frac{2}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 25 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζηται καθ'ἡμέραν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἐπίλοιπον ἔργον εἰς 15 ἡμέρας; ('Απ. 15).

3) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας· ἑκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 40 γράμματα· ἐὰν τὸ βιβλίον τοῦτο τυπωθῇ οὕτως, ὥστε εἰς ἑκάστην σελίδα νὰ εἶνε 36 στίχοι, καὶ εἰς ἕκαστον στίχον 45 γράμματα, ἐκ πόσων σελίδων θ'ἀποτελῆται;
('Απ. 198· ἡ τελευταία δὲν θὰ εἶνε πλήρης).

4) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 12 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέρας· δύνανται οὗτοι μόνοι νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προθεσμίας; καί, ἂν δὲν δύνανται, πόσοι ἐργάται ἀκόμη πρέπει νὰ μισθωθῶσι; ('Απ. ἀκόμη 10 ἐργάται.

5) Ἐπωλήθησαν 40 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου ἀντὶ 6750 δραχμῶν, ἕκαστον δὲ βαρέλιον περιεῖχε 420 ὀκάδας οἴνου· πόσον πρέπει νὰ πωληθῶσι 32 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου, ἐὰν ἕκαστον περιέχῃ 350 ὀκάδας οἴνου τῆς αὐτῆς ποιότητος; ἡ τιμὴ ἑκάστου βαρελίου κενοῦ εἶνε τῶν μὲν πρώτων 25 δραχμαί, τῶν δὲ δευτέρων 22. ('Απ. 4537 $\frac{1}{3}$).

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

292. [illegible]

[illegible]

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, ὅτι 11 ἀγγλικαὶ λίραι, ἤτοι 12 τουρκικαί, κάμνουν ρούβλια $165 \times \frac{11}{26}$.

β΄) 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ρούβλια $165 \times \frac{11}{26}$

1800 » » πόσα ρούβλια;

Λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι 1800 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ρούβλια $\frac{165 \times 11 \times 1800}{26 \times 12}$ ἢ 10471 ρούβ. $\frac{2}{13}$.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα, ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἔμπορος ἔφερεν ἐκ Παρισίων εἰς Ἀθήνας 2500 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε πρὸς 1φρ. 15 τὸ μέτρον· ἐξώδευσε δὲ διὰ ναῦλον καὶ δασμὸν 32 ἐπὶ τοῖς 100 (ἤτοι διὰ πρᾶγμα ἀξίας 100 δραχμῶν ἐξώδευσε 32δρ.)· πόσον τοῦ κοστίζει ὁ μικρὸς πῆχυς ἐν Ἀθήναις, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ χρυσοῦ εἰκοσαφράγκου εἶνε 24 δραχμαί;

Γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς τὰ ἑξῆς·

χ δραχμαὶ = 1 μικρὸς πῆχ.
1 μικ.πῆχ. = 0,648 μέτρα
1 μέτρον = 1, 15 φράγ. χρυσᾶ
20 φρ. χρ. = 24 δραχ.
πρὸ τῶν ἐξόδων 100 δραχ. = 132 δρ. μετὰ τὰ ἔξοδα.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α΄) Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 100δρ., τόσον κοστίζει ἐν Ἀθήν. 132· ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 24δρ., πόσον ἐν Ἀθήναις;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι, ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισ. 24δρ. ἤτοι 20 χρυσᾶ φράγκα, τόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις

$$132 \times \frac{24}{100} \text{δρ.}$$

β΄) Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 20 φρ. χρυσᾶ, ἐν Ἀθήναις κοστίζει $132 \times \frac{24}{100}$ δρ. ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 1,φρ. 15 χρυσᾶ, πόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις; Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μέτρον κοστίζει ἐν Ἀθήναις $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20}$ δρ.

γ΄) Ἡ ἀξία τοῦ μέτρου ἐν Ἀθήναις εἶνε $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20}$ δραχ. ποία εἶνε ἡ ἀξία τῶν 0,648 τοῦ μέτρου (ἤτοι τοῦ μικροῦ πήχεως);

Λύοντες καὶ τοῦτο, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ μικροῦ πήχεως ἐν Ἀθήναις εἶνε $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1.15}{20} \times \frac{648}{1000}$ ἤτοι 1 δρ., 18....

299. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν λύσιν ταύτην πρὸς τὰ δεδομένα ὡς εἶνε κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ γράμμα, δι' οὗ παρίσταται ὁ ἄγνωστος, δεξιὰ δ' αὐτοῦ τὸν ἰσοδύναμόν του ἀριθμόν. Ὑπ' αὐτοὺς γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πάντα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν, ἕκαστον εἰς ἕνα στίχον καὶ οὕτως, ὥστε ἕκαστος στίχος νὰ ἀρχίζῃ μὲ τὸ εἶδος, εἰς τὸ ὁποῖον τελειώνει ὁ προηγούμενος αὐτοῦ· πρέπει δὲ τότε (ἂν τὰ δεδομένα εἶνε ἐπαρκῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος) νὰ συμβαίνῃ, ὥστε ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ τελευταίου στίχου νὰ εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ἄγνωστον.

Τούτων γενομένων, *πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένους ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποκάτω τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένων ἀριθμῶν· τὸ πηλίκον εἶνε ὁ ζητούμενος ἀριθμός.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

300. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανείζει χρήματα.

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος λέγεται *ἐπιτόκιον*· ὁρίζεται δὲ τοῦτο διὰ συμφωνίας ἰδιαιτέρας μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου.

Τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων λέγεται *κεφάλαιον*.

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κεφαλαίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου, ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

Ὁ τόκος εἶνε ἢ *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος, δέ, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη· ὥστε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Ἐάν τις π.χ. δανεισθῇ 500 δρ. μὲ ἐπιτόκιον 10 καὶ μὲ τόκον ἁπλοῦν, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δραχμὰς (500 κεφά-

·ον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους 600 (500 κεφάλαιον καὶ 100 τόκον), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 650, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀλλ' ἐὰν ὁ τόκος εἶνε σύνθετος, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δρ. (500 κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 605 δρ. (550 κεφ. καὶ 55 τόκ.), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου 665,50 (605 κεφ. καὶ 60,50 τόκ.)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ σύνθετος τόκος λέγεται καὶ *ἀνατοκισμός*, τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι *ἀνατοκίζεται*.

Ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

301. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά·

1) τὸ κεφάλαιον,

2) ὁ τόκος,

3) τὸ ἐπιτόκιον,

4) ὁ χρόνος, ἤτοι ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

Τὰ ποσὰ ταῦτα εἶνε ἀνὰ δύο, ἢ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων.

Διότι εἶνε φανερόν, ὅτι διπλάσιον κεφάλαιον φέρει διπλάσιον τόκον, τριπλάσιον κεφάλαιον τριπλάσιον τόκον (ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὡσαύτως εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. χρόνον, ὁ τόκος γίνεται διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ. (τῶν λοιπῶν μενόντων ἀμεταβλήτων).

Ἐπίσης, διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, διπλασιάζεται καὶ ὁ τόκος (τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων ἀμεταβλήτων), κτλ.

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ἀντίστροφα· διότι, ἂν π.χ. κεφάλαιον 500 δρ. χρειάζηται δύο ἔτη διὰ νὰ φέρῃ τόκον 50 δρ. (πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν), διπλάσιον κεφάλαιον δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον 5, διὰ νὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον, χρειάζεται μόνον ἓν ἔτος· κεφάλαιον δὲ 250 δρ. δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, ἵνα φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον, χρειάζεται 4 ἔτη.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἁπλῆν ἢ σύνθετον).

302. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶνε ἢ ὁ τόκος, ἢ τὸ κεφάλαιον, ἢ τὸ ἐπιτόκιον, ἢ ὁ

χρόνος, συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶνε τεσσάρων εἰδῶν: Ἐν τοῖς ἑπομένοις λύομεν ἓν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

Πρόβλημα 1ον (ἄγνωστον ὁ τόκος).

Πόσον τόκον φέρουσιν 7850 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 7 τοῖς ἑκατόν; (ἀντὶ 7 τοῖς ἑκατὸν γράφεται συντομίας χάριν 7 %).

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
$\frac{100}{7850}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{\chi}$

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος χ εἶνε ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 297, εὑρίσκομεν

$$\chi=7\times\frac{7850}{100}\times\frac{3}{1}=\frac{7\times7850\times3}{100}, \quad \text{ἢ} \quad \chi=1648{,}50 \text{ δρ.}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου χ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

303. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα* (ἤτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον), *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 100.*

Πρόβλημα 2ον (ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον).

Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ $2\frac{1}{2}$ ἔτη πρὸς 9 % ἔφερε τόκον 820 δραχμάς;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
$\frac{100}{\chi}$	$\frac{1}{2\frac{1}{2}}$	$\frac{9}{820}$

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον πρὸς μὲν τὸν τόκον εἶνε ἀνάλογον, πρὸς δὲ τὸν χρόνον ἀντίστροφον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν

$$\chi=100\times\frac{1}{2\frac{1}{2}}\times\frac{820}{9}=\frac{820\times100}{9\times2\frac{1}{2}}.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου κεφαλαίου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

304. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον*

ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (ἐπιτοκίου καὶ χρόνου).

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1640\times100}{9\times5}=\frac{1640\times20}{9}=3644^{\delta\rho.},\ 44\frac{4}{9}.$$

Πρόβλημα 3ον (ἄγνωστον ὁ χρόνος).

Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 25800 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς $8\frac{1}{2}$ $^0/_0$ θὰ φέρῃ τόκον 2590δρ.,60;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον:

κεφ.	ἔτη	τόκ.
100	1	8,50
25800	χ	2590,60

Ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ χρόνος εἶνε ἀνάλογος μὲν τοῦ τόκου, ἀντίστροφος δὲ τοῦ κεφαλαίου· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (ἐδ. 297) εὑρίσκομεν

$$\chi=1\times\frac{100}{25800}\times\frac{2590,60}{8,50}=\frac{100\times2590,60}{8,50\times25800}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

308. *Διὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη), *πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων* (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{100\times259060}{850\times25800}=\frac{25906}{85\times258}$$

ἤτοι $\chi=1^{\text{ἔτ.}}\ 2^{\text{μῆν.}},\ 5^{\text{ἡμέρ.}}\frac{591}{2193}.$

Πρόβλημα 4ον (ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον).

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3058 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον 820 δρ.;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς.

κεφ.	ἔτη	τόκος
3058	$5\frac{1}{3}$	820
100	1	χ

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος χ (τῶν 100 δρ. εἰς 1 ἔτος) εἶνε ἀνά-

λόγος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν

$$x = 820 \times \frac{100}{3058} \times \frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{820 \times 100}{3058 \times (5\frac{1}{3})}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

306. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων* (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ χ, εὑρίσκομεν

$$x = \frac{820 \times 100 \times 3}{3058 \times 16} = \frac{410 \times 100 \times 3}{3058 \times 8} = \frac{123000}{24464},$$ ἤτοι $\chi = 5{,}02\ \%$ περίπου.

Παρατήρησις.

307. Οἱ τέσσαρες εὑρεθέντες κανόνες περὶ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου περιλαμβάνονται εἰς ἕνα, τὸν ἑξῆς.

[illegible]

6) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 7500 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 90 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἐπώλησε δ' αὐτὸ μετὰ 3 μῆνας πρὸς 1,10· πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἐκέρδησεν; ('Απ. $88\frac{8}{9}$ %).

7) Σιτέμπορός τις ἠγόρασε σῖτον πρὸς 36 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· μετὰ 7 μῆνας θέλει νὰ πωλήσῃ αὐτὸν καὶ νὰ κερδίσῃ ἐπὶ τῶν χρημάτων του 10 %· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν;

('Απ. 38 λεπτὰ $\frac{1}{10}$ τοῦ λεπτοῦ).

8) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 72000 δραχμῶν καὶ κτῆμα ἀντὶ 36800 δραχμῶν· καὶ ἐκ μὲν τῆς οἰκίας ἀπολαμβάνει ἐτησίως 4500 δραχμάς· ἐκ δὲ τοῦ κτήματος 1200· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀπολαμβάνει ἐκ τῶν δύο τούτων ὁμοῦ; ('Απ. 5,24...).

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου κ εἰς η ἡμέρας, εἶνε

$\frac{κ.η.}{6000}$, ἐὰν τοκίζηται πρὸς 6 %.

$\frac{κ.η.}{8000}$ » » » $4\frac{1}{2}$ %.

$\frac{κ.η.}{7200}$ » » » 5 %

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

308. *Ὑφαίρεσις* λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐκπίπτεται ἐξ ἑνὸς χρέους, ὅταν τὸ χρέος τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς διορίας του.

Ὑπάρχουσι δὲ δύο εἰδῶν ὑφαιρέσεις, ἡ *ἐξωτερικὴ* καὶ ἡ *ἐσωτερική*.

α'. Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

309. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος ὅλου τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ χρεωστικὸν γραμμάτιον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις θα περάσῃ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ. Ἑπομένως τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν διαφέρουσι ποσῶς ἀπὸ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς.

Πρόβλημα

Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 7 $\frac{1}{2}$ %· πόση εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

Τὸ ζητούμενον εἶνε τόκος τῶν 2500 δραχμῶν εἰς 8 μῆνας, πρὸς $7\cdot\frac{1}{2}$ %· ὁ τόκος οὗτος εἶνε

$$\frac{2500\times(7\frac{1}{2})\times\frac{8}{12}}{100} \text{ ἢ } 25\times\frac{2}{3}\left(7\ \frac{1}{2}\right) \text{ ἢ } 25\times\frac{1}{3}\times15$$

ἤτοι 25×5 ἢ 125 δραχ.

ὥστε τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου (ἤτοι αἱ 2500 δραχ.) θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 125 δρ., ἑπομένως θὰ πληρωθῇ μὲ μόνον 2375 δραχμάς.

Παρατήρησις.

Ἐκ τῶν 2500 δραχμῶν πληρώνονται μόνον αἱ 2375 καὶ ὅμως κρατεῖται ὁ τόκος τῶν 2500. Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶνε δικαία. Ἀλλ' οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται αὐτὴν διὰ τὴν εὐκολίαν· δικαιολογεῖται δὲ διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

β'. Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.

310. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς ποσότητος τὴν ὁποίαν πληρώνει, ὅστις προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν λήγει τὸ γραμμάτιον.

Διὰ νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἂς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %, πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις δὲν εἶνε τώρα ὁ τόκος τῶν 1200 δραχμῶν, (εἰς τρεῖς μῆνας), ἀλλ' ὀλιγωτέρων, δηλαδὴ ἐκείνων, τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον· ὥστε αἱ 1200 δρ. θὰ ἀποτελῶνται ἐκ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον πληρώνει ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον καὶ ἐκ τοῦ τόκου τοῦ ποσοῦ τούτου διὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δρ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 8 %· ὁ τόκος οὗτος εἶνε

$$\frac{100\times\frac{3}{12}\times8}{100} \text{ ἢ } 2 \text{ δραχμαί·}$$

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

100 δραχμαὶ τοκιζόμεναι σήμερον γίνονται μετὰ 3 μῆνας 102· ἂν

ιπὸν ἔχῃ τις νὰ λάβῃ μετὰ 3 μῆνας 102 δραχμὰς καὶ πωλήσῃ σήμερον τὸ γραμμάτιόν του, θὰ λάβῃ μόνον 100 καὶ θὰ χάσῃ τὰς 2 στις εἶνε ὁ τόκος τῶν 100)·

στε εἰς 102 δραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2 δρ.

εἰς μίαν δραχμὴν » » $\frac{2}{102}$

εἰ εἰς 1200 δραχμὰς θὰ γίνῃ ὑφαίρεσις $\frac{2}{102}\times1200$ ἢ $\frac{1200}{51}$

τοι $23^{\delta\rho.}\ 52^{\lambda.}\frac{16}{17}$.

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶνε ἀνάλογα διότι εἰς διπλάσιον ποσὸν γίνεται προδήλως διπλασία ὑφαίρεσις, εἰς ριπλάσιον, τριπλασία κτλ.), δυνάμεθα, ἀφ' οὗ εὕρωμεν, ὅτι εἰς 102 ραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2, νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν τῶν 1200 ραχμῶν καὶ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν

ποσὸν	ὑφαίρ.
102	2
1200	χ

θεν $$χ=2\times\frac{1200}{102}=\frac{1200}{51}.$$

311. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐς τὸ γραμμάτιον περιεχόμενον ποσὸν ἐπὶ τὸν τόκον τῶν ἑκατὸν δραχμῶν διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.

312. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται σήμερον διὰ τὸ γραμμάτιον, λέγεται *παροῦσα ἀξία* αὐτοῦ. Εὑρίσκεται δὲ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ἀφαιρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τῶν 1200 δραχμῶν εἶνε $1200-23^{\delta\rho.}\ 52^{\lambda.}\frac{16}{17}$ τουτέστι $1176^{\delta\rho.}\ 47^{\lambda.}\frac{1}{17}$.

Δύναται δὲ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως ἡ παροῦσα ἀξία ὡς ἑξῆς·

102 δραχμαὶ (πληρωτέαι μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %) ἔχουσι παροῦ-

σαν ἀξίαν 100· πόση εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία 1200 δραχμῶν; (πληρωτέων ἐπίσης μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %).

Ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶνε προφανῶς ἀνάλογα· ὅθεν

παροῦσα ἀξία	ποσόν
100	102
χ	1200

$$\text{καὶ } \chi = 100 \times \frac{1200}{102} = \frac{1200 \times 100}{102}.$$

εἶνε δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία, τὴν ὁποίαν οὕτως εὑρίσκομεν, καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις συναποτελοῦσι τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὰς 1200 δραχμάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε μὲν ἀνάλογος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ποσοῦ, ἀλλὰ δὲν εἶνε ἀνάλογος οὔτε τοῦ χρόνου οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου. Διότι διπλασιαζομένου τοῦ χρόνου, ἡ ὑφαίρεσις δὲν δὲν γίνεται διπλασία, ἀλλὰ κατά τι μικροτέρα ἢ διπλασία· ὁμοίως, διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ ὑφαίρεσις γίνεται μεγαλητέρα, ἀλλ' ὄχι καὶ διπλασία. Τῷ ὄντι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ τοὺς 3 μῆνας ἡ ὑφαίρεσις εἶνε $\frac{1200 \times 2}{102}$, διὰ δὲ 6 μῆνας θὰ εἶνε $\frac{1200 \times 4}{104}$.
τοῦτο δ' εἶνε ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου· διότι τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου εἶνε $\frac{1200 \times 4}{102}$.

313. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶνε γνωστὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται ὁ χρόνος, ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἀνάγονται εὐκόλως εἰς προβλήματα τόκου· διότι ἡ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον, ὅστις μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Γραμμάτιον τι ἐξωφλήθη 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % καὶ ἔπαθεν ὑφαίρεσιν 70 δραχμῶν· πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον, ποῖον κεφάλαιον εἰς 9 μῆνας πρὸς 8 % φέρει τόκον 70 δραχμάς· τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ εἶνε τὸ ποσὸν μὲ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθη τὸ γραμμάτιον, ἤτοι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ. ἐὰν δὲ εἰς αὐτὴν προστεθῇ ἡ ὑφαίρεσις, θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ ἑξῆς·

Εἰς γραμμάτιον 1500 δραχμῶν ἐξοφληθὲν 16 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ὑφαίρεσις 120 δραχμῶν· πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ ὑφαίρεσις ;

σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Αἱ 120 δραχμαὶ εἶνε ὁ τόκος τῶν 1500—120, ἤτοι τῶν 1380 δραχμῶν (δι' ὧν ἐξωφλήθη τὸ γραμμάτιον) εἰς 16 μῆνας· ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 1872,25 δρ. προεξοφλουμένου 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8 $^0/_0$.

('Απ. 48,63...).

2) Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξωφλήθη 14 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἀντὶ δραχμῶν 2150· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ; ('Απ. 12 $^0/_0$).

3) Πωλήσας τις οἰκίαν ἀντὶ 32700 δραχμῶν, ἐκέρδησεν 9 $^0/_0$ ἐπὶ τοῦ ποσοῦ, δι' οὗ εἶχεν ἀγοράσῃ αὐτήν· πόσον τὴν εἶχεν ἀγοράσῃ ;

('Απ. 30000).

4) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 1743 δραχμῶν, ὅπερ προεξοφλεῖται πρὸς 7 $^0/_0$ διὰ 1400 δραχμῶν ;

$\left('Απ.\ 3^{ἔτ.}\ \frac{1}{2}\right)$.

5) Πόσων δραχμῶν εἶνε τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη πρὸς 8 $^0/_0$ διὰ 3890 δραχμῶν $4\frac{1}{2}$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ;

('Απ. 4006,70).

6) Ἔχει τις δύο γραμμάτια τὸ μὲν ἓν 7500 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο 4800 πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας· ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ αὐτὰ ἀντὶ ἑνὸς μόνου γραμματίου πληρωτέου μετὰ ἓν ἔτος, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 $^0/_0$; $\left('Απ.\ 12405\frac{15}{17}\right)$

7) Ἔμπορος ἠγόρασε παρ' ἄλλου πράγματα ἀξίας 3816$^{δρ.}$· μὴ δυνάμενος δὲ νὰ πληρώσῃ ἀμέσως, θέλει νὰ ἐκδώσῃ γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας μὲ ἐπιτόκιον 8 $^0/_0$· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο ; ('Απ. 3943,20).

Μερισμός εἰς μέρη ἀνάλογα.

314. *Νὰ μερισθῇ ἀριθμός*, οἷον ὁ 180, *εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν*, οἷον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, σημαίνει νὰ γίνῃ τόσα μέρη, ὅσοι εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς, ἤτοι τὰ μέρη ταῦτα νὰ γίνωνται ἴσα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἦτο ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2+3+5$, ἤτοι 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 2, 3, 5· ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο διπλάσιος, ἤτοι 20, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια 4, 6, 10, ἂν ἦτο τριπλάσιος, ἤτοι 30, τὰ μέρη θὰ ἦσαν τριπλάσια 6, 9, 15· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *ἕκαστον μέρος εἶνε ἀνάλογον τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ*· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, προτείνοντες αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε 10, τὸ πρῶτον μέρος εἶνε 2, ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε 180, πόσον θὰ εἶνε τὸ πρῶτον μέρος;

μεριστέος ἀριθμός μέρος α'

$$\frac{10}{180} \qquad \frac{2}{x} \qquad \text{ἄρα } x=2\times\frac{180}{10} \text{ ἤτοι } x=36.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα μέρη· καὶ τὰ τρία μέρη εἶνε

$$\frac{180}{10}\times 2, \qquad \frac{180}{10}\times 3, \qquad \frac{180}{10}\times 5.$$

315. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν κανόνα.

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν, δύνανται νὰ πολλαπλασιασθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, χωρὶς νὰ βλαβῶσι τὰ μέρη· ἢ καὶ νὰ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ. Διότι, ἂν π. χ. πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα K ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, τὰ μέρη θὰ εἶνε

$$K\times\frac{2}{10} \qquad K\times\frac{3}{10} \qquad K\times\frac{5}{10} \qquad 10=2+3+5.$$

Ἂν δὲ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 λάβωμεν τοὺς 2×8, 3×8, 5×8, τὰ μέρη θὰ εἶνε.

$$K\times\frac{2\times8}{10\times8},\quad K\times\frac{3\times8}{10\times8},\quad K\times\frac{5\times8}{10\times8},$$

διότι τὸ ἄθροισμα $2\times8+3\times8+5\times8$ εἶνε 10×8· ὥστε τὰ μέρη ἔμειναν τὰ αὐτά.

Ὁμοίως καὶ ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ δὲν βλάπτει τὰ μέρη.

Διὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{2}, 5\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$, πολλαπλασιάζομεν τούτους ἐπὶ 18 (διὰ νὰ γίνωσιν ἀκέραιοι) καὶ γίνονται 45, 102, 8· ἔπειτα μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 45, 102, 8· ὅπερ εἶνε εὐκολώτερον. Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν ἀναλόγως τῶν 100, 200, 500, μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 1, 2, 5, ὅπερ εἶνε εὐκολώτερον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΙΑΣ

316. *Προβλήματα ἑταιρίας* λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐπιχειρήσεώς τινος εἰς ἐκείνους, οἵτινες τὴν ἀνέλαβον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα· γίνεται δὲ τοῦτο φανερὸν ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρίαν διά τινα ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ πρῶτος 7500 δραχμάς, ὁ δεύτερος 12000 δρ. καὶ ὁ τρίτος 22500. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδησαν 2800 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς (δηλαδὴ τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐλάμβανέ τις, ἂν κατέβαλλε 1 δραχμὴν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν), ὁ πρῶτος ἐπειδὴ κατέβαλεν 7500 δραχμάς, θὰ λάβῃ $7500\times\delta$, ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $12000\times\delta$ καὶ ὁ τρίτος $22500\times\delta$· τὰ τρία δὲ ταῦτα

$$7500\times\delta,\qquad 12000\times\delta,\qquad 22500\times\delta$$

θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἤτοι τὰς 2800 δρ.

2) Ἔμπορος ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 12000 δρ., ὀφείλων δὲ εἰς μὲν τὸν Α 5800 δρ., εἰς δὲ τὸν Β 7600, εἰς δὲ τὸν Γ 9400· πόσας ἐκ τῶν 12000 πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ὀφειλομένων εἰς αὐτόν; $\left(\text{ὁ Α } 3052\frac{36}{57}\text{, ὁ Β. } 4000\text{, ὁ Γ. } 4947\frac{21}{57}\right)$.

3) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 10000 δρ. μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 6000 δρ.· δύο δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον, ὅτι ἐκέρδησαν 2900δρ. πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἑκάτερος ἐξ αὐτῶν; ('Απ. ὁ α' 2000 ὁ δὲ β' 900).

4 Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του εἰς τὰ τρία τέκνα του ὡς ἑξῆς· ὁ δεύτερος υἱὸς νὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου· ἡ δὲ κόρη να λάβῃ τὴν μερίδα τοῦ πρώτου καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου· ἡ περιουσία σύγκειται ἐξ 78000 δραχμῶν· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον;
('Απ. ὁ α' υἱὸς 24000, ὁ β' 20000, ἡ δὲ κόρη 34000.)

5) Θεῖός τις ἀφίνει εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του τὴν περιουσίαν του συνισταμένην ἐκ δραχ. 9372· διατάσσει δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστος τόσα, ὥστε τὰ μερίδια αὐτῶν κατατιθέμενα εἰς τὴν Τράπεζαν ἐπὶ τόκῳ ἁπλῷ 5 % να γίνωνται ἴσα, ὅταν θὰ συμπληρώνωσι τὸ 21 ἔτος τῆς ἡλικίας των· ὁ πρῶτος εἶνε 12 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 9 καὶ ὁ τρίτος 5· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος; ('Απ. ὁ α' 3456, ὁ β' 3132, ὁ γ' 2784).

6) Ἔργον τι ἐξετελέσθη ὑπὸ 2 ἐργατῶν, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 7 ἡμέρας ἐπὶ 6 ὥρας καθ' ἡμέραν· ὁ δὲ δεύτερος 12 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἡμέραν. Ἔλαβον δὲ ὡς πληρωμὴν δραχμὰς 45· πόσας θα λάβῃ ἕκαστος; ('Απ. ὁ α' 21, ὁ δὲ β' 24).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ

317. Τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως εἶνε δύο εἰδῶν.

α') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου.

β') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται, πόσον θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ἀνέμιξέ τις τριῶν εἰδῶν οἴνους· ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 50 λεπτά, ἔλαβεν 100 ὀκάδας, ἐκ τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 35 λεπτά, ἔλαβε 250· καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπτά, ἔλαβε 50 ὀκάδας· πόση θὰ εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι, διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀρκεῖ *νὰ εὕρω τὴν ἀξίαν ἑκάστου τῶν ἀναμιχθέντων οἴνων*, ἔπειτα ἐξ αὐτῶν τὴν *ἀξίαν τοῦ μίγματος*· μετὰ δὲ ταῦτα *νὰ μερίσω τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε καὶ αἱ ὀκάδες αὐτοῦ*· τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

Ἀξία τοῦ πρώτου οἴνου	$50 \times 100 = 5000$	λεπτὰ
» » δευτέρου »	$35 \times 250 = 8750$	»
» » τρίτου »	$80 \times 50 = 4000$	»
ἑπομένως ἀξία τοῦ μίγματος	17750	λεπτά.

Τὸ μῖγμα σύγκειται ἐκ ὀκάδων $100+250+50$, ἤτοι 400.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 400 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν 17750 λεπτά, ἡ μία ὀκᾶ αὐτοῦ θὰ ἀξίζῃ $\frac{1775}{40}$ ἢ 44λ. $\frac{3}{8}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Συνεχωνεύθησαν 20 γραμμάρια ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900 μετὰ 50 γραμμαρίων ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,835· ποῖος θὰ εἶνε ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος;

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Λέγοντες, ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου εἶνε 0,900, ἐννοοῦμεν, ὅτι μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτοῦ εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{100}{1000}$ εἶνε ἄλλα μέταλλα εὐτελῆ.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς καὶ τὰ πρὸς αὐτὸ ὅμοια, λύεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τῆς ἀναμίξεως. Διότι εἶνε προφανές, ὅτι ἀρκεῖ πρὸς λύσιν αὐτοῦ, νὰ εὕρωμεν *τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀναμιχθέντων μετάλλων*, ἔπειτα ἐκ τούτων *τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς τὸ κρᾶμα, καὶ*

τέλος νὰ μερίσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε μονάδες τοῦ μίγματος. Τὸ πηλίκον θὰ εἶνε τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ... γύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ κράματος, τουτέστι ... βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος.

καθαρ. ἄργ. τοῦ πρώτου $0.900 \times 20 = 18$ γραμμ...
» » » δευτέρου $0.835 \times 50 = 41, \quad 75$ »

ἑπομένως καθαρὸς ἄργυρος τοῦ κράματος $= 59$, γρ. 75

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κρᾶμα σύγκειται ἐκ $50+20$, ἤτοι 70 γραμμαρ... συνάγεται, ὅτι ἕκαστον γραμμάριον τοῦ κράματος ἔχει ἄργυρον ... θαρὸν $\frac{59,75}{70}$ ἢ $0,853\ldots$

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οἰνοπώλης τις ἔχει δύο εἰδῶν οἴνους· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ... ζει 45 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 80, θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγ... 800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά· πόσον θὰ βά... ἐξ ἑκάστου εἴδους;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι μία ... τοῦ πρώτου εἴδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 45 λεπτά· τώρα δὲ εἰς τὸ μῖγ... εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 60· ὥστε δι' ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ πρώτου ... δους θὰ κερδίζῃ ὁ οἰνοπώλης 15 λεπτά· ἀλλὰ πάλιν θὰ ζημιώνετ... δι' ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ δευτέρου 20 λεπτὰ (διότι χωριστὰ ἐπωλεῖτο ... λεπτὰ καὶ τώρα εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 60)

Λοιπὸν 1 ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους κερδίζει 15 λεπτά·
1 ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους χάνει 20 λεπτά·

ἄρα, ἂν βάλῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους 20 ὀκάδας, θὰ κερδίσῃ $15\times$... λεπτά· ἂν δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους βάλῃ 15 ὀκάδας, θὰ χάσῃ $20\times$... καὶ ἐπειδὴ 15×20 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 20×15, συμπεραίνομεν, ὅτι ... κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, ἂν ἀναμίξῃ

20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α'
καὶ 15 ὀκάδας ἐκ τοῦ β'.

ὥστε, ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα 35 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

20 ὀκάδ. ἐκ τοῦ α'.
καὶ 15 » ἐκ τοῦ β'

ε νὰ κάμῃ μῖγμα μιᾶς ὀκᾶς, ἔπρεπε να βάλῃ

ἐκ τοῦ α' εἴδους $\frac{20}{35}$

ἐκ τοῦ β' εἴδους $\frac{15}{35}$

ὸν διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 800 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

ἐκ τοῦ α' εἴδους $\frac{20}{35}\times 800$, ἤτοι 457ὀκ. $\frac{1}{7}$

ἐκ τοῦ β' εἴδους $\frac{15}{35}\times 800$, ἤτοι 342ὀκ. $\frac{6}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ι τις δύο ὄγκους ἀργύρου· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς κα- ης εἶνε 0,935, τοῦ δὲ δευτέρου 0,880· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ρου διὰ νὰ σχηματίσῃ 5 ὀκάδας ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν κα- ης 0,900;

στη ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,035 ἀρ- ερισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου (διότι τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ καθαρότητος 0,900)· ἑκάστη δὲ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἰσάγει εἰς α 0,020 ἀργύρου ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Ὥστε ἐξ ὀκᾶς τοῦ α' εἴδους περισσεύει ἄργυρος 0,035 τῆς ὀκᾶς, ἐξ ἑκά- ὀκᾶς τοῦ β' λείπει ἄργυρος 0,020 τῆς ὀκᾶς.

λοιπὸν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α', θὰ περισσεύῃ ἄργυρος

0,035×20 ὀκάδες·

ιάλῃ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, θὰ λείπῃ ἄργυρος

0,020×35 ὀκάδες.

ι, ἐὰν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α' καὶ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευ- ιος ἄργυρος λείπει ἐκ τοῦ ἑνὸς εἴδους, τόσος περισσεύει ἐκ τοῦ ιαὶ ἑπομένως τὸ κρᾶμα οὔτε περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου ζῃ ἄργυρον οὔτε ὀλιγώτερον.

οιπὸν ἤθελε να κάμῃ κρᾶμα 55 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

20 ὀκ. ἐκ τοῦ α'

καὶ 35 ὀκ. ἐκ τοῦ β',

να κάμῃ κρᾶμα 1 ὀκ., ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$\frac{20}{55}$ ἐκ τοῦ α'

καὶ $\frac{35}{55}$ ἐκ τοῦ β'.

Λοιπὸν διὰ νὰ κάμῃ κρᾶμα 5 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

$$\frac{20}{55}\times5 \text{ ἐκ τοῦ α', ἤτοι 1 ὀκ. 327 δρ.} \frac{3}{11}.$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55}\times5 \text{ ἐκ τοῦ β', ἤτοι 3 ὀκ. 72 δρ.} \frac{8}{11}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Σιτέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη σίτου· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους ἔλαβεν 800 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 1500 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 2000· πρὶν τὰ ἀναμίξῃ, ἐπώλει τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸ δεύτερον πρὸς 30 καὶ τὸ τρίτον πρὸς 25· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδίσῃ 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ;

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον, πόσον ἀξίζει τὸ μίγμα, ἔπειτα θὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 10 % (δι' ἓν ἔτος) καὶ τὸ ἄθροισμα εἶνε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ μίγματος· διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε αἱ ὀκάδες τοῦ μίγματος, θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον· οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 32 λεπτὰ καὶ $\frac{21}{43}$ τοῦ λεπτοῦ.

2) Οἰνοπώλης ἔχει δύο εἰδῶν οἶνον· καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους πωλεῖ τὴν ὀκᾶν 80 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 45· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μίγμα 2800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν νὰ πωλῇ 54 λεπτὰ καὶ νὰ κερδίσῃ 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τῶν οἴνων;

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ νὰ κερδίσῃ 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος, ἢ καὶ νὰ κερδίσῃ 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑκάστης ὀκᾶς· πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους 8 %· ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ α' εἴδους $86\frac{2}{5}$ λ., ὡς τιμὴν δὲ τοῦ δευτέρου $48\frac{3}{5}$, 6· καὶ ἔπειτα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως· οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α' εἴδους 400 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ β' 2400.

3) Ἔχει τις 85 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,900 καὶ θέλει νὰ ἀναβιβάσῃ τὸν βαθμὸν τῆς καθαρότητος εἰς 0,975· πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετ' αὐτοῦ;

(Ἀπ. 255 δράμ.)

μπορός τις ἠγόρασεν 850 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 95 λεπτὰ τὴν ειτα 2800 ὀκάδας πρὸς 1,05 καὶ τέλος 1890 ὀκάδας πρὸς ά· ἐὰν τώρα θέλῃ νὰ πωλήσῃ ὅλον τὸ ἔλαιον τοῦτο διὰ μιᾶς, ον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ; καὶ ον, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του;

ʒλ. $\frac{193}{554}$· ἂν δὲ θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30%, θὰ πωλήσῃ πρὸς

$\left.\frac{36}{77}\right)$.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

ι. *Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος* διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφρά- λῆθος αὐτῶν.

ἰείγματος χάριν, ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 12, 18 καὶ 30 $\frac{3+30}{}$, ἤτοι 20· ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 20, 35, 40, $\frac{56}{4}$ ἢ 39.

μέσους ὅρους μεταχειριζόμεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις. ίσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ἐμετρήσαμεν τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς άς· καὶ τὴν μὲν πρώτην φορὰν εὑρήκαμεν, ὅτι εἶνε 5,8 μέ- ν δὲ δευτέραν 5,76, τὴν δὲ τρίτην 5,758 (εὑρήκαμεν δὲ ; ἀριθμοὺς εἰς τὰς τρεῖς καταμετρήσεις διὰ τὰ λάθη, εἰς ἃ μεν ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν)· τότε ὡς πιθα- τιμὴν τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον ν εὑρεθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι

$$\frac{1}{3}(5,8+5,76+5,758), \text{ ἢ } 5,772...$$

χράδειγμα τῶν μέσων ὅρων, ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς.
ιοδήματα τῶν τελωνείων κράτους τινὸς ἦσαν

τῷ	1880	δραχμαὶ	7 489 851
τῷ	1881	»	8 500 314
τῷ	1882	»	8 358 705
τῷ	1883	»	9 005 015
τῷ	1884	»	10 267 519
τῷ	1885	»	12 665 758·

ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσοδημάτων τῶν τελωνείων κατὰ τὰ ἓξ η.

έτοντες τὰ εἰσοδήματα τῶν ἓξ ἐτῶν, εὑρίσκομεν 56 287 162 καὶ ιτες τὸ ἕκτον τούτου εὑρίσκομεν ὡς μέσον ὅρον 9381193.66...

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

319. *Ἐξίσωσις* λέγεται ἰσότης συνδέουσα πρὸς ἄλληλα γνωστ[ὰ] καὶ ἄγνωστα.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἰσότης $3\chi-\psi=12$ συνδέει τὸν ἄγνωστ[ον] ἀριθμὸν χ μετὰ τῶν γνωστῶν 3 καὶ 12· εἶνε λοιπὸν ἐξίσωσις.

Ὁμοίως ἡ ἰσότης $\frac{\chi}{2}+5=3\chi-5$ εἶνε ἐξίσωσις.

Καὶ ἡ ἰσότης $3\chi-\psi=1$, ἥτις συνδέει πρὸς ἀλλήλους δύο ἀγνώ-στους ἀριθμοὺς χ, ψ καὶ γνωστοὺς ἀριθμούς, εἶνε ἐξίσωσις.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως (ὅταν περιέχῃ ἓν ἄγνωστον) λέγεται ἡ εὕρεσ[ις] τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις τιθέμενος ἀν[τὶ] τοῦ ἀγνώστου χ καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν ἀληθῆ, ἤτοι ἐπαληθεύει αὐτή[ν].

320. Τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων θὰ μάθωμεν ἀλλαχοῦ λεπτομε[ρέ]-ρως. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον τοῦτο, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεω[ν] στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος καὶ ἐπὶ τῶν γενικῶν ἰδ[ιο]-τήτων τῶν τεσσάρων πράξεων.

Αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ λύσις τῶ[ν] ἐξισώσεων, εἶνε αἱ ἑξῆς.

1) Ἐὰν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
2) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
3) Ἐὰν ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
4) Ἐὰν ἴσα διαιρέσωμεν δι' ἴσων, προκύπτουσιν ἴσα.

Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, θὰ λ[ύ]-σωμεν ἁπλᾶ τινα παραδείγματα.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5\chi=85$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ [5] καὶ εὑρίσκομεν $\chi=17$, ὥστε ὁ ἄγνωστος εἶνε 17· οὗτος δηλαδ[ὴ ὁ] ἀριθμὸς (καὶ οὗτος μόνος) τιθέμενος ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξ[ί]-σωσιν, καθιστᾷ αὐτὴν ἀληθῆ· καὶ ὄντως εἶνε $5\times17=85$.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $2\chi-3=17$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 3, ὅτε προκύπτει $2\chi-3+3=17+3$ ἢ $2\chi=20$· διαιροῦμεν τώρα ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν $\chi=10$· ὥστε ὁ μόνος ἀριθμὸς ὁ τὴν ἐξίσωσιν ἐπαληθεύων εἶνε ὁ 10.
Καὶ τῷ ὄντι εἶνε $2\times10-3=17$ ἢ $17=17$.

Ἔστω καὶ ἡ ἐξίσωσις $2\chi+8=7\chi-12$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 12, ὅτε εὑρίσκομεν $2\chi+8+12=7\chi-12+12$· ἤτοι $2\chi+20=7\chi$· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τούτων 2χ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$2\chi-2\chi+20=7\chi-2\chi \qquad \text{ἢ } 20=(7-2)\chi\cdot$$

τουτέστιν $20=5\chi$·

τέλος διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $4=\chi$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 4, ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ (καὶ μόνος οὗτος), ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν· καὶ τῷ ὄντι θέτοντες 4 εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, εὑρίσκομεν $2\times4+8=7\times4-12$, ἢ $16=16$, ὅπερ ἀληθές· ἂν ὅμως τεθῇ ἄλλος οἱοσδήποτε ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ, ἡ ἰσότης δὲν ἀληθεύει.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{2}-1=\frac{\chi+1}{3}$.

Πρὸς λύσιν αὐτῆς πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 2. 3 (ἤτοι ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 2 καὶ 3) καὶ εὑρίσκομεν

$$2.3.\frac{\chi}{2}-1.2.3.=2.3.\frac{\chi+1}{3}$$

ἤτοι
$$3\chi-6=2(\chi+1)$$
ἢ
$$3\chi-6=2\chi+2\cdot$$

προσθέτομεν ἔπειτα εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 6, ὅτε εὑρίσκομεν

$$3\chi=2\chi+8\cdot$$

ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τὸν ἀριθμὸν 2χ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$3\chi-2\chi=2\chi+8-2\chi.$$

ἤτοι
$$\chi=8.$$

Ὥστε ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις λύει τὴν ἐξίσωσιν εἶνε ὁ 8· καὶ τῷ ὄντι ἔχομεν $\frac{8}{2}-1=\frac{8+1}{3}$ ἢ $4-1=3$, ὅπερ ἀληθές.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μία ἐξίσωσις μόνον ἕνα ἄγνωστον δύναται νὰ προσδο-

2) *Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας· πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν, ἂν ἤθελον νὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς 12 ἡμέρας;*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν· ὅταν ἡ ἐργασία διαρκέσῃ 12 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, θὰ εἶνε 12χ· ὅταν δὲ διαρκέσῃ 15 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, εἶνε 15×8· ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶνε $12\chi=15\times8$· καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ 12, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{15\times8}{12}$, ἤτοι $\chi=10$.

Προβλήματα τόκου.

Ἔστω κ τὸ κεφάλαιον, τ ὁ τόκος, ε τὸ ἐπιτόκιον καὶ χ ὁ χρόνος (εἰς ἔτη)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος τόκον ε δραχμάς, ἡ μία δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον $\frac{\varepsilon}{100}$, καὶ αἱ κ δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον $\frac{\varepsilon.\kappa}{100}$, ἄρα αἱ κ δραχμαὶ εἰς χ ἔτη θὰ φέρωσι τόκον $\frac{\kappa.\varepsilon.\chi}{100}$ εἶνε λοιπὸν $\tau=\frac{\kappa.\varepsilon.\chi}{100}$. (παράβαλ. ἐδ. 303)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντὶ $\kappa\times\varepsilon\times\chi$ ἐγράψαμεν διὰ συντομίαν κ. ε. χ· ἡ γραφὴ αὕτη τοῦ γινομένου εἶνε συνήθης, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται διὰ γραμμάτων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἥτις συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ (κεφάλαιον, ἐπιτόκιον, τόκον καὶ χρόνον), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὸ ἕν, ὅταν ἔχωμεν τὰ τρία ἄλλα.

Ἐὰν λόγου χάριν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον κ ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 100 καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $100.\ \tau=\kappa.\ \varepsilon.\ \chi$. (α)
ἔπειτα διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου ε. χ· τότε εὑρίσκομεν $\frac{100.\ \tau.}{\varepsilon.\ \chi}=\kappa$. (παράβαλ. ἐδ. 304)

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου κ. ε· τότε εὑρίσκομεν

$$\frac{100\tau}{\kappa.\ \varepsilon.}=\chi \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 305).}$$

Ἐὰν τέλος θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον ε, διαιροῦμεν τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου κ. χ καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{100.\ \tau}{\kappa.\ \chi}=\varepsilon \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 306).}$$

Ὥστε πάντα τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται ἐκ μιᾶς μόνης ἐξισώσεως

$$\tau=\frac{\kappa.\ \varepsilon.\ \chi}{100}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁμοίως λύονται τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\upsilon=\frac{\kappa.\ \chi.\ \varepsilon}{100+\chi.\ \varepsilon},$$

τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 311 ἐκτεθέντα καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ υ σημαίνει τὴν ὑφαίρεσιν (ἐσωτερικήν).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς Κ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

Τα ζητούμενα μέρη τοῦ Κ, ὡς ἀνάλογα τῶν α, β, γ, θὰ εἶνε

$$\alpha\chi.\quad \beta\chi.\quad \gamma\chi$$

τοῦ χ ὄντος ἀγνώστου ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μέρη τοῦ Κ προστιθέμενα δίδουσι τὸν Κ, ἕπεται

$$\alpha\chi+\beta\chi+\gamma\chi=K$$

ἤτοι

$$(\alpha+\beta+\gamma).\chi=K \qquad \text{(ἐδ. 174)}$$

καὶ ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ α+β+γ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}$$

ὥστε τὰ μέρη τοῦ Κ θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha K}{\alpha+\beta+\gamma},\qquad \frac{\beta K}{\alpha+\beta+\gamma},\qquad \frac{\gamma K}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Προβλήματα ἀναμίξεως.

1) *Ἔχει τις σῖτον τριῶν εἰδῶν· τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 3[illegible] πτά, τοῦ δευτέρου 25, τοῦ δὲ τρίτου 22· ζητεῖται, ἂν ἀνα[illegible] ὀκάδας ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 1000 ἐκ τοῦ δευτέρου κα[illegible] τοῦ τρίτου, πόση θὰ εἶνε ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;*

Ἔστω χ ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος· ἐπειδὴ τ[illegible]


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 02189 1703

